

Partie 1 : Vibrations des systèmes linéaires de second ordre

1 Objectifs et définitions

1.1 Introduction

L’objectif de ce document est de présenter les méthodes génériques utilisées pour résoudre le problème consistant à déterminer l’évolution d’un oscillateur linéaire du second ordre sous l’effet d’un forçage quelconque.

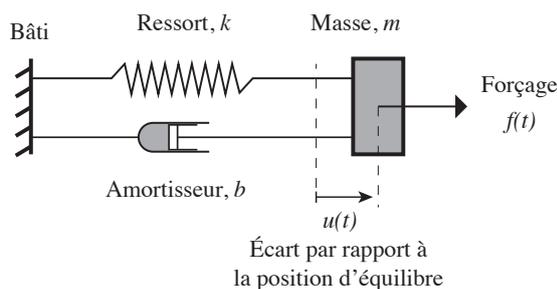
L’oscillateur considéré ici est de nature mécanique. Ce problème à un degré de liberté se résout de façon rigoureusement identique pour de nombreux autres types de systèmes : pendule simple, oscillations transversales d’une corde, oscillateur électrique LRC (bobine, résistance et condensateur). Pour résoudre ces problèmes, il suffit d’opérer des changements de variable adéquats et de se ramener à la forme canonique de l’équation différentielle régissant le l’évolution du système. La méthode de résolution de ce problème peut aussi être étendue à des systèmes comportant de nombreux degrés de libertés, y compris les systèmes continus (modes propres d’une corde dans un instrument de musique, vibration des structures en génie civil, etc). On se restreint ici à l’analyse des systèmes de *dimension finie* au sein desquels l’énergie reste confinée. Cependant, certaines méthodes développées pour l’étude de tels systèmes peuvent également être appliquées à l’étude des phénomènes de *propagation* des phénomènes vibratoires, dont la propagation des ondes progressives (Partie 2). En particulier, la méthode d’analyse du régime permanent harmonique permet de caractériser la réponse en phase et en amplitude d’un milieu soumis à une onde électromagnétique (Partie 4). Avant de s’atteler à l’étude des phénomènes propagatifs, il est cependant fondamental de bien maîtriser les outils mathématiques nécessaires à la résolution du problème dans le cadre d’un système “fermé”.

1.2 Équation canonique

Le système étudié consiste en une masse m reliée à un bâti immobile par l’intermédiaire d’un ressort de raideur k et d’un amortisseur de constante d’amortissement b . Le ressort et l’amortisseur sont montés en parallèle (voir figure ci-contre). La masse peut se déplacer dans une seule direction (disons (Ox)), et on note $u(t) = x(t) - x_o$ la position de son centre d’inertie par rapport à la position d’équilibre x_o . La masse est, en outre, soumise à une force $f(t)$ dirigée dans la direction (Ox) . On suppose les forces appliquées au centre d’inertie de la masse. Ici, on ne s’intéresse pas aux mouvements et forces intervenant dans les autres directions. En particulier, il n’est pas nécessaire de prendre en compte l’effet de la gravité.

L’application du principe fondamental de la dynamique (PFD) au système “masse” dans le référentiel du laboratoire supposé inertiel (ou galiléen) permet d’aboutir à l’équation du mouvement :

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = -k u(t) - b \frac{du(t)}{dt} + f(t) \quad (1)$$



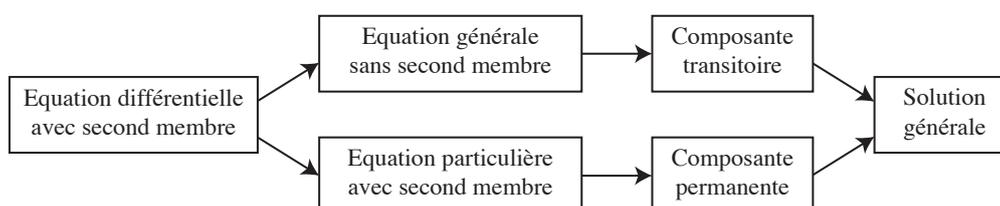
En manipulant les termes de l'équation ci-dessus et en introduisant de nouveaux paramètres, on peut mettre l'équation du mouvement sous la *forme canonique* :

$$\ddot{u} + 2\epsilon\omega_o\dot{u} + \omega_o^2u = f/m \quad (2)$$

où : $\dot{u} = \frac{du(t)}{dt}$, $\ddot{u} = \frac{d^2u(t)}{dt^2}$, $\omega_o^2 = k/m$ et $2\epsilon\omega_o = b/m$ (d'où $\epsilon = \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{km}}$). On appelle ϵ le *facteur d'amortissement* ou *coefficient d'amortissement réduit*, et ω_o la *pulsation propre du système conservatif* ou *pulsation propre non amortie*, c'est à dire la pulsation propre du système équivalent lorsqu'on ignore la seule force non conservative, l'amortissement (i.e. quand $b = 0$).

Il s'agit d'une *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants non homogène*. Chaque terme compte dans cette dénomination :

- *équation* : parce qu'il y a le signe "égal"... Cette équation implique des *variables* (t), des *fonctions* dépendant de cette variable (u , f), et des *coefficients constants* (m , k , et b ou m , ϵ et ω_o). On suppose qu'on connaît tout dans cette équation, sauf u . On cherche à résoudre l'équation, c'est à dire à exprimer u en fonction de t et des paramètres du problème (qui incluent aussi éventuellement les *conditions initiales*, bien que celles-ci n'apparaissent pas dans cette équation).
- *différentielle* : car c'est une équation impliquant une *fonction* (ici $u(t)$) et ses dérivées successives ($\dot{u}(t) = \frac{du(t)}{dt}$, $\ddot{u}(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2}$, etc). Une équation différentielle est un cas spécial d'équation aux dérivées partielles (EDP) pour laquelle la fonction ne dépend que d'une seule *variable* (ici, le temps t). Les dérivées partielles sont donc des dérivées simples. Pour alléger les équations, on omet souvent de noter la variable (i.e. on note $u(t) \equiv u$).
- *linéaire* : car tous les termes sont directement *proportionnels* à u , \dot{u} , \ddot{u} , etc. Il n'y a pas de termes non linéaires du type u^2 , $\sqrt{\ddot{u}}$, $1/\ddot{u}$, $\ln u$, etc... En d'autres termes, le premier membre de l'équation peut être écrit sous la forme $L(u)$ où L est une application linéaire, à savoir telle que $L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$ et $L(\lambda u) = \lambda L(u)$.
- *du second ordre* : car la dérivée de plus haut rang est une dérivée seconde ($\frac{d^2u}{dt^2}$).
- *non homogène* (ou *avec second membre*) : car l'équation comporte un terme supplémentaire de *forçage* (ici, la fonction f , qui peut se réduire à une constante). En l'absence de ce second membre, l'équation est dite *homogène*. La solution de l'équation homogène correspond aux *oscillations libres*. On verra que la résolution d'une équation différentielle linéaire homogène peut se ramener à la résolution, plus simple, d'une *équation polynômiale*. La solution générale de l'équation non homogène est la somme (1) de la solution générale de l'équation homogène $u_o(t)$ et (2) d'une solution particulière de l'équation non homogène $u_p(t)$ (voir figure ci-dessous). La forme prise par cette dernière fonction u_p dépend de la forme de f . Nous verrons qu'il existe plusieurs méthodes de résolution suivant la nature de f : harmonique, indicielle, impulsionnelle, quelconque...



Avant de commencer, attardons nous sur la méthode générale de résolution de cette équation différentielle. On démontrera dans la section 3 que la solution générale se décompose en deux parties : (1) un *régime transitoire*, de caractère oscillatoire si l'amortissement est faible, et dont l'amplitude décroît exponentiellement avec le temps, et (2) un *régime permanent*, dont la forme dépend de la forme de la fonction de forçage f . On procèdera donc en deux temps pour déterminer chacune de ces deux composantes séparément (voir la figure ci-dessus) :

1. on déterminera d'abord la solution générale de l'équation homogène u_{ssm}^g (i.e. sans second membre : $\ddot{u} + 2\epsilon\omega_o\dot{u} + \omega_o^2u = 0$) pour déterminer la composante transitoire de la solution. Comme nous le verrons dans la section 2, la résolution de l'équation différentielle homogène pour des conditions

initiales quelconques implique la résolution d'une équation polynômiale. La résolution de cette composante ne dépend pas de la fonction f , donc la méthode est générique et s'applique à tout type de forçage.

2. on cherchera ensuite une solution particulière de l'équation non homogène u_{asm}^p (i.e. avec second membre : $\ddot{u} + 2\epsilon\omega_o\dot{u} + \omega_o^2u = f/m$), correspondant à la composante permanente de la réponse au forçage. La forme de cette solution, et la méthode qui doit être appliquée pour la trouver, dépend de la forme de f . On verra dans la section 3 que la résolution de l'équation non homogène implique le calcul d'une intégrale du produit de f et d'une exponentielle du temps. L'introduction d'une transformation judicieuse de la fonction f permet de simplifier le calcul de cette intégrale pour certains classes de fonctions de forçage. Nous nous limiterons ici à deux types de forçages d'intérêt assez large. (a) Si le forçage est *impulsionnel* (on donne un "coup de pied" dans la masse) ou *indiciel* (on applique une force d'intensité constante à partir d'un instant t_o), la méthode utilisant la transformée de Laplace est la plus directe (section 4). (b) Le cas d'un forçage *périodique* se traite par superposition des réponses *harmoniques*, grâce à la méthode de la transformée de Fourier (section 5).

Finalement, la solution générale de l'équation avec second membre est simplement la somme de ces deux solutions. Pourquoi ? On comprend que si :

$$\begin{cases} \ddot{u}_{ssm}^g + 2\epsilon\omega_o\dot{u}_{ssm}^g + \omega_o^2u_{ssm}^g = 0 \\ \ddot{u}_{asm}^p + 2\epsilon\omega_o\dot{u}_{asm}^p + \omega_o^2u_{asm}^p = f/m \end{cases} \quad (3)$$

du fait de la linéarité de l'équation 2, on peut en déduire :

$$(\ddot{u}_{asm}^p + \ddot{u}_{ssm}^g) + 2\epsilon\omega_o(\dot{u}_{asm}^g + \dot{u}_{asm}^p) + \omega_o^2(u_{ssm}^g + u_{asm}^p) = f/m \quad (4)$$

La fonction $u_{ssm}^g + u_{asm}^p$ est donc bel et bien solution de l'équation avec second membre. Mais s'agit-il pour autant de *la solution générale* ? On devra malheureusement ici l'admettre, car cela fait appel à des notions d'algèbre sortant du cadre de ce cours.

2 Oscillations libres

On s'intéresse ici à la résolution de l'équation 2 sans second membre :

$$\ddot{u} + 2\epsilon\omega_o\dot{u} + \omega_o^2u = 0 \quad (5)$$

En l'absence du forçage, et en négligeant le terme d'amortissement (i.e. $\epsilon = 0$), cette équation prend la forme $\ddot{u} = -\omega_o^2u$ dont la solution est simplement la somme d'un cosinus et d'un sinus. Ce système *conservatif* (puisqu'il ne compte que des force conservatives) oscille donc indéfiniment car son énergie mécanique est conservée. De plus, il oscille toujours à la même pulsation (ou la même fréquence), quelle que soit l'amplitude des oscillations. Un tel système est un *oscillateur harmonique*.

En revanche, les oscillations du système réel (i.e. $\epsilon \neq 0$) sont *amorties* car l'énergie mécanique se dissipe dans les frottements. Les oscillations libres seront donc d'amplitude décroissante au cours du temps, et s'opèreront à une pulsation a priori différente de la pulsation propre. À cause du terme d'amortissement, les oscillations libres sont *transitoires*, c'est à dire qu'elles s'atténuent au cours du temps. Voyons comment elles s'expriment.

2.1 Solution générale

On cherche ici à résoudre une *équation différentielle linéaire à coefficients constants, sans second membre* :

$$\sum_{i=0}^N a_i u^{(i)} = 0, \text{ avec } a_i \in \mathbb{R} \text{ et } u^{(i)} = \frac{d^i u}{dt^i} \quad (6)$$

On peut montrer que l'espace des solutions d'une telle équation est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension N . Une méthode astucieuse pour trouver facilement ces solutions consiste à supposer que les solutions recherchées sont des *fonctions d'une variable complexe*, ce qui équivaut à "agrandir" l'espace de recherche

des solutions. Néanmoins, les fonctions u recherchées *in fine* sont bel et bien *réelles*. Il faudra donc, une fois qu'on aura identifié des solutions complexes \underline{u} de l'équation 6, prendre la partie réelle de ces solutions. En effet, il est aisé de montrer que, puisque les coefficients a_i sont réels, si la fonction complexe \underline{u} est solution de l'équation 6, alors sa partie réelle et sa partie imaginaire sont toutes deux (séparément) solutions de cette même équation.

La connaissance de N solutions (complexes) indépendantes Φ_j , avec $j \in [1, N]$, permet ainsi de décomposer toute solution sur la base des fonctions ainsi créée : $u(t) = \sum_{j=0}^N \beta_j \Phi_j(t)$. Les coefficients β_j sont déterminés par les conditions initiales. On va chercher les solutions Φ_j sous la forme exponentielle complexe, i.e. de type e^{rt} , avec $r \in \mathbb{C}$. On peut montrer que si on trouve N fonctions distinctes de cette forme (c'est à dire associées à des r_1, \dots, r_N distincts), alors ces fonctions exponentielles sont indépendantes (on ne peut décomposer aucune de ces fonctions comme une combinaison linéaire des autres), et elles forment alors une base de l'espace vectoriel des solutions.

En injectant ces fonctions e^{rt} et leurs dérivées successives dans l'équation 6, puis en simplifiant par e^{rt} ($\neq 0, \forall t$), on aboutit à l'équation caractéristique :

$$\sum_{i=0}^N a_i r^i = 0 \quad (7)$$

Il s'agit d'une équation polynômiale de degré N . Elle admet N racines complexes dans \mathbb{C} , c'est à dire qu'il existe N nombres complexes r_1, \dots, r_N vérifiant cette équation¹.

Dans le cadre que nous nous sommes fixé, on a $N = 2$. Il faut donc chercher les racines de $a_2 r^2 + 2a_1 r + a_0 = 0$ (un facteur 2 a été introduit, sans perte de généralité), c'est à dire :

$$r^2 + 2\epsilon\omega_o r + \omega_o^2 = 0, \text{ avec les conditions initiales } \begin{cases} u(t=0) = u(0) = u_o \\ \dot{u}(t=0) = \dot{u}(0) = \dot{u}_o \end{cases} \quad (8)$$

Pour résoudre une équation polynômiale du second degré, il faut d'abord calculer le discriminant réduit Δ' :

$$\Delta' = (a_1^2/4 - a_2 a_0) = (\epsilon\omega_o)^2 - \omega_o^2 = \omega_o^2(\epsilon^2 - 1) \quad (9)$$

Les solutions r_1 et r_2 de cette équation sont de la forme :

$$r_{1,2} = \frac{-a_1/2 \pm \sqrt{\Delta'}}{a_2} = -\epsilon\omega_o \pm \sqrt{\omega_o^2(\epsilon^2 - 1)} \quad (10)$$

On sait que le signe de Δ' , et donc la valeur de ϵ , conditionne l'ensemble dans lequel se trouveront les solutions de l'équation. Si $\epsilon > 1$, alors $\Delta' > 0$, et les racines de l'équation 8 seront réelles. En revanche, si $\epsilon < 1$, alors $\Delta' < 0$, et l'équation 10 fera apparaître la racine carrée d'un nombre négatif. Par conséquent, les racines de l'équation 8 seront complexes. Si $\epsilon = 1$, alors $\Delta' = 0$, et la racine est double (et réelle).

Finalement, en notant $\alpha^2 = \omega_o^2(\epsilon^2 - 1)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} suivant la valeur de ϵ , la solution générale de l'équation caractéristique 8 sera :

$$u(t) = u_1 e^{r_1 t} + u_2 e^{r_2 t} = e^{-\epsilon\omega_o t} (u_1 e^{\alpha t} + u_2 e^{-\alpha t}) \quad (11)$$

On en déduit facilement la solution pour \dot{u} en dérivant cette expression :

$$\dot{u}(t) = e^{-\epsilon\omega_o t} [-\epsilon\omega_o (u_1 e^{\alpha t} + u_2 e^{-\alpha t}) + \alpha u_1 e^{\alpha t} - \alpha u_2 e^{-\alpha t}], \quad (12)$$

où l'on rappelle que α peut être complexe. Les conditions initiales $(u_o; \dot{u}_o)$ imposent alors :

$$\begin{cases} u_1 &= \frac{(\alpha + \epsilon\omega_o)u_o + \dot{u}_o}{2\alpha} \\ u_2 &= \frac{(\alpha - \epsilon\omega_o)u_o - \dot{u}_o}{2\alpha} \end{cases} \quad (13)$$

d'où :

$$u(t) = \frac{e^{-\epsilon\omega_o t}}{2\alpha} [\alpha u_o (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) + (\epsilon\omega_o u_o + \dot{u}_o) (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})], \text{ avec } \alpha \in \mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{R} \quad (14)$$

1. Nous avons donc transformé le problème (difficile) de recherche des solutions d'une équation différentielle en un problème (facile) de recherche des racines d'un polynôme !

2.2 Les régimes d'oscillations libres

Le régime régissant l'évolution du système dépend de la valeur de la constante d'amortissement ϵ .

2.2.1 $\epsilon > 1$: mouvement apériodique

$$r_{1,2} = -\epsilon\omega_o \pm \omega_o \sqrt{(\epsilon^2 - 1)} \in \mathbb{R} \quad (15)$$

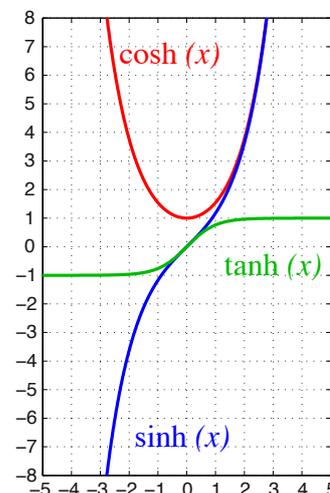
En notant $\sigma = \omega_o \sqrt{\epsilon^2 - 1} \in \mathbb{R}$, il vient :

$$u(t) = \frac{e^{-\epsilon\omega_o t}}{2\sigma} \left[\underbrace{\sigma u_o (e^{\sigma t} + e^{-\sigma t})}_{=2 \cosh \sigma t} + (\epsilon\omega_o u_o + \dot{u}_o) \underbrace{(e^{\sigma t} - e^{-\sigma t})}_{=2 \sinh \sigma t} \right] \quad (16)$$

d'où finalement :

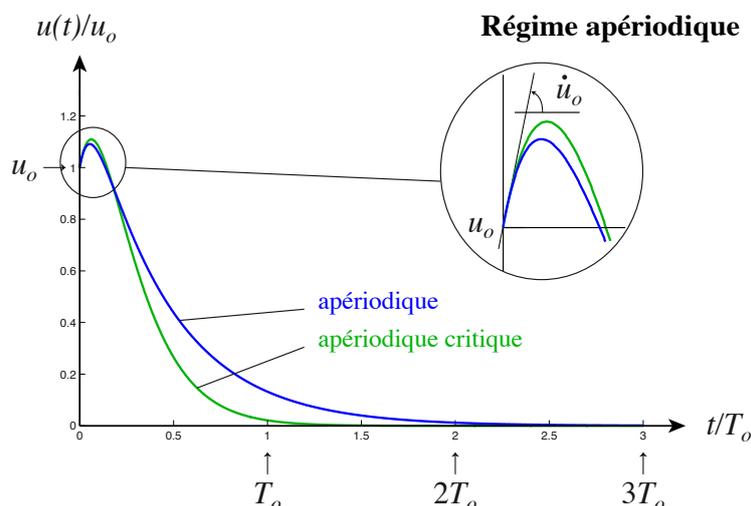
$$u(t) = e^{-\epsilon\omega_o t} \left[u_o \cosh \sigma t + \frac{\dot{u}_o + \epsilon\omega_o u_o}{\sigma} \sinh \sigma t \right] \quad (17)$$

Les fonctions cosh et sinh sont les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, respectivement. Elles sont représentées dans la figure ci-contre.



La réponse est le produit d'une fonction exponentielle décroissante $\{e^{-\epsilon\omega_o t}\}$ tendant vers 0 pour $t \rightarrow +\infty$, et d'une fonction $A\{\cosh \sigma t\} + B\{\sinh \sigma t\}$ qui diverge vers l'infini pour $t \rightarrow +\infty$. Cependant, lorsque

$t \rightarrow +\infty$, on a : $u(t) \propto e^{\omega_o \overbrace{(\sqrt{\epsilon^2 - 1} - \epsilon)}^{<0} t}$. La fonction u est donc "écrasée" par l'exponentielle décroissante en tête de l'équation 17. Cette solution correspond à une diminution exponentielle de l'amplitude de la réponse (courbe en bleu dans la figure ci-dessous). La décroissance est d'un facteur $e \approx 2.7$ au bout d'un temps $T_o/2\pi\epsilon$ avec $T_o = 2\pi/\omega_o$. L'amortissement est tellement fort qu'il n'y a pas d'oscillations. Le temps de retour près de la position d'équilibre ($u \approx 0$) intervient au bout de $T' = T_o/(\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - 1})$.



2.2.2 $\epsilon = 1$: mouvement apériodique critique

$$r = -\epsilon\omega_o = -\omega_o \in \mathbb{R} \quad (18)$$

On admet que la base de solutions est ici ($\phi_1(t) = te^{rt}$; $\phi_2(t) = e^{rt}$) (ce résultat sera démontré dans la

section 4.4.2). On en déduit :

$$u(t) = e^{rt} (\beta_1 t + \beta_2) \Rightarrow \dot{u}(t) = r e^{rt} [(\beta_1 t + \beta_2) + \beta_1] \text{ avec } \begin{cases} \beta_2 = u_o \\ \beta_1 = \dot{u}_o - r u_o \end{cases} \quad (19)$$

donc :

$$u(t) = e^{-\omega_o t} (u_o + (\dot{u}_o + \omega_o u_o) t) \quad (20)$$

Cette solution correspond au temps de retour le plus rapide à la position d'équilibre *sans dépassement* (courbe en vert dans la figure ci-dessus). Ce temps de retour est de l'ordre de T_o .

2.2.3 $\epsilon < 1$: mouvement sinusoïdal amorti

$$r_{1,2} = -\epsilon \omega_o \pm i \sqrt{\omega_o^2 (1 - \epsilon^2)} \in \mathbb{C} \quad (21)$$

On pose $\Omega = \omega_o \sqrt{1 - \epsilon^2}$ (pseudo-pulsation propre) $\Rightarrow \alpha = i\Omega$. D'où :

$$u(t) = \frac{e^{-\epsilon \omega_o t}}{2i\Omega} \left[\underbrace{i\Omega u_o (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})}_{=2 \cos \Omega t} + (\epsilon \omega_o u_o + \dot{u}_o) \underbrace{(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t})}_{=2i \sin \Omega t} \right] \quad (22)$$

d'où finalement² :

$$u(t) = e^{-\epsilon \omega_o t} \left(u_o \cos \Omega t + \frac{\dot{u}_o + \epsilon \omega_o u_o}{\Omega} \sin \Omega t \right), \text{ avec } \Omega = \omega_o \sqrt{1 - \epsilon^2} \quad (23)$$

Puisque $\alpha \cos x + \beta \sin x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(x + \phi)$ avec $\phi = \begin{cases} \arctan \beta/\alpha & \text{si } \alpha > 0 \\ \arctan \beta/\alpha + \pi & \text{sinon} \end{cases}$, on peut mettre l'équation précédente sous la forme :

$$u(t) = e^{-\epsilon \omega_o t} [A \sin(\Omega t + \phi)] \quad (24)$$

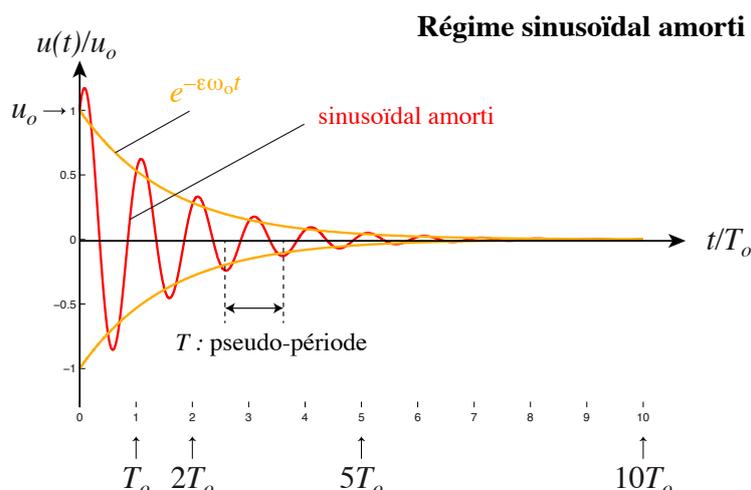
Mettre l'équation précédente sous cette forme peut présenter un intérêt dans le cas où une des deux conditions initiales est nulle ($u_o = 0$ ou $\dot{u}_o = 0$). Cette expression permet en outre de faire clairement ressortir la forme de la réponse, qui correspond à une suite d'oscillations dont l'amplitude décroît exponentiellement (courbe en rouge dans la figure ci-dessous). La décroissance exponentielle est due à une *modulation* de l'amplitude des oscillations (terme entre crochets) induite par le facteur exponentiel $e^{-\epsilon \omega_o t}$ placé en produit devant les crochets (enveloppe orange dans la figure ci-dessous). Lorsque l'amortissement est nul ($\epsilon = 0$), on retrouve la comportement sinusoïdal pur, non amorti, typique d'un oscillateur harmonique.

La solution précédente correspond à l'oscillation amortie du système à la pseudo-période $T = 2\pi/\Omega > T_o$. Plusieurs constantes permettent d'appréhender l'évolution du système :

- le temps caractéristique d'amortissement est $\tau_{1/2} = \ln 2 / \epsilon \omega_o$ (obtenu par : $A e^{-\epsilon \omega_o (t + \tau_{1/2})} = A/2 e^{-\epsilon \omega_o t}$). Au bout de $10 \times \tau_{1/2}$, l'amplitude aura diminué d'un facteur $2^{10} = 1024$.
- le décrement logarithmique est $\log \frac{u_k}{u_{k+1}} = \epsilon \omega_o T = 2\pi\epsilon / \sqrt{1 - \epsilon^2} \approx 2\pi\epsilon$ si $\epsilon \ll 1$.
- le facteur de qualité est $Q = 1/2\epsilon$.
- le pourcentage de dépassement : $\%_{dep} = 100 \times \exp(-\frac{\pi\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}})$. Il ne dépend pas de ω_o .

ϵ	0.1	0.25	0.33	0.5	0.66	0.75	0.86
$\%_{dep}$	73	44	33	16	6	3	0.5

2. En dépit du fait que $r_{1,2} \in \mathbb{C}$, on remarque que la réponse obtenue est bel est bien réelle!



2.2.4 Considérations énergétiques

Du point de vue énergétique, l'amortissement correspond à une dissipation progressive de l'énergie mécanique initiale du système. Pour évaluer la vitesse de décroissance de l'énergie, il suffit de multiplier par \dot{u} l'équation canonique 2. En effet, dans l'équation 2, tous les termes sont homogènes à une force (éventuellement divisée par une masse). Puisque $\dot{u} = \frac{du}{dt}$, la multiplication par \dot{u} équivaut à (1) une multiplication par un déplacement infinitésimal du , ce qui donne un travail ou une énergie, puis (2) une division par un temps infinitésimal dt , ce qui donne une énergie par unité de temps, c'est à dire une puissance :

$$\dot{u}\ddot{u} + 2\epsilon\omega_0\dot{u}^2 + \omega_0^2 u\dot{u} = 0 \quad (25)$$

D'où (en multipliant par m et en rappelant que $\omega_0^2 = k/m$) :

$$\frac{d(\frac{1}{2}m\dot{u}^2)}{dt} + 2m\epsilon\omega_0\dot{u}^2 + \frac{d(\frac{1}{2}ku^2)}{dt} = 0 \quad (26)$$

On reconnaît dans le premier terme l'Énergie Cinétique du système $E_C = \frac{1}{2}m\dot{u}^2$ et dans le dernier terme l'Énergie Potentielle Élastique associée au ressort $E_P = \frac{1}{2}ku^2$.

Le terme intermédiaire correspond à la puissance \mathcal{P}_{frott} dissipée par la force de frottement : $dW_{frott} = F_{frott}.du = b\frac{du}{dt}.du \Rightarrow \mathcal{P}_{frott} = dW_{frott}/dt = 2m\epsilon\omega_0\dot{u}^2$. Finalement, en intégrant par rapport à t :

$$\frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}ku^2 = E_C + E_P = E_M = - \int_t \mathcal{P}_{frott}.dt + cste = -2m\epsilon\omega_0 \int \dot{u}^2 dt + cste \quad (27)$$

où la constante d'intégration peut être identifiée à l'énergie mécanique initialement présente dans le système (soit sous la forme d'une vitesse initiale, soit sous la forme d'une tension du ressort). La décroissance de l'Énergie Mécanique E_M s'effectue en $dE_M/dt = -2m\epsilon\omega_0\dot{u}^2$. Dans le cas du système conservatif ($\epsilon = 0$, oscillateur harmonique), l'Énergie Mécanique E_M demeure constante. Sa valeur moyenne sur une période τ est :

$$\langle E \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{1}{2}m\dot{u}^2 dt + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{1}{2}ku^2 dt = \langle E_C \rangle_\tau + \langle E_P \rangle_\tau \quad (28)$$

Or, si $\epsilon = 0$, alors $\Omega = \omega_0$, d'où (équation 23) :

$$\begin{cases} u(t) = u_o \cos \omega_o t & + & \left(\frac{\dot{u}_o}{\omega_o}\right) \sin \omega_o t \\ \dot{u}(t) = -u_o \omega_o \sin \omega_o t & + & \dot{u}_o \cos \omega_o t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle u^2 \rangle_\tau = \frac{1}{2} \left(u_o^2 + \left(\frac{\dot{u}_o}{\omega_o}\right)^2 \right) \\ \langle \dot{u}^2 \rangle_\tau = \frac{1}{2} \left(u_o^2 \omega_o^2 + \dot{u}_o^2 \right) \end{cases} \quad (29)$$

Sur une période, il y a donc *équipartition des énergies* : $\langle E_C \rangle_\tau = \langle E_P \rangle_\tau = 1/2 \times \langle E_M \rangle_\tau$. Ce résultat remarquable trouve une analogie en thermodynamique dans la théorie cinétique des gaz. Lorsqu'on associe chacun des degré de liberté du système (trois directions de translations pour un gaz monoatomique, auxquelles s'ajoutent les différentes rotations et vibrations pour des gaz pluriatomiques) à une quantité équivalente d'énergie, on peut décrire l'énergie interne du gaz et en déduire la loi des gaz parfaits.

3 Réponse à un forçage quelconque : méthode de Lagrange

A partir de maintenant, nous nous intéresserons à la résolution de l'équation différentielle non homogène (i.e. avec second membre) :

$$\ddot{u} + 2\epsilon\omega_o\dot{u} + \omega_o^2 u = f/m \quad (30)$$

Dans cette section, nous présentons la *méthode de la variation des constantes*, ou *méthode de Lagrange*. Cette méthode générale de résolution des équations différentielles linéaires peut s'appliquer quelle que soit la forme prise par la fonction f . Son principe repose sur la recherche d'une solution particulière de l'équation non homogène en partant de la solution générale de l'équation homogène. On a admis que la solution générale u est de la forme $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, où u_1 est solution du problème homogène (équation 14) et u_2 est solution particulière du problème non homogène. Pour conserver un intérêt pratique, on se limitera dans la suite au cas d'un amortissement faible ($\epsilon < 1$, régime sinusoïdal amorti). On sait que u_1 est alors de la forme (équation 23) :

$$u_1(t) = e^{-\epsilon\omega_o t} [A \cos \Omega t + B \sin \Omega t] , \quad (31)$$

où l'on rappelle que $\Omega = \omega_o \sqrt{1 - \epsilon^2}$ et que les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales.

La méthode de la variation des constantes consiste à chercher u_2 sous la forme :

$$u_2(t) = e^{-\epsilon\omega_o t} \left[\underset{=}{A(t)} \cos \Omega t + \underset{=}{B(t)} \sin \Omega t \right] , \quad (32)$$

c'est à dire à considérer les constantes A et B comme des fonctions de la variable t . Le but est maintenant de trouver la forme de ces fonction $A(t)$ et $B(t)$. Pour cela, on cherchera à exprimer \dot{u}_2 et \ddot{u}_2 en dérivant u_2 deux fois, puis à insérer ces expressions dans l'équation différentielle non homogène, et enfin à essayer d'intégrer cette équation pour exprimer u_2 en fonction des coefficients du problème.

Pour alléger les calculs, on pose d'abord :

$$\begin{cases} C(t) \equiv C = \cos \Omega t \\ S(t) \equiv S = \sin \Omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{C} = -\Omega S \\ \dot{S} = \Omega C \end{cases} \quad (33)$$

On en déduit l'expression de u_2 sous forme compacte³ :

$$u_2(t) = e^{-\epsilon\omega_o t} (AC + BS) \quad (34)$$

En dérivant cette expression une première fois, on obtient :

$$\dot{u}_2(t) = e^{-\epsilon\omega_o t} \left((\dot{A}C + \dot{B}S) + \Omega(-AS + BC) - \epsilon\omega_o(AC + BS) \right) \quad (35)$$

On va devoir maintenant dériver \dot{u}_2 pour dégager l'expression de \ddot{u}_2 . Pour simplifier la résolution, on supposera dans la suite que les fonctions A et B sont telles que $\dot{A}C + \dot{B}S = 0$. Cela revient à restreindre la résolution du problème à un *cas particulier* de conditions initiales. Cela ne pose pas de problème particulier, puisque nous cherchons justement une solution particulière de l'équation homogène. Nous ferons une seconde fois ce type d'hypothèse par la suite. Il faudra cependant prendre garde à ce que les conditions que nous imposons ne soient pas plus nombreuses que les degrés de libertés dont nous disposons dans le choix de la solution particulière.

Commençons par la dérivation des autres termes entre parenthèses dans l'expression ci-dessus :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(-AS + BC) = -\dot{A}S + \dot{B}C + \Omega(-AC - BS) \\ \frac{d}{dt}(AC + BS) = \dot{A}C + \dot{B}S + \Omega(-AS + BC) \end{cases} \quad (36)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_2(t) &= e^{-\epsilon\omega_o t} \left(\Omega(-\dot{A}S + \dot{B}C) + \underbrace{(\epsilon^2\omega_o^2 - \Omega^2)}_{= \omega_o^2(2\epsilon^2 - 1)}(AC + BS) - 2\epsilon\omega_o\Omega(-AS + BC) \right) \\ &= \omega_o^2(2\epsilon^2 - 1) e^{-\epsilon\omega_o t} (AC + BS) - 2\epsilon\omega_o\Omega(-AS + BC) \end{aligned} \quad (37)$$

3. Ne pas oublier que les lettres capitales désignent ici des fonctions !

En reportant u_2 , \dot{u}_2 et \ddot{u}_2 dans l'équation différentielle non homogène, on obtient :

$$\Omega (-\dot{A}S + \dot{B}C) + \omega_o^2 (2\epsilon^2 - 1) (AC + BS) - 2\epsilon\omega_o [\Omega(-AS + BC) - \epsilon\omega_o(AC + BS)] + \omega_o^2(AC + BS) = e^{\epsilon\omega_o t} \frac{f(t)}{m} \quad (38)$$

En manipulant ces expressions, on aboutit à :

$$(AC + BS) [\omega_o^2(2\epsilon^2 - 1) - 2\epsilon^2\omega_o^2 + \omega_o^2] + (BC - AS) [-2\epsilon\omega_o\Omega + 2\epsilon\omega_o\Omega] + \Omega (-\dot{A}S + \dot{B}C) = e^{\epsilon\omega_o t} \frac{f(t)}{m} \quad (39)$$

Les termes entre crochets s'annulant dans l'expression ci-dessus, on obtient finalement :

$$-\dot{A}S + \dot{B}C = \frac{f(t)}{m\Omega} e^{\epsilon\omega_o t} \quad (40)$$

Or, d'après la condition $\dot{A}C + \dot{B}S = 0$ imposée plus haut, on déduit que $\dot{A}C^2 + \dot{B}CS = 0$ après multiplication par C . En multipliant par S cette dernière équation, on obtient :

$$\dot{A}S^2 + \dot{A}C^2 + \frac{f(t)}{m\Omega} e^{\epsilon\omega_o t} S = \dot{A} \underbrace{(S^2 + C^2)}_{=1} + \frac{f(t)}{m\Omega} e^{\epsilon\omega_o t} S = 0 \Rightarrow \dot{A} = -\frac{f(t)}{m\Omega} e^{\epsilon\omega_o t} \sin \Omega t \quad (41)$$

De même, en repartant de $(\dot{A}C + \dot{B}S) \times S = 0$, on obtient une expression similaire pour \dot{B} :

$$\dot{B} = +\frac{f(t)}{m\Omega} e^{\epsilon\omega_o t} \cos \Omega t \quad (42)$$

On peut maintenant injecter les expressions de $A \equiv \int \dot{A}d\tau$ et $B \equiv \int \dot{B}d\tau$ dans l'expression initiale de u_2 . Cependant, il faut prendre garde à ne pas oublier les constantes d'intégration. Pour simplifier, on supposera : $A_o = A(t = 0) = 0$, ce qui permet d'écrire : $\int_0^t \dot{A}(\tau)d\tau = A(t) - A(0) = A(t)$. De même, on suppose $B_o = 0$. Ces deux hypothèses reviennent à imposer deux conditions supplémentaires sur les fonction A et B (en plus de la condition $\dot{A}C + \dot{B}S = 0$ imposée au début).

On peut donc écrire :

$$u_2(t) = \frac{e^{-\epsilon\omega_o t}}{m\Omega} \left[\int_0^t [-\cos(\Omega\tau)f(\tau)e^{\epsilon\omega_o\tau} \sin(\Omega\tau) + \sin(\Omega\tau)f(\tau)e^{\epsilon\omega_o\tau} \cos(\Omega\tau)] d\tau \right] \quad (43)$$

En utilisant l'identité trigonométrique $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$, on peut regrouper les termes à l'intérieur de l'intégrale :

$$u_2(t) = \frac{e^{-\epsilon\omega_o t}}{m\Omega} \int_0^t f(\tau)e^{\epsilon\omega_o\tau} \sin(\Omega(t - \tau))d\tau \quad (44)$$

Finalement, la solution générale de l'équation non homogène, dite *solution de Duhamel*, est :

$$u(t) = \underbrace{e^{-\epsilon\omega_o t} \left(u_o \cos \Omega t + \frac{\dot{u}_o + \epsilon\omega_o u_o}{\Omega} \sin \Omega t \right)}_{u_1 : \text{régime transitoire}} + \underbrace{\int_0^t \frac{f(\tau)}{m\Omega} e^{-\epsilon\omega_o(t-\tau)} \sin(\Omega(t - \tau))d\tau}_{u_2 : \text{régime permanent}} \quad (45)$$

On reconnaît dans la deuxième intégrale un *produit de convolution*⁴ entre la fonction de forçage f et une fonction $u_{\mathcal{D}}(t) = \frac{\mathcal{H}(t)}{m\Omega} e^{-\epsilon\omega_o t} \sin \Omega t$, où \mathcal{H} est la fonction de Heaviside, ou fonction échelon (définie ci-dessous). On verra en section 4 que la fonction $u_{\mathcal{D}}$ est la *réponse impulsionnelle unitaire* du système. Cette réponse à une forme particulière de forçage se révélera donc d'un intérêt important pour déterminer la réponse du système à toute forme de forçage.

4. Le produit de convolution entre deux fonctions f et g est défini par :

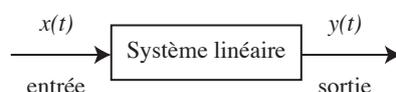
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t).g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).g(x - t)dt \Rightarrow f * g = g * f \quad (46)$$

4 Réponse impulsionnelle ou indicielle : transformée de Laplace

4.1 Objectifs et intérêt

On s'intéresse ici à la réponse du système lorsque celui-ci est initialement au repos et qu'on vient le perturber à partir de la date $t = 0$ en introduisant un forçage impulsionnel (le forçage est une fonction de Dirac) ou indiciel (le forçage est une fonction de Heaviside ou fonction échelon). Le système sera alors instantanément dévié de sa position d'équilibre initiale. Il oscillera alors de manière à se rétablir dans cette position initiale (forçage impulsionnel) ou dans une nouvelle position d'équilibre dans laquelle la résultante des forces sera nulle (forçage indiciel). Jusqu'au moment du rétablissement d'un équilibre, le système oscille de façon "libre".

Les oscillations libres du système en réponse à ce type de forçage peuvent être analysées en considérant le système linéaire comme une "boîte noire" (figure ci-dessous) dont on connaît l'entrée $x(t)$ et dont on voudrait pouvoir prévoir la sortie $y(t)$ en n'ayant à effectuer qu'une opération simple (pour notre système du second ordre, $x \equiv f$ et $y \equiv u$).



La représentation d'un tel système linéaire sous forme d'une équation différentielle peut s'écrire :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_0 x(t) + \dots + b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \quad (47)$$

4.2 Définition et propriétés de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace permet de relier entre elles les dérivées successives des fonctions x (ou y) et ainsi de pouvoir factoriser l'expression ci-dessus. Autrement dit, la transformée de Laplace transforme, de manière équivalente, une équation différentielle en une équation algébrique (polynômiale dans notre cas). De manière analogue à la résolution de l'équation homogène (section 2), la recherche des solutions de l'équation différentielle se ramène alors au problème plus simple de la recherche des racines d'un ou de plusieurs polynômes.

On définit la transformée de Laplace F d'une fonction f par⁵ :

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad , \text{ avec } p \in \mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{R} \quad (48)$$

On peut montrer que la fonction $F(p)$ existe en général (i.e. quelles que soient les propriétés de continuité ou de convergence de f) pour $\Re(p)$ assez grand.

Ce type de transformation vérifie un certain nombre de propriétés :

- *linéarité* : $\mathcal{L}[f_1 + f_2] = \mathcal{L}[f_1] + \mathcal{L}[f_2]$; $\mathcal{L}[a \cdot f] = a \cdot \mathcal{L}[f]$
- *retard* : $\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-\tau p} F(p)$
- *dérivation* : $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$
- *intégration* : $g(t) = \int_0^{+\infty} f(t) dt \Rightarrow G(p) = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}$

Dans les expressions ci-dessus, les termes $f(0^+)$ et $g(0^+)$ rappellent l'importance de ne pas oublier les constantes d'intégration, puisque la définition même de la transformation de Laplace implique de calculer une intégrale afin de passer du domaine temporel au domaine de Laplace (équation 48). Ces constantes

5. Il s'agit ici de la transformée de Laplace monolatérale, car la borne inférieure de l'intégrale est égale à 0. Lorsqu'elle s'applique à des fonctions causales (i.e. telles que $f(t) = 0$ pour $t < 0$), il est équivalent de considérer une borne inférieure égale à $-\infty$ (transformée de Laplace bilatérale).

d'intégration sont obtenues à partir des conditions initiales.

Les transformées de quelques fonctions usuelles sont données dans le tableau ci-dessous.

$\mathcal{L}[K] = \frac{K}{p}$	$\mathcal{L}[Kt] = \frac{K}{p^2}$	$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{p+a}$	$\mathcal{L}[1 - e^{-t/\tau}] = \frac{1}{p(1+p\tau)}$	$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$	$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$	$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

Grâce notamment à la propriété de dérivation de la transformée de Laplace, on peut dès lors appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle 47 :

$$a_n p^n Y(p) + a_{n-1} p^{n-1} Y(p) + \dots + a_0 Y(p) = b_0 X(p) + \dots + b_m p^m X(p) \quad (49)$$

Il est maintenant possible de factoriser ces expressions par $Y(p)$ et $X(p)$, de collecter ces fonctions dans le même terme, et de les séparer ainsi de la variable p :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{j=0}^n a_j p^j} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{racines du numérateur : } m \text{ pôles} \\ \text{racines du dénominateur : } n \text{ zéros} \end{array} \quad (50)$$

La fonction H est la *fonction de transfert* du système. Son intérêt est très important : si l'on est capable de l'identifier ou de l'exprimer, il suffit de la multiplier par la transformée de Laplace de la fonction de forçage pour obtenir la transformée de Laplace de la réponse du système. On voit que l'opération de convolution dans le domaine "réel" au sein de la solution générale de l'équation différentielle non homogène (équation 45) est remplacée par une simple multiplication dans le domaine de Laplace :

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g] \quad (51)$$

Cette propriété très utile se retrouvera pour l'analyse harmonique où l'on utilisera la transformée de Fourier, analogue de la transformée de Laplace dans le domaine fréquentiel (section 5).

4.3 Calcul pratique de la transformée de Laplace inverse

Les transformées usuelles données ci-dessus font nettement apparaître la propriété qu'à la transformée de Laplace de faire émerger des polynômes ou des rapports de polynômes (fonctions rationnelles), et pas uniquement lorsqu'on calcule des transformées de dérivées. Il est donc particulièrement utile de savoir calculer la transformée inverse des fonctions rationnelles. D'autant plus que dans le cas d'un système linéaire, comme on vient de le voir, la forme de la fonction de transfert est une fonction rationnelle. La méthode de transformation inverse d'une fonction rationnelle consiste à la décomposer comme une série de fonction rationnelles de degrés plus faibles (*décomposition en éléments simples*). Les transformées usuelles données ci-dessous peuvent alors être aisément identifiées pour chaque terme de la somme et ensuite renversées afin de remonter à la transformée inverse totale.

Ainsi, en considérant une fonction rationnelle de degré 2 :

$$F(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2} \quad (52)$$

Il est possible de décomposer cette fonction sous la forme :

$$F(p) = \frac{A_0}{p} + \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{p + a_i} + \sum_{j=1}^l \frac{A_j}{(p + a_j)^2 + \omega_j^2} + \sum_{j=1}^l \frac{B_j(p + a_j)}{(p + a_j)^2 + \omega_j^2} \quad (53)$$

Par exemple :

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+5)(p+10)} = \frac{A}{p+5} + \frac{B}{p+10} = \frac{Ap+10A+Bp+5B}{(p+5)(p+10)} \quad (54)$$

D'où :

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 10A+5B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-3/5 \\ B=8/5 \end{cases} \Rightarrow F(p) = \frac{-3/5}{p+5} + \frac{8/5}{p+10} \Rightarrow f(t) = -\frac{3}{5}e^{-5t} + \frac{8}{5}e^{-10t} \quad (55)$$

4.4 Application au système linéaire de second ordre

4.4.1 Méthode

Recadrons maintenant la discussion autour du cas de l'équation différentielle linéaire du second ordre non homogène qui nous intéresse. Par commodité, l'équation différentielle canonique (équation 30) peut être légèrement remaniée pour être mise sous la forme :

$$\frac{1}{\omega_o^2} \ddot{u} + \frac{2\epsilon}{\omega_o} \dot{u} + u = Kf \tag{56}$$

où K est le gain statique ($K = \frac{1}{m\omega_o^2}$). La fonction de transfert s'écrit alors :

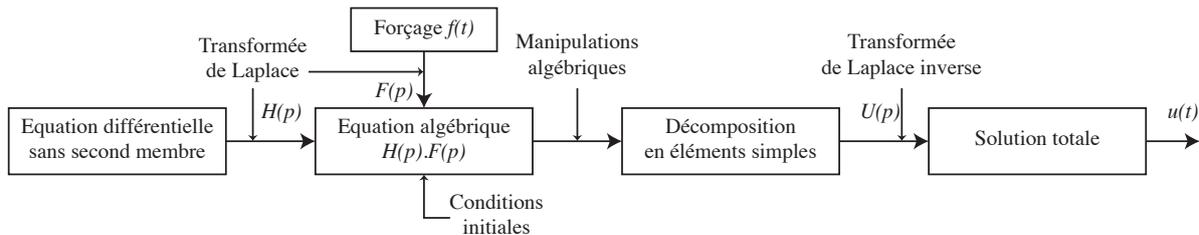
$$H(p) = \frac{U(p)}{F(p)} = \frac{1}{1 + \frac{2\epsilon}{\omega_o}p + \frac{1}{\omega_o^2}p^2} = \frac{\omega_o^2}{\omega_o^2 + 2\epsilon\omega_o p + p^2} \tag{57}$$

La décomposition de H , qui dépend de la nature complexe ou réelle des racines de son dénominateur (les pôles), est conditionnée par la valeur de la constante d'amortissement ϵ :

- si $\epsilon > 1$: régime aperiodique sans dépassement : $H(p)$ possède 2 pôles réels distincts : $p_{1,2} = \omega_o(\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 1}) \Rightarrow H(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$ avec $T_1 = \frac{-1}{p_1}$ et $T_2 = \frac{-1}{p_2}$.
- si $\epsilon = 1$: régime aperiodique critique : $H(p)$ possède 1 pôle réel double $p_o \Rightarrow H(p) = \frac{K}{(1 + T_o p)^2}$ avec $T_o = \frac{-1}{p_o} = \frac{1}{\omega_o}$.
- si $\epsilon < 1$: régime oscillatoire avec dépassement : $H(p)$ possède 2 pôles complexes conjugués : $p_{1,2} = \omega_o(-\epsilon \pm i\sqrt{1 - \epsilon^2}) = -\epsilon\omega_o \pm i\Omega$ avec $\Omega = \omega_o\sqrt{1 - \epsilon^2}$ (d'où $p_2 = \overline{p_1}$).

À présent que la fonction de transfert H a été caractérisée, il est possible de déterminer la réponse du système à n'importe quelle type de forçage en procédant en trois étapes (voir figure ci-dessous) :

1. à partir de la fonction de forçage f , calcul de la transformée de Laplace F ,
2. multiplication de F par la fonction de transfert H , obtention de la transformée de Laplace U de la réponse du système : $U = H.F$,
3. à partir de U , calcul de la transformée de Laplace inverse u .



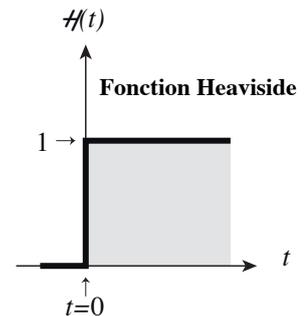
Nous étudierons dans la suite deux types de forçages d'intérêt particulier.

4.4.2 Réponse indicielle

On considère ici un forçage de type échelon ou Heaviside, c'est à dire de la forme $f(t) = F_o \cdot \mathcal{H}(t)$ où F_o est une constante. La "fonction" de Heaviside est définie par :

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \tag{58}$$

On en déduit la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = F_o/p$. La réponse du système sera (dans le domaine de Laplace) différente selon la valeur de ϵ :



— si $\epsilon > 1$:

$$\begin{aligned}
 U(p) &= \frac{KF_o}{p(1+T_1p)(1+T_2p)} \\
 &= \frac{A}{p} + \frac{B}{1+T_1p} + \frac{C}{1+T_2p} \quad \text{avec, par identification :} \quad \begin{cases} A = KF_o \\ B = \frac{KF_o T_1^2}{T_2 - T_1} \\ C = \frac{-KF_o T_2^2}{T_2 - T_1} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{59}$$

En inversant les transformées de fonctions usuelles (voir tableau ci-dessus), on aboutit à :

$$u(t) = KF_o + \frac{KF_o}{T_2 - T_1} \left[T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2} \right] \tag{60}$$

— si $\epsilon = 1$:

$$U(p) = \frac{KF_o}{p(1+T_o p)^2} \Rightarrow u(t) = KF_o \left[1 - e^{-t/T_o} - \frac{t}{T_o} e^{-t/T_o} \right] \quad \text{avec } T_o = \frac{1}{\omega_o} \tag{61}$$

On retrouve ici la décomposition admise dans la section 2.2.2.

— si $\epsilon < 1$, en réutilisant le résultat précédent ($p_1 = -\epsilon\omega_o + i\omega_o\sqrt{1-\epsilon^2}$) :

$$\begin{aligned}
 U(p) &= \frac{KF_o \omega_o^2}{p(p-p_1)(p-\bar{p}_1)} = \frac{KF_o \omega_o^2}{p \left(\underbrace{\omega_o^2}_{p_1 \bar{p}_1 = |p_1|^2} + \underbrace{2\epsilon\omega_o}_{-(p_1 + \bar{p}_1)} p + p^2 \right)} = \frac{KF_o \omega_o^2}{p \underbrace{(\omega_o^2 + 2\epsilon\omega_o p + p^2)}_{(p+\epsilon\omega_o)^2 + \omega_o^2(1-\epsilon^2)}} \\
 &= \frac{A}{p} + \frac{B+C(p+\epsilon\omega_o)}{(p+\epsilon\omega_o)^2 + \omega_o^2(1-\epsilon^2)} \quad \text{avec, par identification :} \quad \begin{cases} A = KF_o \\ B = -KF_o \epsilon \omega_o \Rightarrow B' = \frac{-KF_o \epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \\ C = -KF_o \end{cases}
 \end{aligned} \tag{62}$$

D'où :

$$U(p) = \frac{KF_o}{p} - \frac{KF_o \epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \frac{\omega_o \sqrt{1-\epsilon^2}}{(p+\epsilon\omega_o)^2 + \omega_o^2(1-\epsilon^2)} - \frac{KF_o (p+\epsilon\omega_o)}{(p+\epsilon\omega_o)^2 + \omega_o^2(1-\epsilon^2)} \tag{63}$$

Or :

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2} \right] = e^{-at} \sin \omega t \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2} \right] = e^{-at} \cos \omega t \tag{64}$$

Donc :

$$u(t) = KF_o \left[1 - e^{-\epsilon\omega_o t} \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \sin(\omega_o \sqrt{1-\epsilon^2} t) + \cos(\omega_o \sqrt{1-\epsilon^2} t) \right) \right] \tag{65}$$

Or, puisque $\alpha \sin x + \beta \cos x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(x + \phi)$ avec $\phi = \arctan \beta/\alpha$:

$$\boxed{u(t) = F_o u_{\mathcal{H}}(t) = KF_o \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} e^{-\epsilon\omega_o t} \sin(\omega_o \sqrt{1-\epsilon^2} t + \phi) \right]} \quad \text{avec } \phi = \arctan \left(\frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon} \right) \tag{66}$$

où $u_{\mathcal{H}}$ est la réponse indicielle unitaire du système.

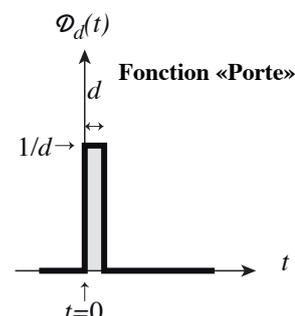
4.4.3 Réponse impulsionnelle

On s'intéresse ici à un forçage de type impulsionnel ou Dirac : $f(t) = F_o \mathcal{D}(t)$ où F_o est une constante. La "fonction" de Dirac⁶ est définie par :

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}(t) dt = 1 \quad (67)$$

Une telle fonction peut être obtenue en la considérant comme la limite d'une fonction "porte" \mathcal{D}_d de largeur d et de hauteur $1/d$, avec $d \rightarrow 0$:

$$\mathcal{D}(x) = \lim_{d \rightarrow 0} \mathcal{D}_d(x) \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}_d(x) = \begin{cases} 1/d & \text{si } x \in [0, d] \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad (68)$$



Cette fonction est représentée ci-contre. On vérifie alors la propriété attendue :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{d \rightarrow 0} \mathcal{D}_d(t) dt = \lim_{d \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_d(t) dt = 1 \quad (69)$$

La transformée de Laplace de la fonction f est alors : $\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = F_o$. La réponse à ce type de forçage peut être déterminée en procédant de la même manière que ci-dessus. Cependant, une méthode plus astucieuse consiste à reprendre la solution pour la réponse indicielle, et à la dériver. En effet, on remarque que la transformée de Laplace de la fonction de Dirac est égale à p fois la transformée de Laplace de la fonction de Heaviside :

$$\mathcal{L}[\mathcal{D}] = p \cdot \mathcal{L}[\mathcal{H}] \quad (70)$$

La raison de cette propriété provient du fait que, dans le domaine temporel, la fonction de Dirac est la dérivée de la fonction de Heaviside. En vertu de notre définition de la fonction de transfert (équation 57), il en est de même pour la réponse impulsionnelle $u_{\mathcal{D}}$ et la réponse indicielle $u_{\mathcal{H}}$:

$$\mathcal{U}_{\mathcal{H}} = H \cdot \mathcal{L}[\mathcal{H}] = \frac{1}{p} \cdot H \cdot \mathcal{L}[\mathcal{D}] = \frac{1}{p} \mathcal{U}_{\mathcal{D}} \Rightarrow u_{\mathcal{D}} = \frac{d}{dt} u_{\mathcal{H}} \quad (71)$$

En dérivant l'équation 66 (pour le régime oscillant amorti), on aboutit finalement à :

$$\begin{aligned} u(t) &= F_o u_{\mathcal{D}}(t) = K F_o \frac{\omega_o}{\sqrt{1-\epsilon^2}} e^{-\epsilon \omega_o t} \sin(\omega_o \sqrt{1-\epsilon^2} t) \\ &= \frac{F_o}{m \Omega} e^{-\epsilon \omega_o t} \sin(\Omega t) \quad \text{car} \quad \begin{cases} \Omega &= \omega_o \sqrt{1-\epsilon^2} \\ K &= \frac{1}{m \omega_o^2} \end{cases} \end{aligned} \quad (72)$$

où $u_{\mathcal{D}}$ est la réponse impulsionnelle unitaire du système. Cette réponse est particulièrement importante puisqu'elle permet de dégager directement l'expression de la fonction de transfert $H(p)$. En effet (équation 57) :

$$H(p) = \frac{U(p)}{F(p)} = \frac{\mathcal{L}[F_o \cdot u_{\mathcal{D}}(t)]}{\mathcal{L}[F_o \cdot \mathcal{D}]} = \frac{F_o \cdot \mathcal{L}[u_{\mathcal{D}}(t)]}{F_o \cdot \mathcal{L}[\mathcal{D}]} = \frac{\mathcal{L}[u_{\mathcal{D}}(t)]}{\mathcal{L}[\mathcal{D}]} \quad (73)$$

Or, comme $\mathcal{L}[\mathcal{D}] = 1$, on déduit le résultat important :

$$\boxed{H(p) = \mathcal{L}[u_{\mathcal{D}}(t)]} \quad (74)$$

En d'autres termes, la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle unitaire du système est égale à la fonction de transfert du système. Cette propriété de la réponse impulsionnelle unitaire permet de déterminer la réponse du système à une fonction de forçage $f(t)$ quelconque :

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{L}^{-1}[H(p) \cdot F(p)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}[(\mathcal{L}[u_{\mathcal{D}}(t)]) \cdot F(p)] \\ &= (\mathcal{L}^{-1}[F(p)] * \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[u_{\mathcal{D}}(t)]]) (t) \quad (\text{convolution}) \\ &= (f * u_{\mathcal{D}})(t) \\ u(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) u_{\mathcal{D}}(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (75)$$

6. En toute rigueur, la "fonction" de Dirac n'est pas une fonction, mais une *distribution*. Il s'agit d'un objet mathématique plus général, qui peut être très "rugueux" (discontinu) tout en restant intégrable presque partout.

On retrouve ainsi le résultat énoncé dans l'équation 45 : lorsque les conditions initiales sont nulles, la réponse du système est égale à la convolution de la fonction de forçage f et de la réponse impulsionnelle unitaire du système $u_{\mathcal{D}}$. Il est donc possible de déterminer la réponse du système à n'importe quelle forme de forçage si l'on est capable de déterminer la réponse impulsionnelle unitaire. Cette dernière peut être obtenue analytiquement, numériquement ou expérimentalement. Cette approche est utilisée en *analyse modale*, discipline consistant à calculer la réponse du système à une perturbation quelconque (par exemple les ondes sismiques secouant un bâtiment au cours d'un tremblement de terre) en mesurant ou en modélisant les caractéristiques fondamentales de la réponse impulsionnelle du système. Dans l'hypothèse de linéarité ("petites" déformations), on pourra prédire l'amplitude des oscillations induites par une secousse.

On remarque également une analogie entre la solution générale établie dans le cas des oscillations libres (équation 24) et celle qu'on vient de dégager pour le cas d'un forçage impulsionnel (équation 72). On peut en effet interpréter la réponse impulsionnelle comme un analogue du régime d'oscillations libres dans lequel les conditions initiales non nulles ($u(0) = u_o ; \dot{u}(0) = \dot{u}_o$) et le forçage nul ($f = 0$) sont remplacés par une perturbation initiale non nulle intervenant pendant un temps infiniment court de durée d ($f = F_o \mathcal{D}$) après des conditions initialement nulles ($u(0) = 0 ; \dot{u}(0) = 0$). En remplaçant la fonction de forçage impulsionnelle dans l'équation canonique (équation 30 : $\ddot{u} + 2\epsilon\omega_o \dot{u} + \omega_o^2 u = F_o \mathcal{D}/m$), il est aussi possible d'évaluer les conditions initiales "équivalentes" ($u(0) = u_o^{eq} ; \dot{u}(0) = \dot{u}_o^{eq}$) induites par le forçage impulsionnel en calculant les intégrales de chaque terme de l'équation canonique pendant le temps court d :

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow 0} \int_0^d u(t) dt &= 0 \\ \lim_{d \rightarrow 0} \int_0^d \dot{u}(t) dt &= \lim_{d \rightarrow 0} [u(t)]_0^d = 0 &= u_o^{eq} \\ \lim_{d \rightarrow 0} \int_0^d \ddot{u}(t) dt &= \lim_{d \rightarrow 0} [\dot{u}(t)]_0^d = \dot{u}(d) &= \dot{u}_o^{eq} \\ \lim_{d \rightarrow 0} \int_0^d \frac{F_o \mathcal{D}(t)}{m} dt &= \frac{F_o}{m} \lim_{d \rightarrow 0} \int_0^d \mathcal{D}(t) dt = \frac{F_o}{m} \end{aligned} \quad (76)$$

Finalement, les conditions initiales équivalentes sont : $\begin{cases} u_o^{eq} = 0 \\ \dot{u}_o^{eq} = F_o/m \end{cases}$.

5 Régime permanent périodique : série de Fourier

Dans cette section, on s'intéresse à la réponse permanente du système à un forçage *périodique*, c'est à dire pour une fonction de forçage se répétant dans le temps avec une certaine période T . On montrera que, grâce à la *transformée de Fourier*, il est possible de décomposer cette réponse en une somme (infinie) de réponses *harmoniques*, dont chacune peut être aisément déterminée. On étudiera donc dans un premier temps la réponse harmonique, avant de présenter le développement en série de Fourier et son application à la détermination de la réponse permanente à un forçage périodique quelconque.

5.1 Régime permanent harmonique

On considère ici un forçage de type *harmonique*, c'est à dire un forçage décrit par une fonction sinus ou cosinus du temps, évoluant à la pulsation ω :

$$f(t) = F_o \cos \omega t = \Re (F_o e^{i\omega t}) = \Re (f(t)) \quad (77)$$

où f est la partie réelle (\Re) de la fonction complexe f^7 . Comme pour tout type de forçage, la réponse du système sera la superposition d'une composante transitoire et d'une composante permanente. Au bout d'un temps suffisamment long, la partie oscillante de la composante transitoire est tellement atténuée qu'il n'est plus nécessaire d'en tenir compte. Reste seulement le régime permanent forcé, qui est nécessairement

7. On rappelle que si $x(t)$ est une fonction harmonique, elle peut être écrite sous la forme réelle $x(t) = X \cos(\omega t + \phi)$, où X est l'amplitude réelle et ϕ la phase à l'origine. On peut aussi définir une représentation complexe de la fonction x sous la forme $\underline{x}(t) = \underline{X} e^{i\omega t}$, où \underline{X} est l'amplitude complexe de x . On a alors : $x(t) = \Re (\underline{x}(t))$ et $\underline{X} = X e^{i\phi}$.

caractérisé par des oscillations à la même pulsation que la pulsation des oscillations de forçage. Nous nous plaçons dans ce cadre, et nous ne considérons ici que la composante permanente.

Dès lors, ce n'est plus l'évolution temporelle détaillée de la réponse qui nous intéresse. En effet, on sait déjà que celle-ci est sinusoïdale, comme le forçage. On sait aussi, du fait de la linéarité des équations régissant le problème, que l'amplitude des oscillations est proportionnelle à l'amplitude du forçage (toutes choses étant égales par ailleurs). Nous chercherons plutôt à savoir si le système oscillera avec plus ou moins d'amplitude selon la pulsation de forçage. On sera en particulier intéressé par la mise en évidence de résonances éventuelles. De plus, on cherchera à déterminer si les oscillations résultantes sont plus ou moins en retard ("déphasées") par rapport à l'excitation.

Puisqu'on recherche ici une solution harmonique, on choisit de chercher la réponse sous la forme :

$$u(t) = U \cos(\omega t + \phi) = \Re(\underline{U}e^{i\omega t}) = \Re(Ue^{i(\omega t + \phi)}) \Rightarrow \underline{U} = Ue^{i\phi} \quad (\text{amplitude complexe}) \quad (78)$$

Les propriétés de dérivation des représentations complexes ($\dot{u} = i\omega u$; $\ddot{u} = -\omega^2 u$) permettent de grandement simplifier l'équation canonique initiale (équation 2) :

$$(-\omega^2 \underline{U} + 2i\epsilon\omega\omega_o \underline{U} + \omega_o^2 \underline{U}) e^{i\omega t} = \left(\frac{F_o}{m}\right) e^{i\omega t} \quad (79)$$

ce qui donne, après regroupement des termes en \underline{U} :

$$\underline{U}(\omega) = \frac{F_o/m}{\omega_o^2 - \omega^2 + 2i\epsilon\omega\omega_o} \quad (80)$$

On remarque que $\underline{U}(\omega) \equiv H(i\omega)$ (équation 57), à un facteur réel $\times \frac{1}{K} \frac{F_o}{m\omega_o^2}$ près. Cette équivalence résulte directement des propriétés de dérivation analogues pour la transformée de Laplace d'une part (section 4.2) et la représentation complexe des fonctions harmoniques d'autre part.

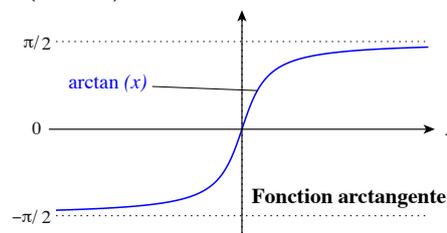
En introduisant la pulsation réduite : $s = \frac{\omega}{\omega_o}$ (> 0), on peut réécrire l'expression précédente :

$$\begin{aligned} \underline{U}(\omega) &= \frac{F_o/m\omega_o^2}{1 + 2i\epsilon s - s^2} \\ &= \frac{F_o/m\omega_o^2[(1 - s^2) - 2i\epsilon s]}{(1 - s^2)^2 + (2\epsilon s)^2} \end{aligned} \quad (81)$$

On peut donc exprimer le module et la phase de la réponse harmonique⁸ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Module : } U(\omega) = |\underline{U}| = (\underline{U}\overline{U})^{1/2} = \frac{F_o/m\omega_o^2}{\sqrt{(1 - s^2)^2 + (2\epsilon s)^2}} \\ \text{Phase : } \phi(\omega) = \arg(\underline{U}) = -\arctan\left(\frac{2\epsilon s}{1 - s^2}\right) \quad [\text{modulo } \pi] \end{array} \right. \quad (82)$$

On remarque que la phase ϕ est déterminée à un modulo π près. Afin de lever l'ambiguïté sur ce modulo, on choisira de définir ϕ dans l'intervalle $[0, -\pi]$ uniquement. On impose la condition $\phi < 0$ dans le but d'assurer la causalité de la réponse. En effet, puisque la réponse et le forçage s'écrivent respectivement $u(t) = U \cos(\omega t + \phi)$ et $f(t) = F_o \cos(\omega t)$, il est nécessaire de choisir $\phi < 0$ pour que le forçage imposé en entrée précède dans le temps la réponse obtenue en sortie⁹. Or, la phase est donnée par l'opposé d'une arctangente. La fonction arctangente est définie sur \mathbb{R} et renvoie des valeurs dans l'intervalle $[-\pi/2; \pi/2]$ (figure ci-contre). Afin de respecter la condition de causalité, il faut donc prendre garde à retrancher π



8. Le module et la phase sont bien des fonctions dépendant de la pulsation ω !

9. La notion de causalité peut ici apparaître obscure, étant donné que nous sommes en régime permanent, ce qui implique qu'on a perdu l'information transitoire associée au démarrage du système. On ne sait plus vraiment qui a commencé !

à la phase lorsque la fonction arctangente renvoie des valeurs négatives (i.e. pour $s < 1$).

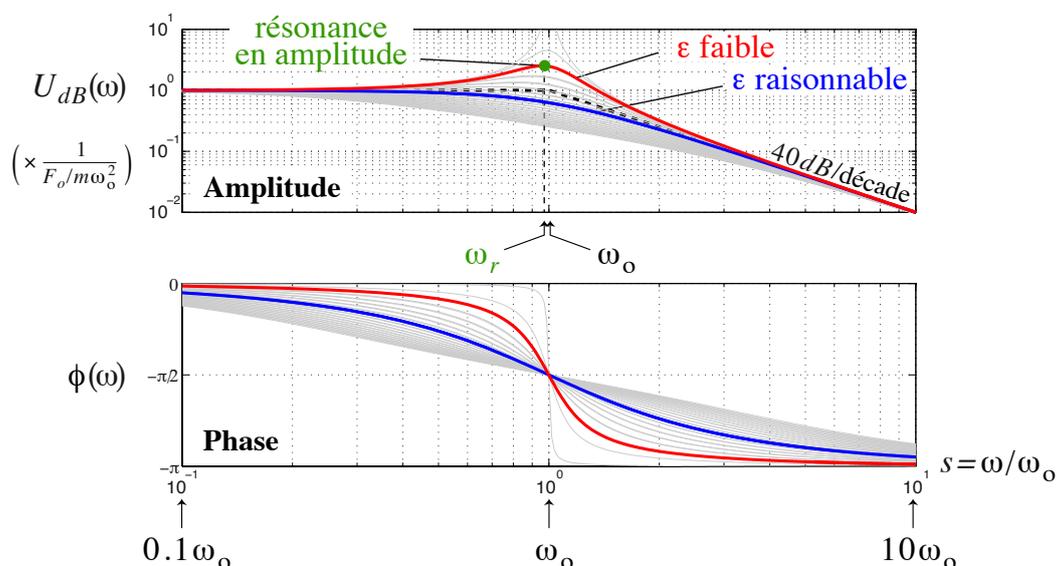
On peut désormais procéder à une *recherche asymptotique* afin de déterminer la réponse du système en fonction de la pulsation de forçage ω . Pour cela, il faut étudier les variations des fonction $U(\omega)$ et $\phi(\omega)$:

- *Basse fréquence* : $\omega \ll \omega_o \Rightarrow s \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} U \rightarrow \frac{F_o}{m\omega_o^2} \\ \phi \rightarrow 0^- \Rightarrow \text{en phase} \end{cases}$
- *Haute fréquence* : $\omega \gg \omega_o \Rightarrow s \gg 1 \Rightarrow \begin{cases} U \rightarrow 0 \Rightarrow \text{amplitude de la réponse nulle} \\ \tan(\phi) \rightarrow 0 \Rightarrow \phi \rightarrow -\pi \Rightarrow \text{en opposition de phase} \end{cases}$
- *Autour de la fréquence propre* : $\omega \approx \omega_o \Rightarrow s \rightarrow 1 \Rightarrow \begin{cases} U \rightarrow \frac{F_o/m\omega_o^2}{2\epsilon} \\ \phi \rightarrow -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{en quadrature de phase} \end{cases}$

— *U admet-elle un maximum ?* : on cherche si la dérivée de U par rapport à ω s'annule.
 $\frac{dU}{d\omega} \propto \frac{d}{ds} [(1-s^2)^2 + (2\epsilon s)^2] \Rightarrow \frac{dU}{d\omega} = 0$ si $s = \sqrt{1-2\epsilon^2} \Rightarrow$ n'existe que si $\epsilon < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$.

La pulsation est alors : $\omega_r = \omega_o \sqrt{1-2\epsilon^2} < \omega_o$. On a $\omega_r \rightarrow \omega_o$ quand $\epsilon \rightarrow 0$.

L'amplitude correspondante est : $U_r = \frac{F_o/m\omega_o^2}{2\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2}} > U(\omega = \omega_o)$. Il s'agit bien d'un maximum, donc d'une *résonance*. La résonance n'existe que pour les amortissements faibles. On a $U_r \rightarrow +\infty$ quand $\epsilon \rightarrow 0$.



On visualise en général la réponse en amplitude et en phase en fonction de la pulsation de forçage dans un diagramme dit "*diagramme de Bode*" (voir figure ci-dessus). Dans cette représentation, la pulsation ω occupe l'axe des abscisses. Elle est échelonnée de façon logarithmique (i.e. on enchaîne régulièrement les pulsations $\omega = 1, 10, 100, 1000, \dots$). L'amplitude U y est aussi représentée sur une échelle logarithmique de base 10. On définit alors le *gain en décibels* : $U_{dB} = 20 \log(U)$. La phase ϕ est représentée sur une échelle linéaire. Dans le diagramme de Bode, les régimes limites basses et hautes fréquences tendent asymptotiquement vers deux droites :

- *Basse fréquence* : $s \ll 1 \Rightarrow U_{dB} = 20 \log(U) \rightarrow 20 \log\left(\frac{F_o}{m\omega_o^2}\right) \Rightarrow$ asymptote horizontale
- *Haute fréquence* : $s \gg 1 \Rightarrow U_{dB} = 20 \log(U) \rightarrow 20 \log\left(\frac{F_o}{m\omega_o^2}\right) - 40 \log(s) \Rightarrow$ asymptote oblique

Les deux asymptotes s'intersectent donc en $s = 1$. On remarque que l'amplitude des oscillations est très atténuée aux hautes fréquences, alors que les basses fréquences sont bien restituées. Il s'agit d'un comportement analogue à celui d'un *filtre passe-bas*.

5.2 Énergie, dispersion et absorption

De ce qui précède, on constate que la réponse du système est *déphasée* de ϕ par rapport au forçage. Sauf dans le cas où $\omega \ll \omega_o$, on a toujours $\phi < 0$, ce qui signifie que la réponse est en retard par rapport au forçage. Dès lors, il est possible de décomposer la réponse du système (en déplacement u ou en vitesse \dot{u}) comme la somme d'un terme *en phase* et d'un autre terme *en quadrature de phase* :

$$\begin{cases} u(t) = U \cos(\omega t + \phi) \\ \dot{u}(t) = -U\omega \sin(\omega t + \phi) \end{cases} \iff \begin{cases} u(t) = U' \cos(\omega t) + U'' \sin(\omega t) \\ \dot{u}(t) = -\omega U' \sin(\omega t) + \omega U'' \cos(\omega t) \end{cases} \quad (83)$$

On va montrer que cette décomposition présente un intérêt pour évaluer le bilan énergétique du système, et en particulier pour calculer la fraction de l'énergie fournie par le système qui sera dissipée par les frottements.

On peut reprendre l'expression de u ci-dessus et la mettre sous la forme exponentielle complexe :

$$u(t) = \Re \{ \underline{U} e^{i\omega t} \} = \Re \{ \underline{U} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \} = \Re \{ \underline{U} \} \cos \omega t - \Im \{ \underline{U} \} \sin \omega t \quad (84)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{U} = U' - iU''} \iff \begin{cases} U' = \Re \{ \underline{U} \} = U \cos \phi \\ U'' = -\Im \{ \underline{U} \} = -U \sin \phi \end{cases} \quad (85)$$

On voit donc que l'amplitude de la composante de la réponse qui est en phase avec le forçage est égale à la partie réelle de l'amplitude complexe de la réponse, alors que la partie imaginaire de l'amplitude complexe correspond à (l'opposé de) la composante en quadrature de phase. En repartant de l'expression de l'amplitude complexe \underline{U} (équation 80), on peut trouver les expressions de U' et U'' :

$$\underline{U} = \frac{F_o/m}{\omega_o^2 - \omega^2 + 2i\epsilon\omega\omega_o} = F_o \left(\frac{1}{m(\omega_o^2 - \omega^2) + ib\omega} \right) = F_o \left(\frac{m(\omega_o^2 - \omega^2) - ib\omega}{m^2(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2} \right) \quad (86)$$

où l'on a utilisé les relations $2\epsilon\omega_o = b/m$ et $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$.

D'où :

$$u(t) = F_o \underbrace{\left[\frac{m(\omega_o^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2} \right]}_{U'(\omega)} \cos \omega t + F_o \underbrace{\left[\frac{b\omega}{m^2(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2} \right]}_{U''(\omega)} \sin \omega t \quad (87)$$

Cette décomposition est particulièrement utile pour saisir la réponse du système en fonction de la pulsation du forçage ω . Les cas haute fréquence ($\omega \gg \omega_o$) et basse fréquence ($\omega \ll \omega_o$) ayant déjà été traités dans la recherche asymptotique ci-dessus, nous nous plaçons ici dans le domaine où ω est proche de ω_o , c'est à dire : $|\omega_o - \omega| \ll (\omega_o + \omega) \approx 2\omega_o$. Les expressions de U' et U'' se simplifient alors en :

$$\begin{cases} U'(\omega) = F_o \left[\frac{2m\omega_o(\omega_o - \omega)}{4m^2\omega_o^2(\omega_o - \omega)^2 + b^2\omega^2} \right] \\ U''(\omega) = F_o \left[\frac{b\omega}{4m^2\omega_o^2(\omega_o - \omega)^2 + b^2\omega^2} \right] \end{cases} \quad (88)$$

En introduisant le temps caractéristique de relaxation $\tau = 2m/b$:

$$\begin{cases} U'(\omega) = \frac{F_o}{2m\omega_o} \left[\frac{(\omega_o - \omega)\tau^2}{1 + (\omega_o - \omega)^2\tau^2} \right] = \frac{F_o}{2m\omega_o} D(\omega) \\ U''(\omega) = \frac{F_o}{2m\omega_o} \left[\frac{\tau}{1 + (\omega_o - \omega)^2\tau^2} \right] = \frac{F_o}{2m\omega_o} A(\omega) \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} D(\omega) = \frac{(\omega_o - \omega)\tau^2}{1 + (\omega_o - \omega)^2\tau^2} \\ A(\omega) = \frac{\tau}{1 + (\omega_o - \omega)^2\tau^2} \end{cases} \quad (89)$$

où les fonction D et A sont respectivement nommées la *dispersion* et l'*absorption*. Elles sont représentées dans la figure ci-contre. La signification de ces noms provient de l'analogie qui peut être faite entre le modèle d'oscillateur soumis à un forçage harmonique développé ici, et le modèle de Drude-Lorentz qui décrit la réponse d'une charge soumise au champ électrique oscillant associé au passage d'une onde électromagnétique. Dans le modèle de Drude-Lorentz, la notion de dispersion décrit le fait que les ondes de fréquences (ou bien de couleur) différente se propagent à des vitesses différentes dans un milieu donné. Cependant, la notion de dispersion D n'est pas simple à appréhender dans ce modèle mécanique de

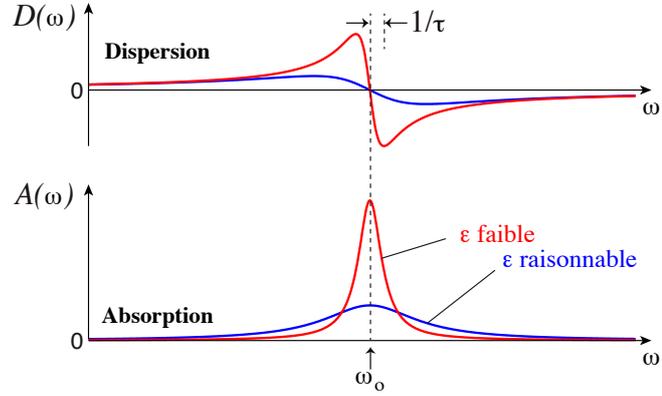
dimension finie dans lequel les ondes ne se *propagent* pas mais restent confinée à l'intérieur du système. Pour ce qui concerne l'absorption, la fonction A représente dans les deux modèles la quantité d'énergie cédée au milieu. Elle recouvre donc une réalité physique tangible, puisqu'elle permet d'évaluer l'importance des phénomènes dissipatifs en fonction de la pulsation du forçage. Nous allons montrer de quelle manière la fonction A est reliée à l'énergie dissipée par frottement au cours de chaque cycle.

En se rappelant que $\underline{U} = Ue^{i\phi} = U(\cos \phi + i \sin \phi) = U' - iU''$, on peut réécrire l'équation du mouvement sous la forme (équation 79) :

$$\begin{aligned} (-\omega^2 U e^{i\phi} + 2i\epsilon\omega\omega_o U e^{i\phi} + \omega_o^2 U e^{i\phi}) e^{i\omega t} \\ = \left(\frac{F_o}{m}\right) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (90)$$

D'où :

$$\begin{aligned} (\omega_o^2 - \omega^2)U + 2i\epsilon\omega\omega_o U = \frac{F_o}{m} e^{-i\phi} \\ = \frac{F_o}{m} (\cos \phi - i \sin \phi) \end{aligned} \quad (91)$$



En identifiant les parties réelles et imaginaires dans cette équation, on obtient deux relations :

$$\begin{cases} (\omega_o^2 - \omega^2)U = \frac{F_o}{m} \cos \phi \\ 2\epsilon\omega\omega_o U = -\frac{F_o}{m} \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\omega_o^2 - \omega^2)U^2 = \frac{F_o}{m} U' \\ \omega b U^2 = F_o U'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U^2 = \left(\frac{F_o/m}{\omega_o^2 - \omega^2}\right) U' \\ U^2 = \frac{F_o}{\omega b} U'' \end{cases} \quad (92)$$

où l'on retrouve bien la relation $(\omega b/m)U' = (\omega_o^2 - \omega^2)U''$ que l'on pouvait déduire de l'équation 87. On peut maintenant exprimer l'énergie mécanique du système E_M , qui est définie comme la somme de l'énergie cinétique E_C et de l'énergie potentielle E_M . La seule énergie potentielle est celle dont dérive la seule force conservative, c'est à dire l'énergie potentielle élastique associée à la force de rappel du ressort :

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}ku^2 = \frac{1}{4}mU^2 [(\omega^2 + \omega_o^2) + (\omega_o^2 - \omega^2) \cos(2\omega t + 2\phi)] \quad (93)$$

L'énergie mécanique est donc constante seulement si $\omega = \omega_o$. Dans le cas contraire, elle oscille à la pulsation 2ω autour d'une valeur moyenne $\langle E_M \rangle = \frac{1}{4}mU^2(\omega^2 + \omega_o^2)$.

En appliquant le théorème de l'énergie mécanique et en revenant à l'équation du mouvement dans laquelle figure l'expression des forces non conservatives (force de frottement et forçage) (équation 1) :

$$\frac{dE_M}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}ku^2 \right) = \dot{u}(m\ddot{u} + ku) = \dot{u}(-b\dot{u} + F_o \cos \omega t) = \underbrace{-b\dot{u}^2}_{\mathcal{P}_{\text{frottement}}} + \underbrace{F_o \dot{u} \cos \omega t}_{\mathcal{P}_{\text{forçage}}} \quad (94)$$

$\mathcal{P}_{\text{frottement}}$
 puissance
 de la force
 de frottement

$\mathcal{P}_{\text{forçage}}$
 puissance du
 forçage

Au cours du mouvement, la force de frottement $\{b\dot{u}\}$ consomme donc de l'énergie ($-b\dot{u}^2 \leq 0$). Celle-ci est transformée en chaleur, elle est donc perdue par le système. La seule source d'énergie disponible capable de compenser cette perte est celle fournie par le travail du forçage f .

Comment varient les puissance fournies ou dissipées par ces deux forces, et quelle est leur valeur moyenne sur une période $T = 2\pi/\omega$? Pour le déterminer, réinjectons l'expression de \dot{u} dans les expressions de $\mathcal{P}_{\text{frottement}}$ et $\mathcal{P}_{\text{forçage}}$. Comme on l'a vu dans l'équation 83, l'expression de \dot{u} peut être donnée sous la forme d'un sinus déphasé de ϕ , ou bien, de façon équivalente, comme la somme d'un cosinus en phase et d'un cosinus en quadrature de phase (un sinus, donc). La première manière d'écrire \dot{u} est plus pratique pour exprimer $\mathcal{P}_{\text{frottement}}$, alors que la seconde rend le développement de $\mathcal{P}_{\text{forçage}}$ plus rapide :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -U\omega \sin(\omega t + \phi) \\ \dot{u}(t) = -\omega U' \sin(\omega t) + \omega U'' \cos(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{P}_{\text{frottement}} = -bU^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\ \mathcal{P}_{\text{forçage}} = F_o\omega [-U' \sin(\omega t) \cos(\omega t) + U'' \cos^2(\omega t)] \end{cases} \quad (95)$$

On observe là encore que les puissances oscillent à la pulsation 2ω . En se rappelant que $\langle \sin^2 x \rangle = \langle \cos^2 x \rangle = 1/2$ et que $\sin(x) \cos(x) = 1/2 \sin(2x) \Rightarrow \langle \sin(x) \cos(x) \rangle = 0$, les valeurs moyennes de ces puissances sont donc :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_{\text{frottement}} \rangle &= -\frac{1}{2} b \omega^2 U^2 \\ \langle \mathcal{P}_{\text{forçage}} \rangle &= \frac{1}{2} F_o \omega U'' \end{aligned} \quad (96)$$

Or, d'après l'équation 92, $b\omega U^2 = F_o U''$. On en déduit finalement que : $\langle \mathcal{P}_{\text{frottement}} \rangle = -\langle \mathcal{P}_{\text{forçage}} \rangle$. En d'autres termes, sur un cycle complet, l'énergie fournie par le travail (en moyenne moteur) du forçage compense donc exactement la perte d'énergie induite par le travail (toujours résistant) de la force de frottement.

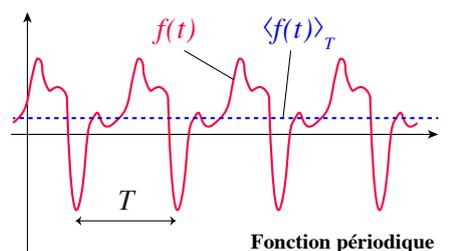
Pour finir, on remarque que la fonction U'' est toujours positive. La puissance fournie par le forçage est proportionnelle à U'' , donc cette puissance est bien toujours positive en moyenne sur une période. Etant donnée la forme de la fonction $U''(\omega)$, qui est proportionnelle à la fonction d'absorption $A(\omega)$ (voir la figure ci-dessus), la puissance dissipée sera d'autant plus grande que la pulsation ω se rapprochera de ω_o . La signification physique de la décomposition entre partie réelle et partie imaginaire de l'amplitude complexe de la réponse \underline{U} apparaît donc : la partie imaginaire de \underline{U} est proportionnelle à la quantité d'énergie absorbée en moyenne par les frottements au sein du système. Cette quantité est forte à proximité de la pulsation de résonance ω_o car l'amplitude des oscillations, et par conséquent la vitesse moyenne de la masse, sont alors maximales. Puisque l'intensité de la force de frottement est proportionnelle à la vitesse du mobile, et que son action s'effectue sur une distance importante étant donnée l'ampleur des oscillations, le travail de la force de frottement s'en trouve "doublement" augmenté.

5.3 Régime permanent périodique

On peut généraliser le traitement du forçage harmonique pour déterminer la réponse à un forçage périodique grâce à la transformée de Fourier.

Une fonction périodique du temps t est définie par (figure ci-contre) :

$$\forall t \in [0; T], \forall n \in \mathbb{Z}, f(t + nT) = f(t) \quad (97)$$



On peut montrer qu'il est possible de décomposer la fonction f en une *série de Fourier* :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \quad \text{avec} \begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega_n t) dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\omega_n t) dt \end{cases} \\ &= \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \psi_n) \quad \text{avec} \begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \tan \psi_n = \frac{b_n}{a_n} \end{cases} \end{aligned} \quad (98)$$

où $\omega_n = n\omega = n \frac{2\pi}{T}$ est l'*harmonique de rang n*, alors que ω est la *pulsation fondamentale*. Les coefficients a_n et b_n sont les *coefficients de Fourier* de la fonction f . Le terme $\frac{a_o}{2}$ est la valeur moyenne $\langle f \rangle_T$ de f sur une période T . Enfin, A_n est l'*amplitude de l'harmonique de rang n*, et ψ_n est sa phase. Le contenu fréquentiel de f est donc *discret*, c'est à dire que seules certaines fréquences sont représentées. Le *spectre* de f est ainsi constitué de raies¹⁰. En pratique, à moins que la fonction f soit très irrégulière (i.e. avec des discontinuités, des points non dérivables, etc) seuls les termes de plus bas rang (n petits) sont suffisants pour décrire f en bonne approximation.

10. Il s'agit là d'une propriété des signaux de durée finie.

Finalement, la réponse du système à la fonction f est obtenue en sommant les réponses harmoniques associées à chaque terme de la décomposition de f (équation 82). Ces réponses élémentaires sont pondérées par l'amplitude des coefficients de Fourier A_n de la fonction f et déphasées de la phase ψ_n de chacune des harmoniques :

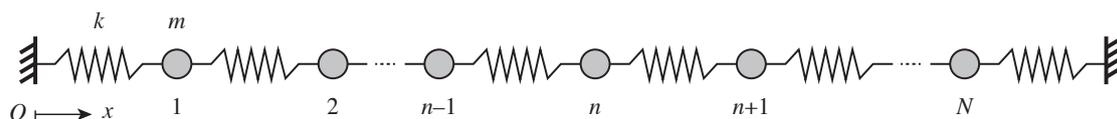
$$\underline{U}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n \cos(\omega_n t + \psi_n + \phi_n) \text{ avec } \begin{cases} U_n = \frac{F_o/m\omega_o^2}{n^2 \sqrt{(1/n^2 - s^2)^2 + (2\epsilon s/n)^2}} \\ \tan \phi_n = \frac{1}{n} \frac{2\epsilon s}{(1/n^2 - s^2)} \end{cases} \quad (99)$$

Ici, la pulsation réduite s est fixée par la pulsation du fondamental de f : $s = \frac{2\pi}{T}$. Ce n'est donc plus une variable. Puisque le système se comporte comme un passe-bas, les termes de haut rang (n grand) sont très atténués (l'amplitude de la réponse associée décroît en n^2). Cela renforce d'autant plus l'importance de la fréquence fondamentale du signal d'entrée f .

Notons pour terminer qu'on peut étendre la décomposition de Fourier à des fonctions non périodiques, dont le spectre est alors "plein". Ceci implique la transformée de Fourier \mathcal{F} . Celle-ci est l'analogue complexe de la transformée de Laplace bilatérale : $\mathcal{F}[f](\omega) = \mathcal{L}_{bil}[f](i\omega)$. L'étude de la réponse d'un système linéaire par le biais de la transformée de Fourier présente un intérêt particulier lorsqu'on ne souhaite pas s'embarasser de la réponse transitoire du système. La réponse *fréquentielle* du système est alors obtenue en multipliant les spectres respectifs de la fonction de transfert et de la fonction d'excitation, car, comme pour la transformée de Fourier, l'opération de convolution est équivalente à une multiplication dans le domaine fréquentiel. Ce type d'approche est utilisée notamment dans les méthodes numériques d'analyse modale, où les fréquences fondamentales de vibration d'un système (un bâtiment par exemple) sont déterminées par des méthodes de simulation par éléments finis. S'il se trouve que les fréquences fondamentales et les premières harmoniques du bâtiment sont proches du domaine fréquentiel dans lequel des ondes sismiques peuvent venir exciter le bâtiment, on cherchera à modifier la structure du bâtiment pour éloigner ces fréquences de la gamme de fréquences "à risque". De manière analogue, la géométrie et la structure des couches géologiques constituant certains bassins (par exemple de bassin de Grenoble ou celui de la ville de Mexico) peuvent être étudiés pour déterminer leur fréquence propre. Cette fréquence propre correspond à la fréquence naturelle à laquelle le bassin aura tendance à osciller s'il est excité par un séisme. On choisira donc d'éviter tout particulièrement de construire des bâtiments dont la fréquence propre serait proche de celle du bassin.

6 Généralisation à n degrés de liberté

Pour terminer, intéressons nous au comportement d'une chaîne de N oscillateurs montés en série entre deux bâtis fixes (figure ci-dessous). Tous les oscillateurs sont supposés identiques et constitués chacun d'une masselotte de masse m et d'un ressort de raideur k . Par simplicité, on ne prend pas en compte les frottements ni les effets de la gravité. On se bornera donc ici à l'étude du problème homogène, c'est à dire en ne prenant pas en compte une éventuelle excitation opérant sur une ou plusieurs masselottes. Le but de cette dernière partie est de présenter la méthode permettant d'identifier les modes propres de vibration de systèmes à plus d'un degré de liberté, c'est à dire de déterminer les différentes façons par lesquelles le système peut osciller librement. Pour l'analyse des vibrations de ce système, considérons



qu'il oscille dans la direction longitudinale (Ox). Le PFD appliqué à la masselotte numéro n s'écrit ainsi :

$$\ddot{x}_n = -\omega_o^2(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) \text{ avec } \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (100)$$

où x_n est la position de la masselotte n par rapport à sa position d'équilibre. Les conditions aux bords fixes imposent : $x_0 = x_{N+1} = 0$. Les équations du mouvement pour les deux masses situées aux extrémités de la chaîne sont donc simplifiées :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega_o(2x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_N = -\omega_o(2x_N - x_{N-1}) \end{cases} \quad (101)$$

En notant entre accolades les vecteurs colonne :

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} \quad (102)$$

On peut écrire l'ensemble des équations sous forme matricielle :

$$\boxed{\{\ddot{X}\} = -\omega_o^2 [\mathcal{V}] \{X\}} \quad \text{avec } [\mathcal{V}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & & & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & & & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (103)$$

en notant entre crochets les matrices. La matrice $[\mathcal{V}]$ est la matrice de rigidité ("stiffness matrix" en anglais), de dimensions $N \times N$.

L'équation 103 est l'analogie matriciel de l'équation canonique du système à un degré de liberté (équation 2) dans le cas conservatif ($\epsilon = 0$) et sans forçage ($f = 0$). Il s'agit en fait d'un système de N équations différentielles linéaires couplées (une pour chaque élément de l'oscillateur) regroupées sous forme matricielle. Ces équations sont *couplées* car chaque fonction x_n et sa dérivée second \ddot{x}_n apparaît dans plusieurs équations à la fois (2 ou 3) et il est impossible de séparer immédiatement les x_n les uns des autres.

Pour découpler les équations, on cherche les solutions de cette équation, c'est à dire qu'on cherche N fonctions ($\phi_1(t); \dots; \phi_N(t)$) (une fonction pour chaque masselotte) pour lesquelles l'équation matricielle 103 est vérifiée. Pour faciliter la recherche, on cherche ces solutions sous une forme harmonique, c'est à dire $\{\phi\} = \Re\{\{\underline{\varphi}\}\}$ avec, pour $j \in [0; N]$:

$$\begin{aligned} \{\underline{\varphi}\}_j &= \begin{Bmatrix} \varphi_{1,j} \\ \vdots \\ \varphi_{N,j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{1,j} \\ \vdots \\ A_{N,j} \end{Bmatrix} \cdot e^{-i\omega_j t} \\ &= \underbrace{\{A\}_j}_{\text{espace}} \cdot \underbrace{e^{-i\omega_j t}}_{\text{temps}} \end{aligned} \quad (104)$$

Le premier terme de cette solution contient l'information spatiale correspondant à la solution numéro j , c'est à dire la configuration relative de chacune des masselottes par rapport aux autres à l'instant t où $\Re(e^{-i\omega_j t}) = 1$ (ici à $t = 0$). Il s'agit du *mode propre* associé à la solution j . Chaque terme $A_{p,j}$ définit la position de la masselotte numéro p dans le mode propre numéro j . Le deuxième terme ($e^{-i\omega_j t}$) correspond à la partie temporelle de la solution, et signifie que tous les masselottes oscillent à la même pulsation ω_j pour le mode numéro j . De plus, ces oscillations sont *en phase*. Enfin, on suppose pour simplifier que les masselottes sont sans vitesse initiale à $t = 0$.

En dérivant cette solution harmonique, on aboutit à :

$$\{\ddot{\underline{\varphi}}\}_j = -\omega_o^2 \{\underline{\varphi}\}_j \quad (105)$$

Si $\{\underline{\varphi}\}_j$ est solution de l'équation 103, alors on peut écrire :

$$-\omega_j^2 \{A\}_j \cdot e^{-i\omega_j t} = -\omega_o^2 [\mathcal{V}] \cdot \{A\}_j \cdot e^{-i\omega_j t} \quad (106)$$

d'où :

$$\boxed{[\mathcal{V}] \cdot \{A\}_j = \left(\frac{\omega_j^2}{\omega_o^2} \right) \cdot \{A\}_j = \underbrace{\lambda_j}_{\text{valeur propre}} \cdot \underbrace{\{A\}_j}_{\text{vecteur propre}}} \quad (107)$$

En rassemblant les vecteurs propres, on peut réécrire cette équation sous la forme :

$$([\mathcal{V}] - \lambda_j [\mathcal{I}_N]) \{A\}_j = \{\mathcal{O}_N\} \quad , \text{ où } \begin{cases} [\mathcal{I}_N] & \text{est la matrice identité de rang } N \\ \{\mathcal{O}_N\} & \text{est un vecteur colonne nul de dimension } N \end{cases} \quad (108)$$

La résolution de cette équation constitue un *problème aux valeurs propres*. Il consiste à trouver les valeurs propres λ_j (et donc les ω_j) permettant de vérifier l'égalité 107 pour les vecteurs propres $\{A\}_j$. Une solution triviale (i.e. qui marche quel que soient le λ_j) est $\{A\}_j = 0$ pour tout j . Cette solution correspond à la position d'équilibre ($x_j(t) = 0, \forall j$). Nous l'écartons car nous nous intéressons ici aux solutions oscillantes. On peut démontrer (mais nous ne le ferons pas ici, voir un cours d'algèbre) que l'équation 107 admet des solutions non triviales λ_j si et seulement si :

$$\det([\mathcal{V}] - \lambda_j [\mathcal{I}_N]) = 0 \quad (109)$$

Les λ_j sont les racines du *polynôme caractéristique* de $[\mathcal{V}]$. Ce polynôme est de degré N en λ_j . Il possède donc N racines complexes ou réelles, simples ou multiples. Tout dépend de la nature de la matrice $[\mathcal{V}]$. On peut démontrer (et là encore nous ne le ferons pas) que, puisque la matrice $[\mathcal{V}]$ est carrée, réelle et symétrique¹¹, alors il existe une matrice orthogonale¹² $[Q]$ permettant de diagonaliser $[\mathcal{V}]$ en une matrice diagonale¹³ $[D]$ telle que $[\mathcal{V}] = {}^t[Q][D][Q]$. En d'autres termes, puisque $[\mathcal{V}]$ est symétrique, elle est diagonalisable sur une base orthogonale. Les colonnes de $[Q]$ sont alors les vecteurs propres de $[\mathcal{V}]$, et les termes diagonaux de $[D]$ sont les valeurs propres de $[\mathcal{V}]$. Par ailleurs, la matrice $[\mathcal{V}]$ est de rang N ¹⁴, ce qui implique qu'aucun de ses vecteurs propres $\{A\}_j$ n'est nul, de même qu'aucune de ses valeurs propres λ_j n'est nulle. Enfin, la matrice $[\mathcal{V}]$ est définie positive¹⁵, ce qui implique que ses valeurs propres λ_j sont positives. L'existence de solutions au problème aux valeurs propres est donc assurée.

Finalement, on cherche les vecteurs propres sous la forme :

$$A_{p,j} = \sin(p\alpha_j) \quad \text{avec} \quad \{A\}_j = \begin{Bmatrix} A_{1,j} \\ \vdots \\ A_{N,j} \end{Bmatrix} \quad (110)$$

ce qui implique que les solutions ϕ sont de la forme :

$$\boxed{\phi_{p,j} = A_{p,j} \cos(\omega_j t) = \sin(p\alpha_j) \cos(\omega_j t)} \quad (\text{ondes stationnaires}). \quad (111)$$

où $p \in [0; N]$ est le numéro de la masselotte, α_j est le *nombre d'onde* associé au mode propre j et ω_j est la pulsation propre associée. On constate que les composantes spatiales (dépendant de la variable

11. Une matrice $[A]$ est symétrique si $\forall i, j, A_{i,j} = A_{j,i}$. Elle vérifie alors la propriété : ${}^t[A] = [A]$.

12. Une matrice $[B]$ est orthogonale au sens du produit scalaire défini par $[C]$ si ses colonnes sont mutuellement orthogonales. Pour deux colonnes quelconques $\{B\}_k$ et $\{B\}_{k'}$, l'orthogonalité est vérifiée si : ${}^t\{B\}_k [C] \{B\}_{k'} = 0$ lorsque $k \neq k'$.

13. Une matrice diagonale est une matrice dont les seuls termes non nuls sont situés sur la diagonale.

14. Une matrice carrée de dimension $N \times N$ est dite de rang N lorsque, quelle que soit la colonne, on ne peut trouver aucune combinaison linéaire des autres colonnes permettant de retrouver la colonne considérée (idem pour les lignes). Si le rang de la matrice est inférieur à N , la matrice est dite dégénérée. On ne peut pas l'inverser.

15. Une matrice carrée $[E]$ est définie positive si, quel que soit le vecteur colonne (réel) $\{x\}$, le scalaire ${}^t\{x\}[E]\{x\}$ est positif. On peut vérifier que $[\mathcal{V}]$ est définie positive en raisonnant en dimension 3 (le produit ${}^t\{x\}[\mathcal{V}]\{x\}$ pour $N = 3$ avec un vecteur colonne $x = \{a; b; c\}$ donne $a^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + c^2$, c'est à dire une somme de termes au carré, ce qui est toujours positif), puis en généralisant aux dimensions supérieures.

discrète p) et temporelles (dépendant de la variable continue t) sont séparées. Cette solution particulière est celle d'une *onde stationnaire*.

On a donc :

$$\{A\}_j = \begin{Bmatrix} \sin \alpha_j \\ \sin (2\alpha_j) \\ \vdots \\ \sin (N\alpha_j) \end{Bmatrix} \text{ et } [\mathcal{V}] \cdot \{A\}_j = \lambda_j \cdot \{A\}_j \quad (112)$$

D'où :

$$\begin{cases} 2 \sin \alpha_j - \sin (2\alpha_j) = \lambda_j \sin \alpha_j \\ \vdots \\ -\sin ((n-1)\alpha_j) + 2 \sin (n\alpha_j) - \sin ((n-1)\alpha_j) = \lambda_j \sin (n\alpha_j) \\ \vdots \\ -\sin ((N-1)\alpha_j) + 2 \sin (N\alpha_j) = \lambda_j \sin (N\alpha_j) \end{cases} \quad (113)$$

Or :

$$\begin{cases} \sin a + b = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin a - b = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{cases} \quad (114)$$

D'où :

$$\begin{cases} (2 - 2 \cos \alpha_j - \lambda_j) \sin (p\alpha_j) = 0 & \text{pour } 1 \leq p \leq N - 1 \\ (2 - 2 \cos \alpha_j - \lambda_j) \sin (N\alpha_j) = -\sin ((N+1)\alpha_j) = 0 & \text{(bord libre)} \end{cases} \quad (115)$$

En excluant la solution triviale dans laquelle toutes les masselottes demeurent immobiles (i.e. $\sin (p\alpha_j) = 0, \forall p \in [1; N]$), on peut simplifier le système par $\sin (p\alpha_j) \neq 0$, ce qui donne :

$$(2 - 2 \cos \alpha_j - \lambda_j) = 0 \Rightarrow \lambda_j = 2(1 - \cos \alpha_j) = 4 \sin^2 \left(\frac{\alpha_j}{2} \right) \quad (116)$$

D'où :

$$(N+1)\alpha_j = 0 \text{ [modulo } \pi] \Rightarrow (N+1)\alpha_j = j\pi \text{ pour } j \in [1; N] \Rightarrow \alpha_j = \frac{j\pi}{N+1} \quad (117)$$

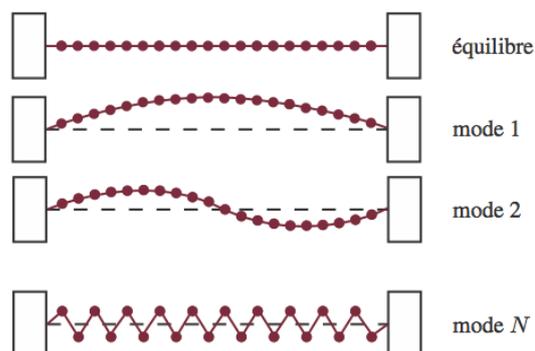
Les N valeurs propres distinctes sont donc :

$$\lambda_j = 4 \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2(N+1)} \right) \Rightarrow \omega_j = 2\omega_0 \left| \sin \left(\frac{j\pi}{2(N+1)} \right) \right| \quad (\omega_j > 0 \text{ pour les solutions physiques}). \quad (118)$$

Les vecteurs propres (normalisés) correspondants sont finalement :

$$A_{p,j} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \left(\frac{jp\pi}{N+1} \right) \quad (1 \leq j \leq N) \quad (119)$$

Un résultat analogue serait obtenu pour les deux modes transverses (mouvement transversal des masselottes dans les deux directions orthogonales à l'axe (Ox)). Les modes transverses sont représentés dans la figure ci-contre.



Références

Marshall, A. G., Verdun, F. R., 1989. Fourier transforms in NMR, optical, and mass spectrometry. Elsevier.

Nicolas, M., 2009. Ondes et électromagnétisme. Dunod.

Oudin, H., 2010. Vibrations des systèmes mécaniques en petites perturbations. <https://meefi.pedagogie.ec-nantes.fr/Vibra/vibra.htm>, [Cours de l'ENSA Nantes, en ligne, accédé le 08-Sept-2013].

Pérez, J.-P., Thibault, R., 2001. Mécanique : fondements et applications : avec 300 exercices et problèmes résolus. Dunod.

Strang, G., Aarikka, K., 1986. Introduction to applied mathematics. Vol. 16. Wellesley-Cambridge Press Wellesley, MA.

Taylor, J. R., Becherrawy, T., Boudier-Cusset, A., 2012. Mécanique classique. De Boeck.