

Partie 2 : Les ondes progressives

Une onde peut être considérée comme la manifestation du comportement propagatif des vibrations affectant un système possédant un grand nombre de degré de liberté. Dans le chapitre précédent, nous avons étudié le comportement vibratoire d'une chaîne d'oscillateurs mécaniques constituée d'un nombre fini N de masses. Un tel système *fermé* oscillait librement selon N modes de vibrations stationnaires. Lorsque N devient infini, les vibrations ne restent plus confinées dans une région fermée de l'espace, mais vont plutôt se *propager* depuis le point où elles ont pris naissance suite à une perturbation initiale. C'est ce phénomène que nous allons ici étudier.

1 L'équation d'onde

1.1 Mise en évidence de l'équation d'onde

Pour mettre en évidence la structure mathématique du phénomène ondulatoire, nous allons étudier le système constitué d'une chaîne infinie d'oscillateurs identiques composés de masses m et de ressorts de raideurs K montés en série (Figure 1). Nous supposons dans un premier temps que les masses ne

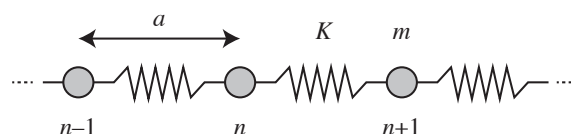


FIGURE 1

peuvent se mouvoir que dans la direction longitudinale. Nous supposons également pour commencer que les longueurs d'ondes des vibrations sont "grandes" par rapport à l'espacement moyen entre les masses. En notant a la longueur naturelle de chaque ressort à l'équilibre, et X_n l'écart de la masse numéro n par rapport à sa position d'équilibre, on peut établir l'équation du mouvement de la masse numéro n :

$$m\ddot{X}_n = -K(X_n - X_{n-1}) + K(X_{n+1} - X_n) \quad (1)$$

On constate que l'équation du mouvement pour la masse n implique la position de la masse n à travers la fonction X_n et sa dérivée seconde \ddot{X}_n . Cependant, cette équation différentielle contient aussi une dépendance par rapport aux positions des masses voisines à travers les fonctions X_{n-1} et X_{n+1} . Les équations différentielles régissant l'évolution des masses $n-1$, n , $n+1$, ... sont donc *couplées*. On a déjà rencontré cette situation au cours de l'étude de la chaîne d'oscillateurs à N degrés de liberté. On a montré que le découplage de ces équations nécessite de calculer l'*inverse* d'une matrice de dimensions $N \times N$. Ici, puisque $N \rightarrow \infty$, il n'est pas possible de procéder de la même manière. Il est donc impossible de découpler ces équations.

Adoptons à présent les notations indiquées sur la Figure 2 : $X_{n-1}(t) \rightarrow X(x-a, t)$; $X_n(t) \rightarrow X(x, t)$; $X_{n+1}(t) \rightarrow X(x+a, t)$. La fonction X est désormais une fonction continue dépendant des deux variables x et t , et nous l'*échantillonons* aux positions $x-a$ et $x+a$ et à l'instant t . On prendra donc garde à remplacer les dérivées simples par rapport au temps t par des dérivées partielles. L'équation du mouvement devient alors :

$$m \frac{\partial^2 X(x, t)}{\partial t^2} = -K [X(x, t) - X(x-a, t)] + K [X(x+a, t) - X(x, t)] \quad (2)$$

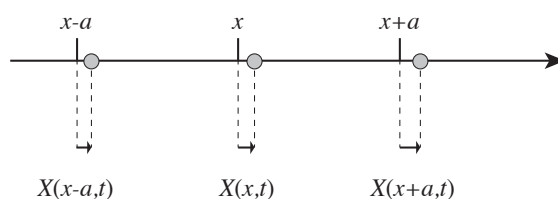


FIGURE 2

On a supposé que a est “petit”, ce qui permet d’effectuer les développements limités suivants :

$$\begin{cases} X(x-a, t) \stackrel{DL}{\simeq} X(x, t) - a \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \\ X(x+a, t) \simeq \quad \quad \quad + \quad \quad \quad + \quad \quad \quad \end{cases} \quad (3)$$

Grâce à ces développements limités, on est maintenant capable de relier les positions des masses voisines à travers une unique fonction X :

$$m \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -K \left[a \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right] + K \left[a \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right] = K a^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad (4)$$

Cette équation peut être réécrite sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0} \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{K a^2}{m}} \quad (5)$$

Cette équation aux dérivées partielles est l’équation d’onde ou équation de d’Alembert. Cette équation relie la dérivée seconde par rapport au temps (t) et la dérivée seconde par rapport à la variable d’espace (x). Le fait que la fonction X (position d’une masse située en x au cours du temps t) vérifie cette équation signifie que X possède une structure d’onde. En d’autres termes, la perturbation X se propagera dans l’espace au cours du temps, et variera en fonction du temps en tout point fixe de l’espace. Il en va de même pour la force, la vitesse, l’accélération : toutes ces fonctions, qui sont reliées à X ou à ses dérivées, ont une structure d’onde. Le paramètre c est homogène à une vitesse : c’est la célérité de l’onde. En rappelant que $\omega_o = \sqrt{K/m}$ est la pulsation propre de l’oscillateur élémentaire, on trouve que $c = a\omega_o$.

1.2 Solution générale de l’équation d’onde

1.2.1 Onde progressive à une dimension

Afin de résoudre l’équation d’onde, on procède au changement de variable suivant :

$$(x; t) \longrightarrow (\alpha; \beta) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = t - x/c \\ \beta = t + x/c \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ x = c \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \end{cases} \quad (6)$$

Suite à ce changement de variable, il est possible d’exprimer la fonction X par rapport aux variables α et β . Les dérivées partielles de X par rapport à x et t doivent maintenant être calculées par rapport aux nouvelles variables α et β :

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial \alpha} \cdot \overbrace{\frac{\partial \alpha}{\partial t}}^{=1} + \frac{\partial X}{\partial \beta} \cdot \overbrace{\frac{\partial \beta}{\partial t}}^{=1} = \frac{\partial X}{\partial \alpha} + \frac{\partial X}{\partial \beta} \\ \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial \alpha} \cdot \underbrace{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}_{=-1/c} + \frac{\partial X}{\partial \beta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \beta}{\partial x}}_{=1/c} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial X}{\partial \beta} - \frac{\partial X}{\partial \alpha} \right) \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \end{cases} \quad (7)$$

En appliquant une seconde fois les *opérateurs dérivée partielle* identifiés ci-dessus, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 X}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 X}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 X}{\partial \beta^2} \\ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 X}{\partial \alpha^2} - 2 \frac{\partial^2 X}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 X}{\partial \beta^2} \right] \end{cases} \quad (8)$$

En injectant ces dérivées partielles dans l'équation d'onde (équation 5), on aboutit finalement à la condition suivante :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial X}{\partial \beta} \right) = 0 \quad (9)$$

Cette condition signifie que, pour que la fonction X soit solution de l'équation d'onde, il est nécessaire que la fonction $\partial X / \partial \beta$ ne dépende pas de la variable α (bien qu'à l'origine, suite à notre changement de variable, la fonction X et ses dérivées partielles par rapport à α ou β pouvaient/devaient *a priori* dépendre des deux variables naturelles α et β). Par conséquent, la fonction $\partial X / \partial \beta$ dépend *uniquement* de β . On peut donc l'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial X}{\partial \beta} = \gamma(\beta) \quad (10)$$

où γ est une fonction de β . Il est maintenant possible d'intégrer $\partial X / \partial \beta$ par rapport à la variable β pour trouver l'expression de la fonction X . Lors de ce calcul, il ne faut pas oublier d'ajouter une constante d'intégration appropriée. Cette "constante" d'intégration est ici, en fait, n'importe quel nombre ou fonction ne dépendant pas de la variable d'intégration β (on doit pouvoir, en différentiant l'expression intégrée, retomber sur l'expression initiale) :

$$X(\alpha, \beta) = f(\alpha) + g(\beta) \quad \text{avec} \quad g(\beta) = \int \gamma(\beta) \quad (11)$$

Les variables α et β sont maintenant *séparées*. On peut donc écrire, en rappelant le changement de variable introduit plus haut :

$$X(x, t) = \underbrace{f\left(t - \frac{x}{c}\right)}_{\text{onde progressive}} + \underbrace{g\left(t + \frac{x}{c}\right)}_{\text{onde régressive}} \quad (12)$$

La première fonction f correspond à la propagation d'une onde progressant dans le sens des x croissants. On peut le vérifier en cherchant le lieu des valeurs constantes de f , c'est à dire les couples (x, t) tels que $t - x/c$ est constant : lorsque t augmente, il faut que x augmente également pour conserver $t - x/c = \text{cste}$. La perturbation va donc se déplacer vers les x croissants. Au contraire, la seconde fonction g est identifiée à une onde régressive se propageant vers les x décroissants. La solution générale de l'équation d'onde à une dimension est donc la somme d'une onde se propageant dans une direction, et d'une autre onde se propageant dans la direction opposée.

1.2.2 Onde progressive à trois dimensions

À trois dimensions, la coordonnée x définissant la position à laquelle on étudie le phénomène ondulatoire est remplacée par un vecteur \vec{r} définissant la position dans l'espace par rapport à l'origine. Par exemple, en coordonnées cartésiennes, $\vec{r} = (x; y; z)$. Mais l'onde tridimensionnelle peut se propager dans une direction différente du vecteur position courante. On doit donc introduire un second vecteur $\vec{\kappa}$ indiquant la direction et le sens de propagation de l'onde. La solution de l'équation d'onde prend alors la forme :

$$\boxed{A(\vec{r}, t) = A(x, y, z, t) = F(ct - \vec{\kappa} \cdot \vec{r}) + G(ct + \vec{\kappa} \cdot \vec{r})} \quad (13)$$

1.2.3 Onde sphérique

Un cas particulier d'onde se propageant dans les trois dimensions de l'espace est l'onde sphérique. Soit une fonction s du temps t et de l'espace $(x; y; z)$ solution de l'équation d'onde. L'équation d'onde s'écrit alors :

$$\nabla^2 s - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad (14)$$

où ∇^2 correspond à l'opérateur *laplacien*, et ∇ correspond à l'opérateur *nabla*. Puisque s ne dépend que de la variable r , son laplacien s'écrit, en coordonnées sphériques :

$$\nabla^2 s = \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial s}{\partial r} \quad (15)$$

On va ici procéder au changement de variable suivant :

$$u = rs \implies \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = s + r \frac{\partial s}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 2 \frac{\partial s}{\partial r} + r \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = r \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \end{cases} \implies \begin{cases} \nabla^2 s = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \\ \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{cases} \quad (16)$$

On peut donc réécrire l'équation d'onde avec la fonction u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (17)$$

Le fait que l'opérateur différentiel ∇^2 soit remplacé par une dérivée partielle $\partial^2/\partial r^2$ traduit le passage d'un problème tridimensionnel à un problème unidimensionnel. On retrouve ici l'équation d'onde à une dimension, dont u est solution. La fonction u est donc de la forme donnée par l'équation 12 :

$$u(r, t) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right) \implies \boxed{s(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c}\right)} \quad (18)$$

La fonction s subit une atténuation géométrique en $1/r$.

1.3 Structure de l'onde progressive

Sur une *surface d'onde* (ou un *front d'onde*), $f(t - x/c)$ garde la même valeur en tout point, à t fixé (idem pour g). La géométrie des surfaces d'onde dépend de la géométrie de la source et de sa distance :

- source ponctuelle : surface d'onde sphérique
- source linéique : surface d'onde cylindrique
- source planaire : onde plane

Le vecteur unitaire $\vec{\kappa}$ est le vecteur normal à la surface d'onde. À suffisamment grande distance de la source, quelle que soit la géométrie de la source, les surfaces d'onde peuvent généralement être considérés comme localement planes. On parle alors de *plan d'onde*.

Quoi qu'il en soit, il ne faut pas confondre la géométrie des plans d'onde (perpendiculaire au vecteur $\vec{\kappa}$) et la direction du mouvement des particules \vec{u} lors de leurs ondulations (ou de toute autre variable vérifiant l'équation d'onde). Ici, nous avons considéré $\vec{u} \equiv \vec{X}$, c'est à dire que le mouvement des particules s'effectue dans la direction (Ox) . Il s'agit d'un mode *longitudinal* de mouvement (Figure 3). Les ondes acoustiques ou les ondes sismiques de compression (ondes P) partagent cette caractéristique. Mais nous aurions également pu étudier les vibrations *transverses*, pour lesquelles $\vec{u} \equiv \vec{Y}$ ou $\vec{u} \equiv \vec{Z}$. Les vibrations d'une corde dans une guitare ou un piano, ou les ondes de cisaillement en sismologie (ondes S) font partie de cette catégorie.

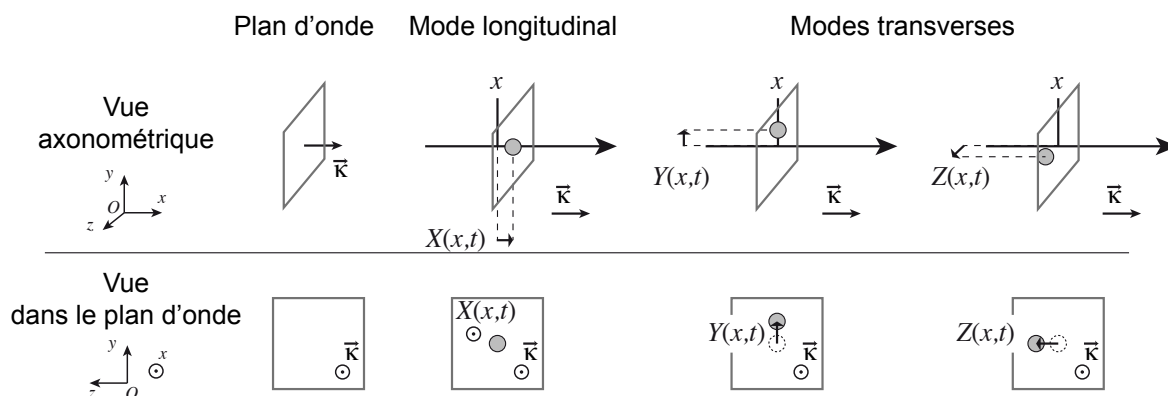


FIGURE 3

2 Les ondes planes progressives harmoniques (OPPH)

2.1 Définition

Dans la suite, nous allons nous focaliser sur l'étude d'un type d'onde particulier satisfaisant l'équation d'onde. Il s'agit des *ondes planes progressives harmoniques* (OPPH). Leur caractère particulier tient à la forme de la fonction f :

$$f\left(t - \frac{x}{c}\right) = A \cos[\phi_p(x, t)] = A \cos(\omega t - kx + \phi_o) \quad (19)$$

Il s'agit d'une fonction *harmonique*, c'est à dire *sinusoïdale*. C'est bien une fonction des deux variables x (espace) et t (temps). Dans l'équation ci-dessus, le terme $\phi_p(x, t) = \omega t - kx + \phi_o$ représente la *phase* de l'OPPH au point (x, t) considéré. Quant à la constante ϕ_o , celle-ci désigne la *phase à l'origine*, c'est à dire la valeur de la fonction ϕ_p à l'instant initial $t = 0$ et à la position d'origine $x = 0$: $\phi_o = \phi_p(0, 0)$ ¹. Les deux constantes ω et k sont respectivement la *pulsation* de l'onde et la norme du vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}$.

Une OPPH est associée à une pulsation ω unique. Or, cette pulsation est reliée à la fréquence f de l'onde par la relation : $f = \omega/2\pi$. En électromagnétisme, la fréquence d'une onde électromagnétique dans le domaine visible détermine directement la *couleur* de la lumière associée à cette onde. Les OPPH sont donc également souvent dénommées *ondes monochromatiques*.

L'OPPH définie ci-dessus comporte deux composantes de *périodicité* :

- périodicité temporelle : à x fixé, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$.
- périodicité spatiale : à t fixé, $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{\nu}$.

où f est la *fréquence* et ν est la *répétence*.

Implicitement, en ne retenant que la norme $k = \|\vec{k}\|$ dans l'équation 19, on a supposé que les OPPH ici considérées se propagent dans la direction (Ox) . Le vecteur \vec{k} sera dans ce cas parallèle à l'axe (Ox) . Cependant, dans le cas général, pour une OPPH se propageant dans une direction quelconque de l'espace, il convient de considérer f sous la forme :

$$s(M, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_o) \quad (20)$$

où $\vec{r} = \vec{OM}$ est le vecteur position au point M . Les vecteurs \vec{k} et \vec{OM} ne pointent pas nécessairement dans la même direction. On a défini le front d'onde comme l'ensemble des valeurs de x telles que $s(M, t) =$

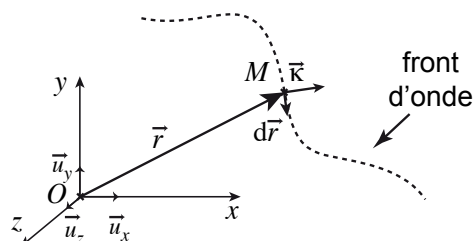


FIGURE 4

1. Mais on peut avoir $\phi_p = \phi_o$ pour d'autres couples (x, t) !

$A \cos \phi_p = \text{cste}$ à t fixé. En différenciant ϕ_p à t fixé, on peut montrer que cette condition implique : $\phi_p = \text{cste} \Rightarrow (d\phi_p)_t = 0 = -\vec{k} \cdot d\vec{r}$ sur une surface d'onde. Par conséquent, pour $d\vec{r}$ appartenant au front d'onde, \vec{k} est perpendiculaire à $d\vec{r}$. On en déduit que \vec{k} est donc perpendiculaire au front d'onde (Figure 4). Pour l'OPPH se propageant selon (Ox) , cela signifie que les plans d'ondes sont parallèles au plan (Oyz) (Figure 3). On a alors $\vec{k} = k_x \cdot \vec{u}_x$ (où \vec{u}_x est un vecteur unitaire dirigé selon (Ox)), $\vec{OM} = \vec{r} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z$ et $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x \cdot x$.

On définit la *vitesse de phase* comme la vitesse v_ϕ à laquelle se déplace un plan d'onde défini par $\phi_p = \text{cste}$. Cette vitesse peut être trouvée en différenciant ϕ_p .

Pour l'OPPH se propageant dans la direction (Ox) , cela donne :

$$d\phi_p = \frac{\partial \phi_p}{\partial t} dt + \frac{\partial \phi_p}{\partial x} dx = \omega dt - k dx = 0 \implies v_\phi = \left(\frac{dx}{dt} \right)_\phi = \frac{\omega}{k} \quad (21)$$

où l'on rappelle que la condition $d\phi_p = 0$ provient de la définition de la surface d'onde, i.e. $\phi_p = \text{cste}$.

La longueur d'onde λ correspond à la distance séparant deux plans d'onde successifs, correspondants à ϕ_p et $\phi_p + 2\pi$ (Figure 5). On a donc : $\lambda = v_\phi T$.

FIGURE 5

On notera enfin que la "constante" \vec{k} devra être considérée dans le cas général comme une fonction de la pulsation ω : $\vec{k} = \vec{k}(\omega)$. La relation permettant d'exprimer \vec{k} en fonction de ω est appelée la *relation de dispersion*.

2.2 Représentation complexe des OPPH

La représentation complexe de l'OPPH de pulsation ω se propageant dans la direction \vec{k} s'écrit :

$$\begin{aligned}
 s(\vec{r}, t) &= A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_o) \\
 &= \Re \left(A \exp \left(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_o) \right) \right) \\
 &= \Re \left(\underline{A} \exp \left(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right) \right) \quad \text{avec } \underline{A} = A e^{i\phi_o} : \text{amplitude complexe} \quad (22) \\
 &= \Re (\underline{s}(\vec{r}, t)) \quad \text{avec } \underline{s}(\vec{r}, t) = \underline{A} \exp \left(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right)
 \end{aligned}$$

On se restreint ici au cas de l'OPPH se propageant dans la direction (Ox) . Les propriétés de dérivation de la fonction exponentielle impliquent :

$$\frac{\partial \underline{s}}{\partial t} = i\omega \underline{s} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{s}}{\partial x} = -ik_x \underline{s} = -ik \underline{s} \quad (23)$$

Puisque \underline{s} est solution de l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \underline{s}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{s}}{\partial t^2} = 0 \implies \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \underline{s} = 0 \quad (24)$$

Une solution non triviale ($\underline{s} \neq 0$) existe si :

$$k = \pm \frac{\omega}{c} \implies v_\phi = \frac{\omega}{|k|} = c \quad (25)$$

On remarque que la *vitesse de phase* v_ϕ ne dépend pas ici de la pulsation ω . Les OPPH se propagent alors à la même vitesse, quelle que soit la fréquence de l'onde. La propagation est dite *non dispersive*.

2.3 Superposition des deux OPPH

Lorsqu'on superpose deux OPPH de même pulsation, un phénomène d'*interférence* se produit. L'onde résultant de l'addition de deux OPPH de même pulsation ω , de même amplitude A_o et de vecteurs d'onde

$\vec{k}_{1,2}$ proches s'exprime² :

$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + A_2 \\
 &= A_o \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1) + A_o \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2) \\
 &= 2A_o \underbrace{\cos\left[\frac{1}{2}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + \frac{\Delta\phi}{2}\right]}_{\text{modulation d'amplitude}} \cdot \underbrace{\cos\left[\frac{1}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{r} - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right]}_{\text{onde}} \quad \text{avec } \Delta\phi = \phi_1 - \phi_2
 \end{aligned} \tag{26}$$

La structure de l'onde résultante est celle d'une onde de pulsation ω , de vecteur d'onde $1/2(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$, et dont l'amplitude est *modulée* par une fonction spatiale de structure sinusoïdale. L'onde progresse donc dans l'espace selon la direction moyenne des deux ondes incidentes, mais son amplitude est en tout point "bornée" par un facteur ne dépendant que de la coordonnée spatiale. En d'autres termes, même si l'onde

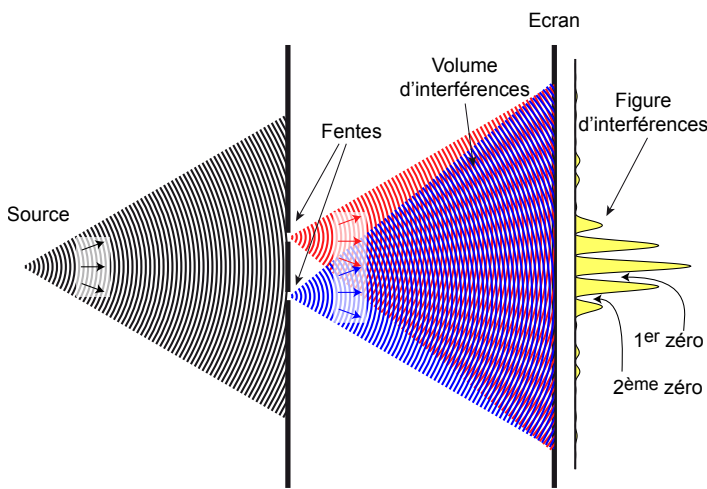


FIGURE 6

Figure 6). La figure d'interférences observée sur un écran situé à distance des fentes correspond simplement à une vue en coupe du volume d'interférences. Lorsqu'on déplace l'écran, la figure d'interférences va se déplacer. Dans l'expérience de Young, la différence de phase $\Delta\phi$ est directement reliée à la *différence de marche* δ entre les deux ondes incidentes, c'est à dire la différence de longueur des chemins optiques empruntés par les deux ondes :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \tag{27}$$

Lorsque \vec{k}_1 est proche de \vec{k}_2 , on constate que le terme de modulation d'amplitude tend vers zéro dès que $\delta \approx \lambda/2$, modulo λ . Ceci explique l'existence de plusieurs zéros (d'ordre 1, 2, etc) dans la figure d'interférence (Figure 6).

Deux cas particuliers peuvent être discutés :

— si $\vec{k}_1 = \vec{k}_2 = \vec{k} \Rightarrow A = 2A_o \cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \cdot \cos\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$

L'onde résultante "voyage" de la même manière que les deux ondes initiales, mais son amplitude est modulée par un terme constant dépendant de la valeur de $\Delta\phi$. Dans certains cas particuliers, l'onde résultante pourra être d'amplitude nulle (si $\Delta\phi = \pi$, i.e. opposition de phase) ou bien d'amplitude double (si $\Delta\phi = 0$, i.e. en phase). On parle alors d'interférence *destructive* et d'interférence *constructive*, respectivement (Figure 7).

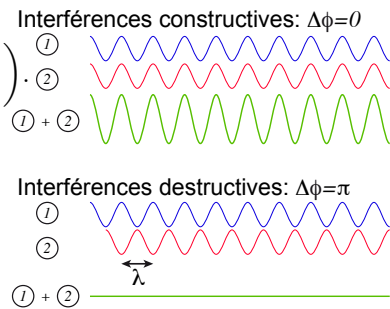


FIGURE 7

2. On utilise ici la formule : $2 \cos A \cos B = \cos(A - B) + \cos(A + B)$

— si $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2 = \vec{k} \Rightarrow A = 2A_o \cos\left(\omega t - \frac{\Delta\phi}{2}\right) \cdot \cos\left(\vec{k} \cdot \vec{r} + \frac{\Delta\phi}{2}\right)$. En d'autres termes, les ondes incidentes voyagent dans des sens opposés, avec la même amplitude. On constate dans cette solution un découplage entre les composantes spatiales et temporelles de l'onde. Ce découplage se traduit par une disparition du phénomène de propagation, il s'agit d'une *onde stationnaire*.

Pour conclure, il faut noter que les phénomènes d'interférence décrits ici ne sont visibles que si les deux ondes incidentes sont d'amplitudes similaires et de même pulsation.

3 Application à la chaîne d'oscillateurs

3.1 Relation de dispersion

Repartons à présent de l'exemple de la chaîne d'oscillateurs (Figure 1), et essayons de décrire le comportement vibratoire du système lorsque celui-ci est traversé par une OPPH. Nous avons jusqu'à présent supposé que la distance a séparant deux masses successives était "petite", ce qui a permis de montrer que la perturbation de la position de chaque masse par rapport à sa position d'équilibre (la variable X) obéit à l'équation d'onde (équation 5). Implicitement, ce type d'onde correspond à une onde dont la longueur d'onde λ est très supérieure à la distance a . Relâchons à présent cette hypothèse, afin de pouvoir nous intéresser à des longueur d'onde pouvant être du même ordre de grandeur que a . Le cas "a petit" sera retrouvé ultérieurement en passant à la limite $\lambda \gg a$ (approximation acoustique).

En notant $u_n \equiv X_n$ la position de la masse numéro n , l'équation du mouvement (équation 1) peut être réécrite :

$$m\ddot{u}_n = -K(u_n - u_{n-1}) + K(u_{n+1} - u_n) \quad (28)$$

En introduisant la pulsation propre $\omega_o^2 = K/m$ de l'oscillateur élémentaire constitué d'un unique ensemble { ressort ; masse }, cette équation prend la forme :

$$\ddot{u}_n - \omega_o^2 (u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n) = 0 \quad (29)$$

Nous cherchons les solutions de cette équation sous la forme :

$$\underline{u}_n(t) = \underline{A} \exp(i(\omega t - kx_n)) \quad \text{avec} \quad \underline{A} = Ae^{i\varphi} \quad (30)$$

où x_n est la position courante de la masse numéro n le long de l'axe (Ox). Si l'on note x_n^o sa position d'équilibre, on a : $x_n = x_n^o + u_n$. En d'autres termes, u_n est une perturbation de la position x_n^o . Puisque $u_n \ll x_n^o$, on a : $x_n \approx x_n^o$, et :

$$x_n = na \quad ; \quad x_{n-1} = (n-1)a \quad ; \quad x_{n+1} = (n+1)a \quad (31)$$

On en déduit :

$$\underline{u}_n(t) = \underline{A} \exp(i(\omega t - kna)) \equiv \underline{u}(n, t) \quad (32)$$

D'où :

$$\underline{u}_{n-1} = \underline{u}_n e^{+ika} \quad ; \quad \underline{u}_{n+1} = \underline{u}_n e^{-ika} \quad (33)$$

Cette manipulation a permis de modifier l'équation décrivant l'OPPH (équation 30) de telle sorte que celle-ci ne dépend plus de la variable continue x mais plutôt de la variable discrète na . Cela équivaut à considérer que la fonction continue décrite dans l'équation 30 doit être *échantillonnée* tous les $x_n = na$ afin de trouver la position courante de la masse numéro n par rapport à sa position d'équilibre. La conséquence immédiate de cette manipulation, qui découle de la nature discrète du système, est que les longueurs d'ondes inférieures à l'espacement a entre deux masses successives (hautes fréquences) seront trop petites pour pouvoir être décrites par le système, et ne pourront être distinguées de longueurs d'ondes beaucoup plus grandes que a , de plus basses fréquences (Figure 8). C'est une conséquence du *théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon*.

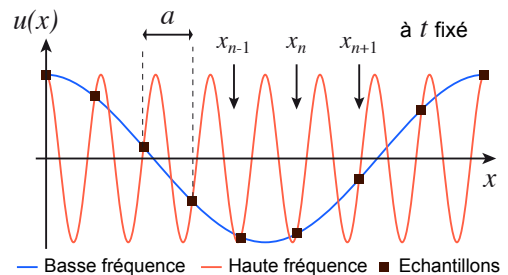


FIGURE 8

L'équation 29 devient alors³ :

$$\omega^2 = \omega_o^2 [2 - e^{-ika} - e^{+ika}] = 4\omega_o^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) \quad (34)$$

Cette dernière équation relie (au carré près) le vecteur d'onde k et la pulsation ω . Elle permet d'aboutir à la *relation de dispersion* :

$$\omega = 2\omega_o \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right| \quad (35)$$

Cette équation peut également être mise sous la forme :

$$\mathcal{D}(k, \omega) = \omega - 2\omega_o \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right| = 0 \quad (36)$$

Dans ces conditions, la propagation *sans absorption* d'une onde pour k réel n'est possible que si $\omega \leq 2\omega_o$ (Figure 9). Le système présente donc un comportement de type *passe-bas* : les oscillations dont la pulsation excède la pulsation propre de l'oscillateur élémentaire ne peuvent pas se propager au sein du système sous la forme d'une onde. Cette propriété découle directement du comportement passe-bas de l'oscillateur élémentaire.

Par ailleurs, on constate que, du fait de la périodicité en $2\pi/a$ au sein de la relation de dispersion :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall p \in \mathbb{K} \\ \forall k \in \left[-\frac{\pi}{a}; \frac{\pi}{a}\right] \end{array} \right. , \text{ pour } k' = k + p\frac{2\pi}{a}, \text{ on a : } \frac{\underline{u}_{n+1}(\omega, k')}{\underline{u}_n(\omega, k')} = e^{-ik'a} = e^{-ika} = \frac{\underline{u}_{n+1}(\omega, k)}{\underline{u}_n(\omega, k)} \quad (37)$$

Par conséquent, pour toute onde produite par un valeur quelconque de k' , il est possible de retrouver un mouvement relatif identique des masses les unes par rapport aux autres pour un unique k dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{a}; \frac{\pi}{a}\right]$. Cet intervalle est appelé la *première zone de Brillouin*. Il suffit de restreindre l'étude des fonctions $\omega(k)$ ou $\mathcal{D}(\omega, k)$ à cette intervalle de valeurs de k pour décrire complètement le comportement de la chaîne d'oscillateurs pour tout type d'oscillations.

3.2 Vitesse de phase, vitesse de groupe

De la relation précédente, on déduit la vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = 2\omega_o \frac{\left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|}{k} \quad (38)$$

On constate que la vitesse de phase n'est pas constante, mais dépend de ω , ce qui implique un comportement *dispersif* du système : les ondes de différentes fréquences se propagent à des vitesses distinctes. Si l'on considère un *paquet d'ondes* constitué de trois ondes de pulsations voisines initialement en phase à une date t , on constatera au bout d'un temps Δt que (1) le paquet d'onde se sera élargi, et (2) qu'il se sera propagé à une vitesse inférieure à la vitesse de sa composante la plus rapide (Figure 10).

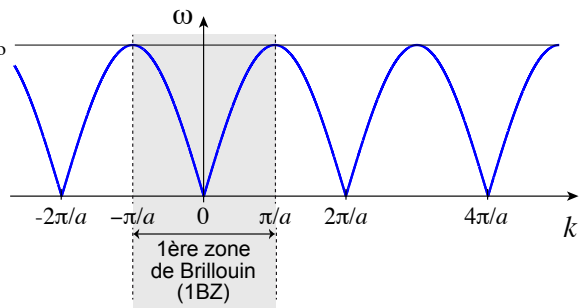


FIGURE 9

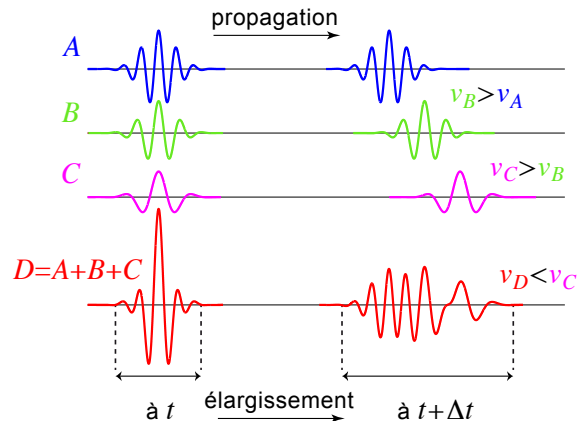


FIGURE 10

3. On utilise ici la formule : $\sin^2(A/2) = 1/2(\cos A - 1)$

Dès lors, puisque v_ϕ dépend de ω , on peut se poser la question suivante : quelle est la vitesse de propagation “apparente” d’une paire d’ondes constituée de deux ondes de pulsations voisines ? Cette question est particulièrement importante car en pratique il est très difficile de produire une onde parfaitement monochromatique, c’est à dire contenant une fréquence absolument unique : les ondes “réelles” se présentent souvent comme la superposition d’une série d’ondes de pulsations ω proches de la pulsation de référence ω_m . On peut par exemple considérer que les pulsations ω sont continûment réparties dans un petit intervalle de pulsations centré sur ω_m et de largeur $\Delta\omega$ (autrement dit : $\omega \in [\omega_m - \Delta\omega/2; \omega_m + \Delta\omega/2]$ avec $\Delta\omega \ll \omega_m$).

Pour deux ondes de même amplitude A_o , de vecteurs d’ondes \vec{k}_1 et \vec{k}_2 voisins, de pulsations ω_1 et ω_2 voisines et de même phase (nulle) à l’origine, l’onde résultante s’écrit :

$$\begin{aligned} A(\vec{r}, t) &= A_o \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t) + A_o \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t) \\ &= 2A_o \underbrace{\cos[\Delta\vec{k} \cdot \vec{r} - \Delta\omega t]}_{\text{“enveloppe”}} \cdot \underbrace{\cos[\vec{k}_m \cdot \vec{r} - \omega_m t]}_{\text{“porteuse”}} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \Delta\vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \\ \Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{k}_m = \frac{1}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \\ \omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \end{cases}$$

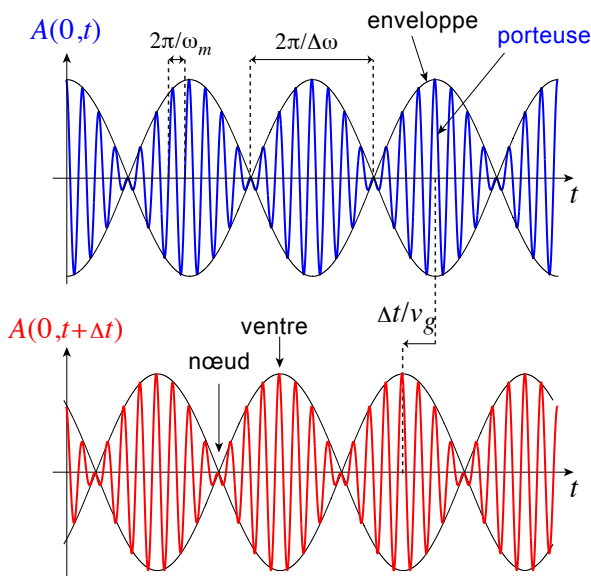


FIGURE 11

Pour $\Delta\vec{k}$ et $\Delta\omega$ faibles, c’est à dire pour $\Delta\omega \ll (\omega_1; \omega_2)$ et $\|\Delta\vec{k}\| \ll (\|\vec{k}_1\|; \|\vec{k}_2\|)$, un phénomène de *battements* apparaît car la première onde (l’enveloppe) produit une modulation d’amplitude de l’onde moyenne (la porteuse) sous-jacente avec une période beaucoup plus grande que celle de l’onde moyenne (Figure 11). Dès lors, la vitesse apparente de propagation de l’énergie de l’onde totale est essentiellement égale à celle de son enveloppe. Cette dernière est donnée par :

$$v_{\text{enveloppe}} = \frac{\Delta\omega}{\|\Delta\vec{k}\|} \quad (40)$$

alors que la vitesse de propagation de l’onde moyenne est :

$$v_{\text{moyenne}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\|\vec{k}_1 + \vec{k}_2\|} \quad (41)$$

En passant à la limite $\Delta\omega \rightarrow 0$ et $\vec{k} \rightarrow \vec{0}$, la vitesse de l’enveloppe tend vers la *vitesse de groupe* v_g , tandis que la vitesse de l’onde moyenne tend vers la *vitesse de phase* v_ϕ :

$$\boxed{v_{\text{enveloppe}} \rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1} \quad v_{\text{moyenne}} \rightarrow v_\phi = \frac{\omega}{k}} \quad (42)$$

La vitesse de groupe correspond à la vitesse de propagation de l’énergie. Par opposition à la vitesse de phase v_ϕ , la vitesse de groupe v_g est une vitesse “physique”, c’est à dire qu’elle correspond à la vitesse de transport de l’information, et ne peut par conséquent dépasser la vitesse de la lumière. On peut obtenir l’expression de v_g en partant de la relation de dispersion $\mathcal{D}(k, \omega) = 0$ puis en différentiant \mathcal{D} :

$$d\mathcal{D} = \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial k} dk + \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\omega} d\omega \stackrel{d\mathcal{D}=0}{\implies} v_g = \frac{d\omega}{dk} = - \left(\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial k}\right) \left(\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\omega}\right)^{-1} \quad (43)$$

Une autre possibilité est de repartir de l'expression de la vitesse de phase $v_\phi = \omega/k$:

$$\omega = v_\phi k \implies v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_\phi + k \left(\frac{dv_\phi}{dk} \right) \quad (44)$$

Dans un cas non dispersif, puisque v_ϕ ne dépend pas de k , on a alors : $v_\phi = v_g = c$.

Dans le cas particulier où $\Delta\omega = 0$ et $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$ (deux ondes de même pulsation et de même amplitude se propageant dans deux directions opposées), la superposition des deux ondes produit une *onde stationnaire*. Une telle onde ne se propage pas, ce qui signifie qu'elle est incapable de transporter de l'énergie. On vérifie bien que dans ce cas $v_g = 0$.

3.3 Modes de vibrations

Dans le cas de la chaîne d'oscillateurs, la relation de dispersion (équation 36) implique (Figure 12) :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = a\omega_0 \cos\left(\frac{ka}{2}\right) = \sqrt{\frac{Ka^2}{m}} \cos\left(\frac{ka}{2}\right) \quad (45)$$

La vitesse de groupe est donc bornée entre 0 et $a\omega_0$. Pour $k \in [0, \pi/a]$, la vitesse de groupe v_g varie en fonction de ω : le régime est dispersif. Examinons la signification de ces deux régimes limites.

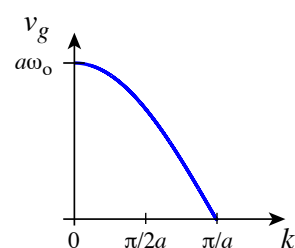


FIGURE 12

3.3.1 Mode acoustique : $k \rightarrow 0$

Lorsque $k \rightarrow 0$, on a $\lambda \gg a$, et donc : $v_g \rightarrow \sqrt{\frac{Ka^2}{m}}$. La vitesse de groupe est indépendante de ω , et $v_g = v_\phi$, résultat que nous avons déjà obtenu plus haut (régime non dispersif). Ce régime correspond au comportement de la chaîne d'oscillateur lorsque celle-ci est traversée par une onde de très grande longueur d'onde. L'onde "perçoit" la chaîne comme un milieu continu, et ne distingue pas les masses les unes des autres. Le mode de vibration correspondant au passage d'une onde longitudinale pour $\lambda \gg a$ est une vibration *acoustique*. Puisque $k \rightarrow 0$, on a :

$$\underline{u}_n(t) = \underline{u}(t) = \underline{A}e^{i\omega t} \quad (46)$$

En d'autres termes, ce passage à la limite indique que tous les éléments de la chaîne vibrent de manière identique (en phase et dans le même sens), ce qui se traduit par une translation globale de la chaîne.

Comment relier les paramètres "microscopiques" de l'oscillateur élémentaire (m, K) aux paramètres "macroscopiques" de l'onde acoustique ? Cette dernière est caractérisée par sa vitesse de propagation et par l'*impédance acoustique* Z , définie comme le rapport entre (l'amplitude de) la pression acoustique σ et (l'amplitude de) la vitesse de déplacement des éléments de masse V :

$$Z = \frac{|\sigma|}{|V|} \quad \text{avec} \quad V \equiv \frac{\partial u}{\partial t} \quad (47)$$

En notant ϵ la déformation longitudinale et E le module d'Young, la loi de Hooke en élasticité permet de relier σ et ϵ :

$$\sigma = E\epsilon \quad \text{avec} \quad \epsilon \equiv \frac{\partial u}{\partial x} \quad (48)$$

Puisque u possède une structure d'OPPH (équation 30), on peut relier sa dérivée spatiale ϵ et sa dérivée temporelle \dot{u} :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{avec} : c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{Ka^2/m}) \quad (49)$$

En introduisant $\rho = m/a$ la densité moyenne de la chaîne (masse linéique), on en déduit :

$$Z = \sqrt{\rho E} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E = Ka & : \text{module d'Young} \\ \rho = m/a & : \text{densité} \end{cases} \quad (50)$$

Finalement, on retrouve bien l'expression de la vitesse du son dans les solides :

$$v_g = v_\phi = c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (51)$$

3.3.2 Onde stationnaire : $k \rightarrow \pi/a$

Lorsque $k \rightarrow \pi/a$, on obtient $v_g = 0$. Ce comportement, dans lequel l'onde perd son caractère propagatif, est celui d'une *onde stationnaire*. On a alors :

$$\underline{u}_n(t) = \underline{A}e^{i(\omega t - n\pi)} = \underline{A}(-1)^n e^{i\omega t} \quad (52)$$

Deux éléments successifs de la chaîne vibrent ainsi en opposition de phase l'un par rapport à l'autre.

On a déjà vu que cette solution particulière, dans laquelle les composantes spatiales et temporelles des vibrations sont découplées, correspond au mode propre d'ordre N pour une chaîne de longueur finie constituée de N oscillateurs élémentaires, de longueur totale $L = Na$. Pour cette chaîne de dimension finie, les conditions aux limites imposent : $u_o(t) = u_N(t) = 0, \forall t$. L'ensemble des N modes propres s'écrivent alors :

$$\underline{u}_n(t) = \underline{A}e^{i\omega t} \sin(kna) \quad \text{avec} \quad k = \frac{n\pi}{L} = \frac{n\pi}{Na} \quad (1 \leq n \leq N) \quad (53)$$

On retrouve bien le résultat ci-dessus pour $n = N$.

3.3.3 Onde évanescente : $\omega > 2\omega_o$

Précédemment, on a rapidement restreint l'ensemble des vibrations "physiques" satisfaisant la relation de dispersion "au carré" (équation 34) en forçant ω à appartenir à l'intervalle $[0; 2\omega_o]$. Dans ces conditions, la pulsation ω est réelle (et positive) et la norme du vecteur d'onde k est réelle. Supposons maintenant que nous permettons à k d'appartenir à l'ensemble des complexes (on notera alors $\underline{k} = k' + ik''$). Nous cherchons alors les solutions de l'équation du mouvement (équation 29) sous la forme :

$$\underline{u}_n(t) = \underline{A}e^{i\omega t} e^{-i\underline{k}na} \quad (\underline{k} = k' + ik'' \in \mathbb{C}) \quad (54)$$

Ces solutions (si elles existent) vérifient alors :

$$-\omega^2 = \omega_o^2 [e^{-i\underline{k}na} + e^{+i\underline{k}na} - 2] \xrightarrow{\times e^{-i\underline{k}na}} -\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 e^{-i\underline{k}na} = e^{-2i\underline{k}na} + 1 - 2e^{-i\underline{k}na} \quad (55)$$

En posant $\underline{r} = e^{-i\underline{k}na}$ (d'où $\underline{r} \in \mathbb{C}$ a priori), cette équation peut être mise sous la forme d'un polynôme du second degré :

$$\underline{r}^2 + \left[\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 - 2 \right] \underline{r} + 1 = 0 \quad (56)$$

En toute généralité, une équation de ce type possède toujours deux racines complexes $\underline{r}_{1,2}$, chacune correspondant à $\underline{k}_{1,2}$. Dans l'hypothèse $\omega > 2\omega_o$, le discriminant de ce polynôme est alors positif, ce qui signifie que les racines $r_{1,2}$ sont alors *réelles* (et donc positives, étant donnée leur définition). En outre, l'équation 56 impose entre les racines $r_{1,2}$ la relation :

$$r_1 \times r_2 = \frac{C}{A} = 1 \quad (57)$$

Par conséquent, si une des deux racines est supérieure à 1, l'autre est alors nécessairement inférieure à 1. Fixons par exemple $r_1 < 1 < r_2$. En décomposant les parties réelles et imaginaires de $r_{1,2}$:

$$r = e^{-i\underline{k}na} = e^{-i(k'+ik'')na} = e^{k''na} [\cos(k'na) - i \sin(k'na)] \quad , \quad (58)$$

on déduit que la condition $r_{1,2} \in \mathbb{R}^+$ implique que $\underline{k}_{1,2}$ doivent être imaginaires pures (i.e. $k'_{1,2} = 0$ et $k''_{1,2} \neq 0$), de sorte que les solutions de l'équation du mouvement sont de la forme :

$$\underline{u}_n(t) = \underline{A}e^{k''na} e^{i\omega t} = \left(e^{k''a}\right)^n (\underline{A}e^{i\omega t}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r_1 = e^{k''_1na} < 1 \Rightarrow k''_1 < 0 \\ r_2 = e^{k''_2na} > 1 \Rightarrow k''_2 > 0 \end{cases} \quad (59)$$

On constate que pour $n \rightarrow +\infty$, le terme en $\left(e^{k''a}\right)^n$ produit une divergence des oscillations $|\underline{u}_n(t)| \rightarrow +\infty$ pour $r_2 = \left(e^{k''_2a}\right)^n > 1$. Cette solution n'est pas "physique" car elle ne respecte pas à l'évidence

la loi de conservation de l'énergie. En revanche, pour $r_1 = \left(e^{k_1'' a}\right)^n < 1$, l'amplitude des oscillations décroît exponentiellement car $\left(e^{k_1'' a}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0$. L'onde correspondant à ce comportement est une *onde évanescente*. Une telle onde ne permet pas de faire pénétrer profondément les vibrations à l'intérieur du système. Par conséquent, lorsqu'on impose une oscillation de pulsation $\omega > 2\omega_o$ sur la frontière de la chaîne d'oscillateurs, l'énergie associée à cette oscillation ne peut être *transmise* à l'intérieur de la chaîne. Cette énergie est alors *réfléchie* et renvoyée dans la direction opposée.

Références

- Marshall, A. G., Verdun, F. R., 1989. Fourier transforms in NMR, optical, and mass spectrometry. Elsevier.
- Nicolas, M., 2009. Ondes et électromagnétisme. Dunod.
- Orfanidis, S. J., 2002. Electromagnetic waves and antennas. <http://eceweb1.rutgers.edu/~orfanidi/ewa>.
- Pérez, J.-P., Thibault, R., 2001. Mécanique : fondements et applications : avec 300 exercices et problèmes résolus. Dunod.
- Strang, G., Aarikka, K., 1986. Introduction to applied mathematics. Vol. 16. Wellesley-Cambridge Press Wellesley, MA.
- Taylor, J. R., Becherrawy, T., Boudier-Cusset, A., 2012. Mécanique classique. De Boeck.
- Zangwill, A., 2012. Modern electrodynamics. Cambridge University Press.