Remise à niveau en mathématiques

Devoir à rendre à la scolarité (G. Pernat) au plus tard le 12 Octobre 2007

Chaque question a le même poids.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en x de xe^{x+1}
2. Calculer le rotationnel et la divergence du gradient du potentiel scalaire suivant: $\phi = 3x^2 - 2y^4 + 3z^2$.
3. Soit la fonction: $f(r,\theta,\varphi) = r^2[3\cos^2\theta - 1]$. Calculer en coordonnées sphériques $\vec{\nabla} f$, $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$
4. Trouver les racines du polynome $x^3 + x^2 + x + 1$.
5. Soit un ellispoide de révolution, de demi-grand axe a et de demi petit-axe c. Sa surface est décrite , en cartésiennes, par l'équation:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
On note $\frac{a-c}{a} = \alpha$ l'aplatissement de l'ellipsoide. Ecrire cette surface en utilisant les coordonnées sphériques. On exprimera le rayon r comme une fonction de θ, φ, en supposant $\alpha << 1$ (on fera un développement limité au premier ordre en α).
6. Calculer la distance à la surface de la sphère terrestre entre Paris (colatitude 41.16^o, longitude $2.34^o E$) et New York (colatitude 49^o, longitude $72^o W$).
7. En utilisant les notations indicielles, montrer que
$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$
Rappel: le laplacien d'un vecteur $\vec{A}$ est un vecteur dont la ieme composante est le laplacien de la composante A_i.
8. Résoudre l'équation différentielle $x'' + 16x = 0$.
Quel type de système physique cette équation décrit-elle ?
Déterminer la pulsation propre correspondante.
9. Soit la fonction créneau 2π periodique :
$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si} \quad (2k - \frac{1}{2})\pi < t < (2k + \frac{1}{2})\pi \\ -\frac{\pi}{4} & \text{si} \quad (2k + \frac{1}{2})\pi < t < (2k + \frac{3}{2})\pi \end{cases}$$
avec k entier. Calculer les coefficients a_n^m et b_n^m de la décomposition en série de Fourier de $f(t)$.