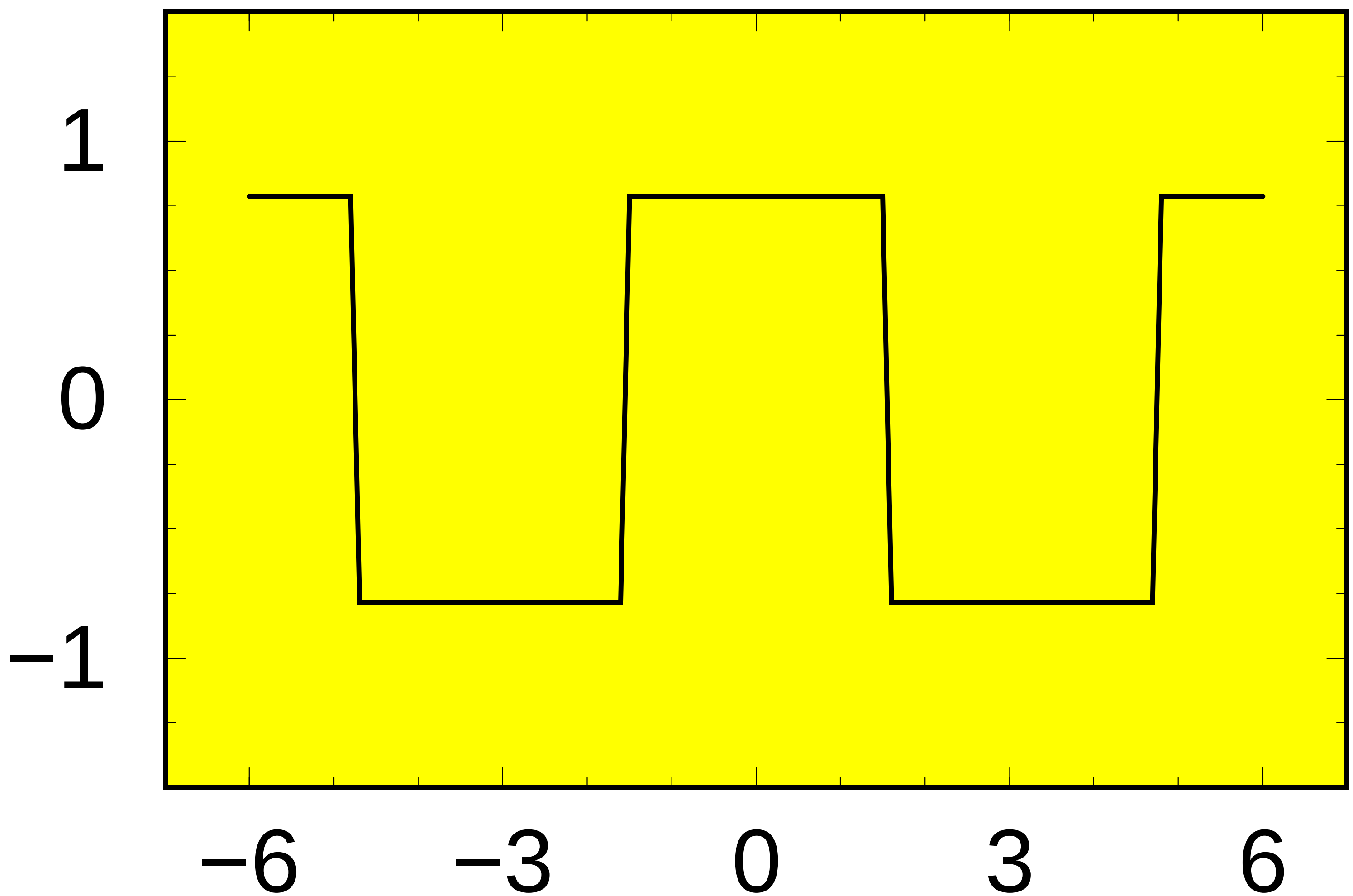
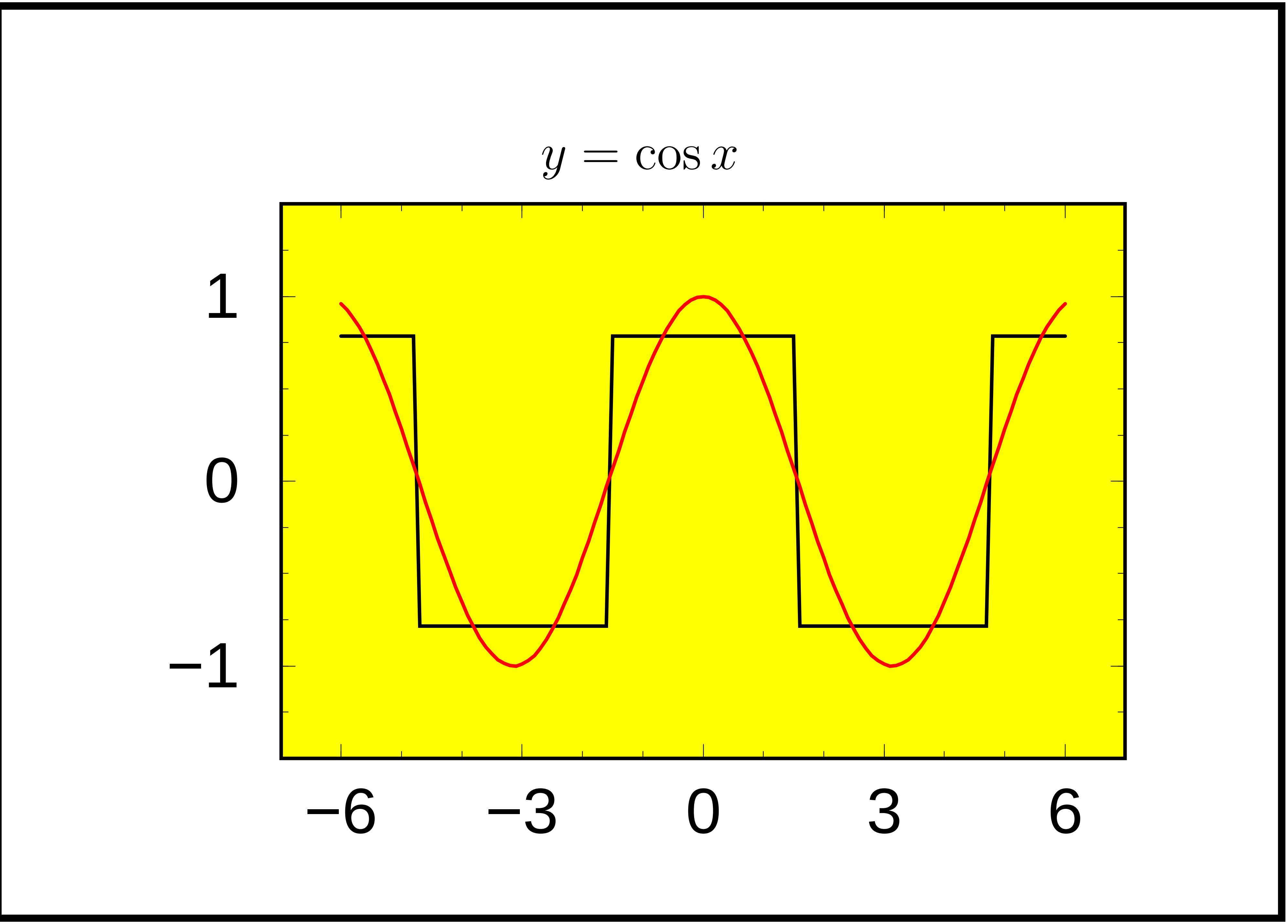
Séries de Fourier

• Outil pratique qui permet de transformer des fonctions en sommes de fonctions périodiques (sinus et cosinus) plus simples.

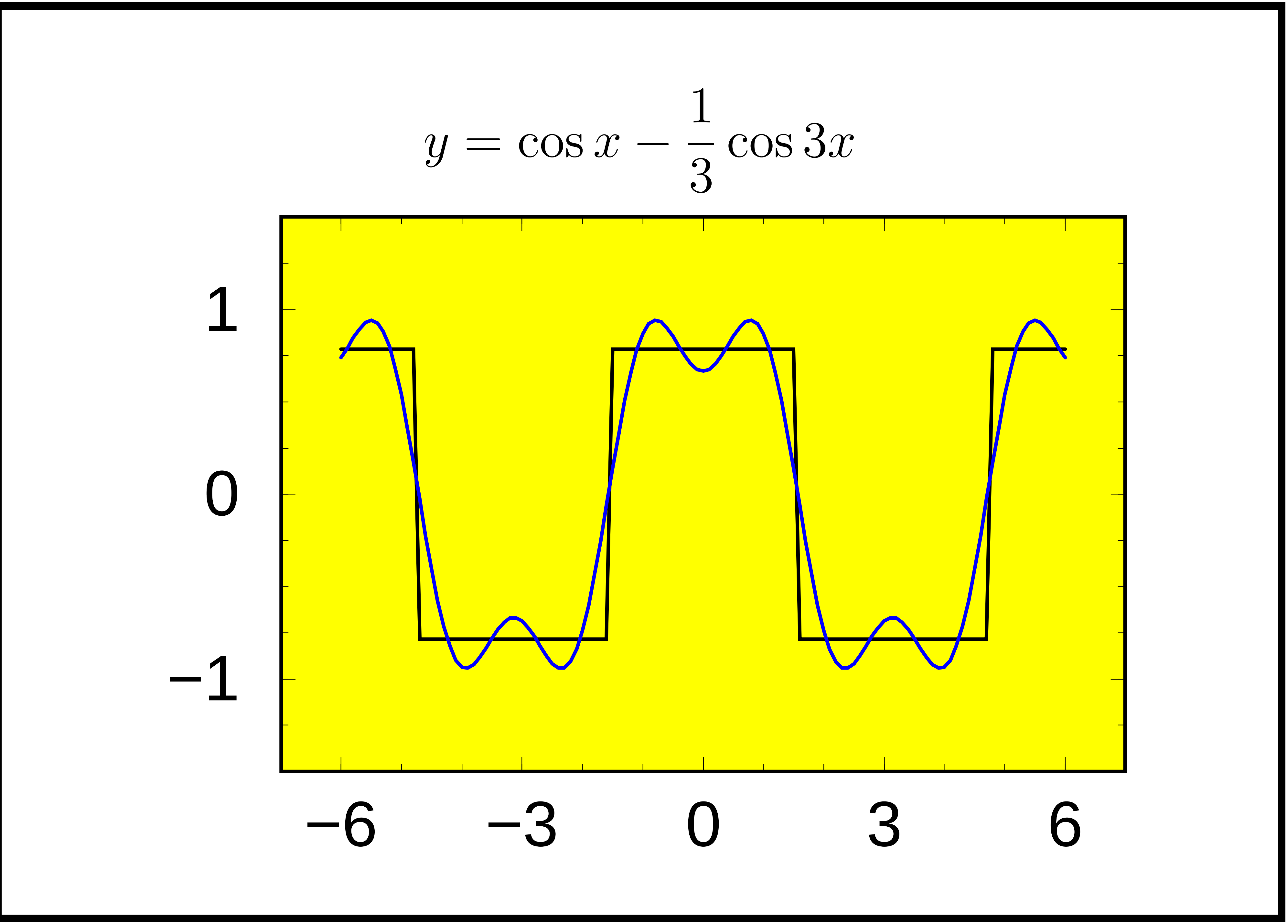
• Il est plus facile de connaître les propriétés de la fonction en analysant les propriétés de chacune des composantes.

Exemple: créneau de période π en Fourier

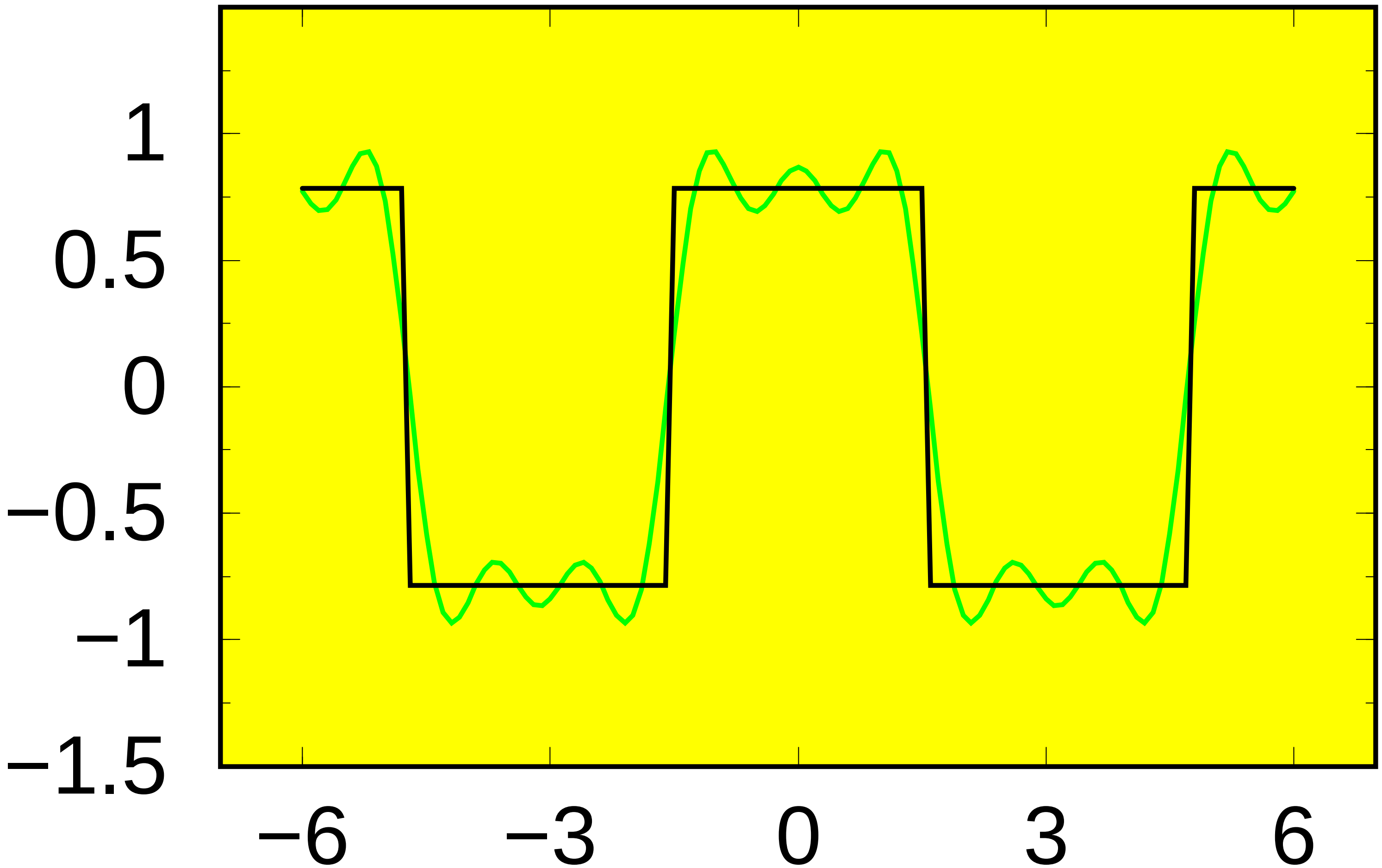




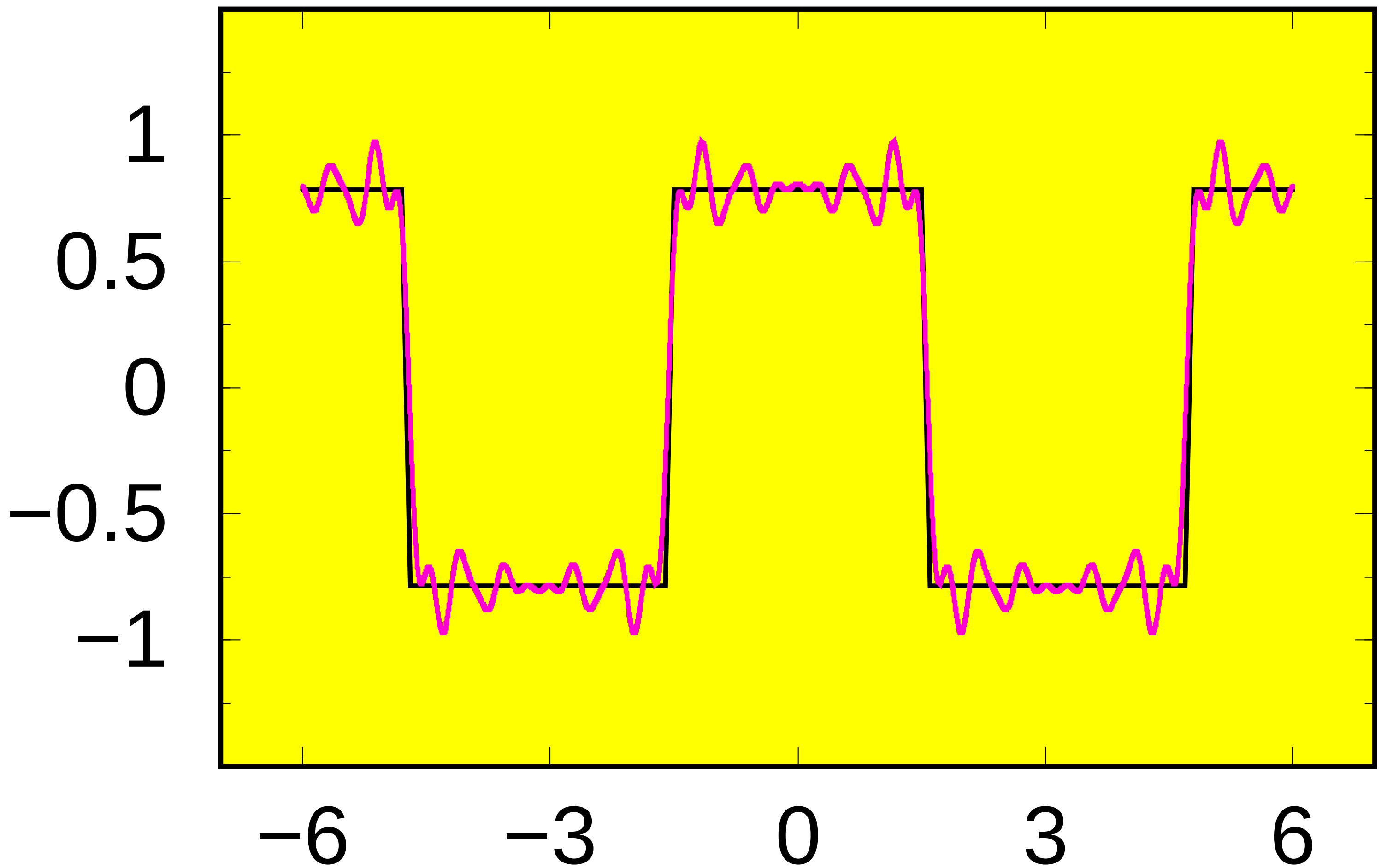
$y = \cos x$
1
0
−1
−6
−3
0
3
6


$y = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x$
1
0
−1
−6
−3
0
3
6

$$y = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x$$



$$y = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x \ldots - \frac{1}{19}\cos 19x + \frac{1}{21}\cos 21x$$



Séries de Fourier

Soit une fonction **périodique**, de période T. On peut décomposer f sous la forme d'une somme infinie de signaux sinusoidaux:

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \qquad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

• a_o: terme constant

•$a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$: composante fondamentale caractérisée par les valeurs a_1 et b_1.

• $... + a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) + ...$: harmoniques (multiples de la fréquence principale) caractérisées par les valeurs des autres coefficients de Fourier a_n et b_n.

Coefficients de Fourier

a_n et b_n nombres réels.

$$a_o = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt$$

Harmoniques de rang n

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = A_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$$

avec

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{et} \quad \tan\varphi_n = \frac{b_n}{a_n} \quad \text{si} \quad a_n \neq 0$$

A_n représente l'amplitude, $\frac{2\pi}{n\omega}$ la période et φ_n la phase.

Droite en Fourier

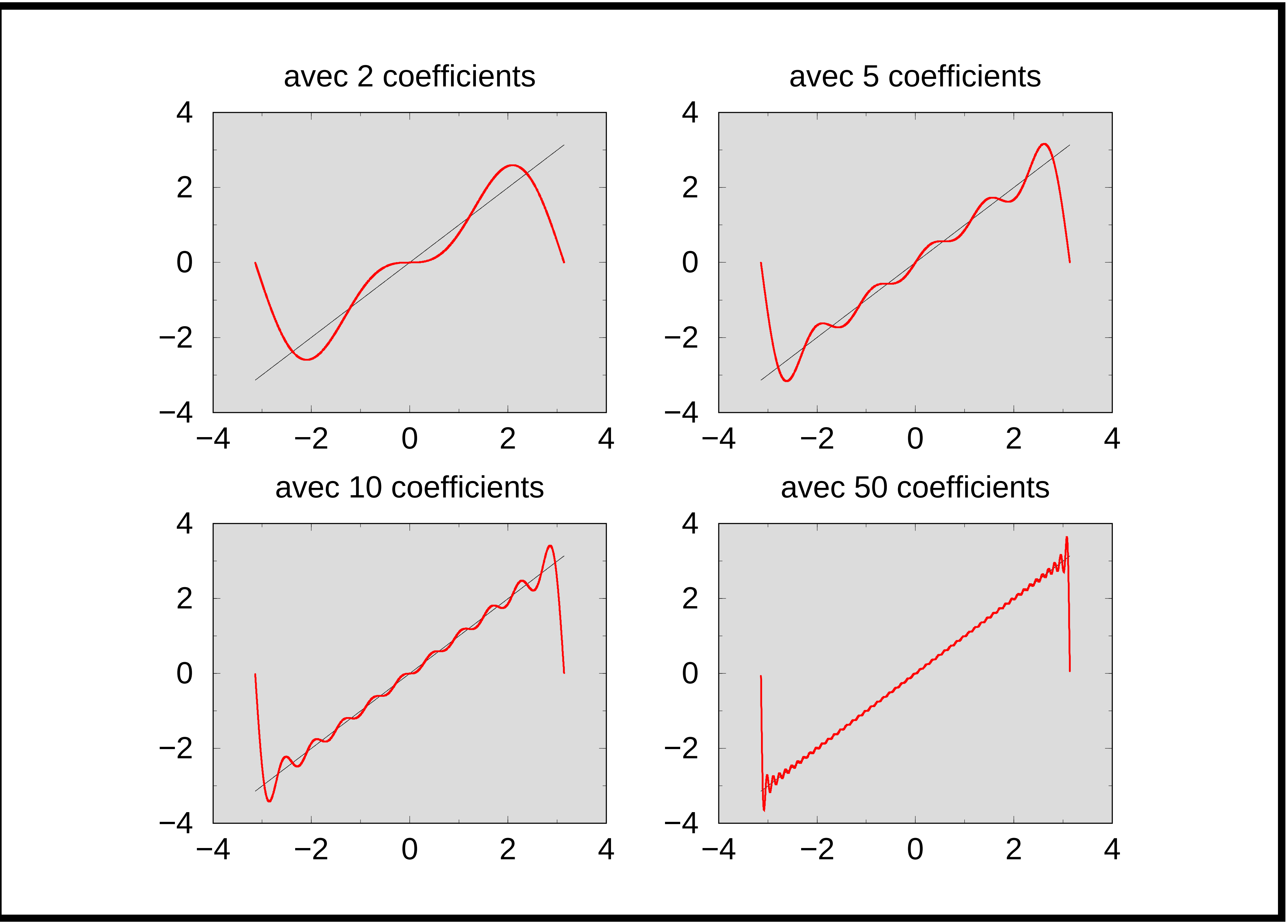
- Soit une fonction $f(x) = x$ dans l'intervalle $-\pi < x < \pi$.
- Détermination des coefficients:

$$a_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx) dx = \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx) dx = -\frac{1}{\pi}\left[x\frac{\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2}{n}\ (-1)^n$$

$$\Rightarrow \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}\ (-1)^n\ \sin nx$$



avec 2 coefficients
avec 5 coefficients
avec 10 coefficients
avec 50 coefficients
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4

Propriétés

- f réelle et paire $\Rightarrow$ f(-t)=f(t)

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T \underbrace{f(t)\sin(\frac{2\pi}{T}nt)}_{fonction\ \ impaire}\,dt = 0$$

- f réelle et impaire $\Rightarrow$ f(-t)=-f(t)

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T \underbrace{f(t)\cos(\frac{2\pi}{T}nt)}_{fonction\ \ impaire}\,dt = 0$$

Propriétés

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -a_n \frac{2\pi n}{T} \sin(\frac{2\pi}{T} nt) + b_n \frac{2\pi n}{T} \cos(\frac{2\pi}{T} nt)$$

D'où:

$$\begin{cases} a_n(f') = \frac{2\pi n}{T} b_n(f) \\ \\ b_n(f') = -\frac{2\pi n}{T} a_n(f) \\ \end{cases}$$

f étant une série entière, on obtient f' en dérivant terme à terme.

Coefficients complexes

Série de Fourier:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i}{T} kt} \quad \text{avec } c_k \text{ complexe :} \quad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi i}{T} kt} dt$$

$$\begin{cases} a_o = c_o \\ a_k = c_k + c_{-k} \\ b_k = i(c_k - c_{-k}) \end{cases}$$

Propositions:

- unicité du développement
- $\lim\limits_{|k|\to\infty} c_k = 0$
- Dérivation:

$$c_k\left(\frac{d^m f}{dt^m}\right) = \left(\frac{2\pi i k}{T}\right)^m c_k(f)$$

Transformée de Fourier

• On considère une fonction non périodique comme une fonction de période infinie
• $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$ varie de $-\infty$ à $+\infty$.
• Si n tend vers l'infini, ω_n tend vers une variable continue ω
$\Rightarrow$ La série de Fourier devient:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{avec} \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Transformée de Fourier - Définition

On appelle Transformée de Fourier d'une fonction f

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i u x} f(x) dx$$

On note $F = TF[f]$.

Remarque:

ux doit être sans dimension

- Si x est le temps, u sera une fréquence en Hz
- Si u est une longueur, u sera un nombre d'onde en m^{-1}.

Transformée de Fourier inverse:

$$F^{-1}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i u x} f(x) dx$$

Propriétés

- Dérivation:

$$\frac{d^n F(u)}{du^n} = (-2\pi i)^n \;\; TF[x^n f(x)]$$

- Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction:

$$TF\Big[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\Big] = \Big(2\pi i u\Big)^n \;\; TF[f]$$

- Translation et similitude:

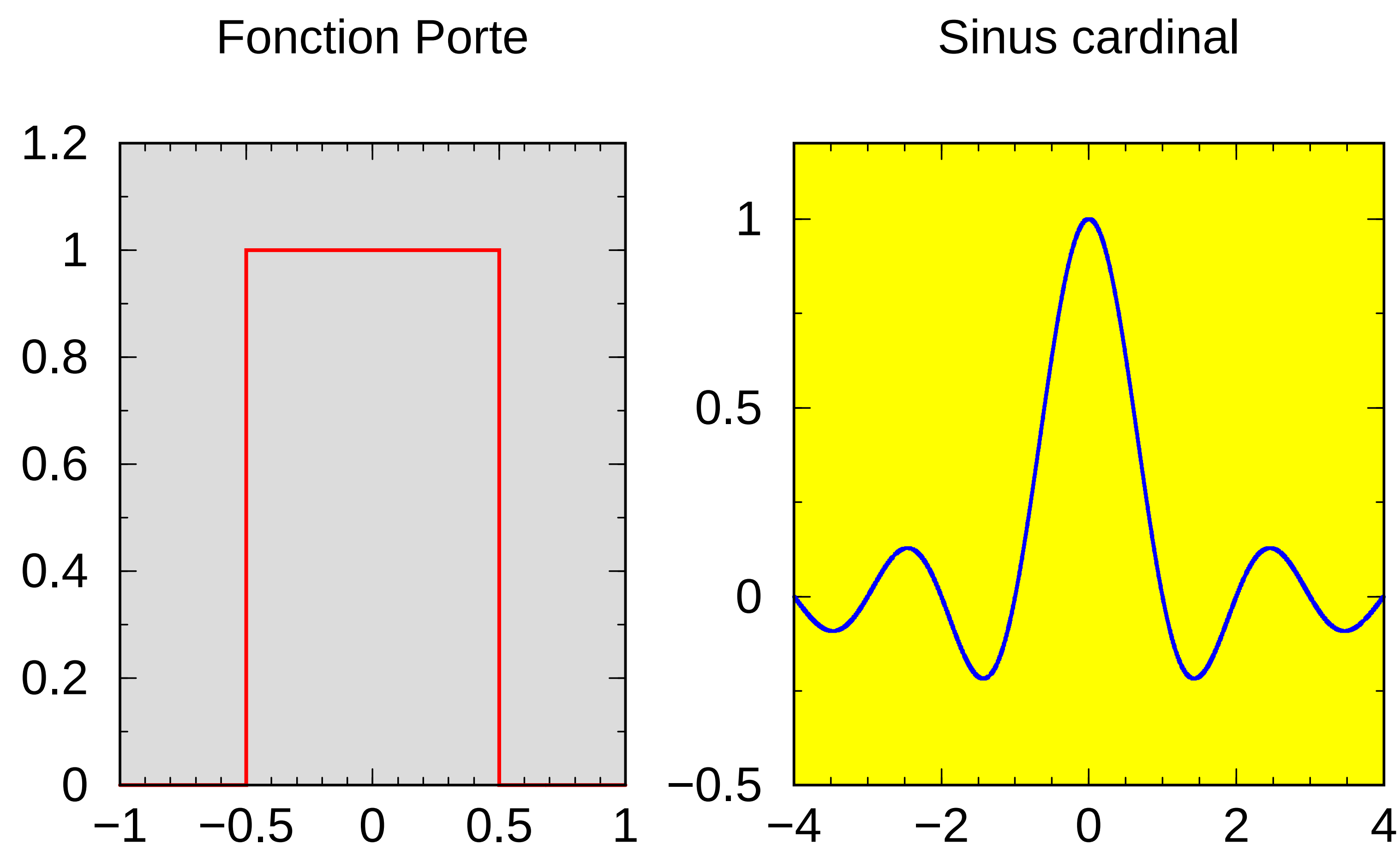
$$TF[f(x-a)] = e^{-2\pi i u a} TF[f]$$

$$TF[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F\big(\frac{u}{a}\big)$$

Exemple: Transformée de Fourier de la focntion Porte

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 \ \text{si} \ |x| < \frac{1}{2} \\ 0 \ \text{si} \ |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} TF[\Pi](u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i u x} \Pi(x) dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i u x} dx \\ &= \frac{e^{\pi i u} - e^{-\pi i u}}{2\pi i u} \\ &= \frac{\sin \pi u}{\pi u} \end{aligned}$$


Fonction Porte
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−1
−0.5
0
0.5
1
Sinus cardinal
1
0.5
0
−0.5
−4
−2
0
2
4