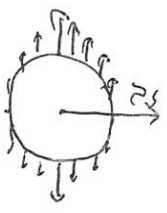


1) Rotation.

$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\vec{V} = \omega \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r y \\ r x \\ 0 \end{pmatrix}$

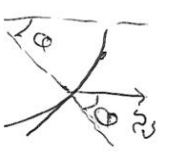
$\vec{F} = \vec{r}_1 \wedge (\omega \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r y \\ r x \\ 0 \end{pmatrix} = -r^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$



• En coordonnées sphériques

$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$ $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}$



ou avec un projecteur.

$\vec{r}_1 = \cos \theta \vec{e}_z$
 $- \sin \theta \vec{e}_\rho$

avec $\vec{V} = \omega \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2$

$= r \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r^2 \sin \theta \vec{e}_\varphi$

Force Coulomb

$\vec{F}_S = \omega \vec{r}_1 \wedge \vec{V} = \omega r^2 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix}$
 $= -\omega r^2 \sin \theta \vec{e}_\theta$

Le dipôle

① On note $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

on a (\vec{e}_x, \vec{e}_y) dans l'équateur (ex vers Greenwich) et \vec{e}_z dirige vers N le nord géographique.

$\vec{u} \cdot \vec{e}_i = u_1 \frac{d}{dx} + u_2 \frac{d}{dy} + u_3 \frac{d}{dz}$

$\Rightarrow U = + \frac{\mu_0 M_1}{4\pi r^3} [u_1 x + u_2 y + u_3 z]$

car $\frac{d}{dx} \frac{1}{r} = -\frac{x}{r^3} \dots$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z.$$

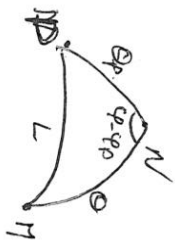
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\pi^2} \right) = \frac{1}{\pi^2} - \frac{3x}{\pi^2}$$

$$\rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_1}{\pi^2}$$

$$\left((1 - 3x/\pi^2) u_1 \right. \\ \left. (1 - 3y/\pi^2) u_2 \right. \\ \left. (1 - 3z/\pi^2) u_3 \right)$$

$$\vec{OH} = a$$

$$\begin{pmatrix} a \sin \theta \cos \varphi \\ a \sin \theta \sin \varphi \\ a \cos \theta \end{pmatrix}$$



Trigonométrie sphérique :



$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

$$\Rightarrow \cos L = \cos \theta_p \cos \theta + \sin \theta_p \sin \theta \cos (\varphi - \varphi_p).$$

$$U = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_1}{\pi^2} (u_1 x + u_2 y + u_3 z)$$

avec u_1, u_2, u_3 par θ_p, φ_p

$$\rightarrow U = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_1}{\pi^2} [\sin \theta_p \cos \varphi_p \sin \theta \cos \varphi + \sin \theta_p \sin \varphi_p \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \cos \theta_p]$$

$$\rightarrow U = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_1}{\pi^2} [\sin \theta_p \sin \theta \cos (\varphi - \varphi_p) + \cos \theta \cos \theta_p]$$

$$\Rightarrow U = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_1}{\pi^2} \cos L$$

2) Dans le repère géocentrique

On note $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ une base oré \vec{e}_3 dirigée vers le Nord géographique et (\vec{e}_1, \vec{e}_2) dans l'équateur géographique.

Dans ce repère, $\vec{u} = \vec{e}_3$

$$\text{or } \vec{u} \cdot \vec{\sigma} = \frac{d}{dx_3} \quad \text{or } x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\rightarrow (\vec{u} \cdot \vec{\sigma}) \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{x_3}{x^3} \quad \text{or } x_3 = x \cos L$$

$$\Rightarrow U = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_1}{\pi^2} \cos L$$

On introduit les vecteurs orthogonaux liés au repère polaire :

$(\vec{e}_r, \vec{e}_z, \vec{e}_\phi)$ ou ϕ l'angle polaire mesurée [ou n'ou e par le \vec{e}_z].

$$\vec{B} = \vec{B} \cup = \begin{pmatrix} \frac{d}{dr} \cup \\ \frac{1}{r} \cup \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Z_g \\ X_g \\ Y_g \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow Y_g = 0 ; X_g = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{H_1}{r^3} \text{ au } L$$

$$Z_g = +\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{H_1}{r^3} \text{ au } L$$

ou par la symétrie $L=0 \Rightarrow X_g = Y_g = 0$

Z_g maximum

pour $L = \pi/2, Z_g = Y_g = 0$ et X_g max.



ligne de champ.

3) Dans le plan horizontal à h et vertical ...

$$\vec{B} = H \vec{e}_z + Z \vec{e}_z = H \cos \theta \vec{e}_z + H \sin \theta \vec{e}_\phi - Z \vec{e}_z$$

Dans le repère polaire $\vec{B} = H \vec{e}_z - Z \vec{e}_z$

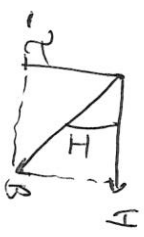
$$\rightarrow X = X_g \cos \theta$$

$$Y = X_g \sin \theta$$

$$Z = Z_g$$

$$= H \cos \theta \vec{e}_z + H \sin \theta \vec{e}_\phi - Z \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow H \vec{e}_z = -\frac{Z}{H}$$

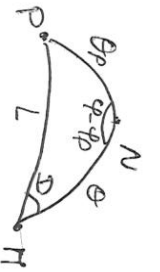


$$\rightarrow H \vec{e}_z = -\frac{Z}{H} = +\frac{Z \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\rightarrow \boxed{H \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1}$$

Comme on a l'expression du champ, on peut calculer la polarisabilité du dipôle magnétique.

On reprend la lunette sphérique:



$$\rightarrow \cos L = \cos \theta_p \cos \theta + \sin \theta \sin \theta_p \cos (\phi - \phi_p)$$

\rightarrow avec l'équation des sinus:

$$\frac{\sin L}{\sin (\phi - \phi_p)} = \frac{\sin \theta_p}{\sin \theta} \rightarrow \boxed{\sin \theta = \frac{\sin \theta_p \sin (\phi - \phi_p)}{\sin L}}$$

En résumé, les relations permettant de calculer les coordonnées D, I, H et Z sur un point N (θ, ϕ) connaissant le moment du dipôle N, et les coordonnées (θ_p, ϕ_p) du pôle géomagnétique Nord, sont:

$$\cos L = \cos \theta \cos \theta_p + \sin \theta \sin \theta_p \cos (\phi - \phi_p)$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta_p \sin (\phi - \phi_p)}{\sin L}$$

$$\tan I = 2 \cot \phi L$$

$$H = -\frac{\mu_0 M_1}{4\pi a^3} \sin L$$

$$Z = 2 \frac{\mu_0 M_1}{4\pi a^3} \cos L$$