

COURS 1

1 Coordonnées sphériques

- 1.1 Changement de coordonnées
- 1.2 Coordonnées sphériques orthogonales
- 1.3 Vecteurs unités dans le système de coordonnées sphériques
- 1.4 Eléments d'arc et de volume
- 1.5 Matrices de changement de base

2 Trigonométrie sphérique

- 2.1 Grand cercle
- 2.2 Le triangle sphérique
- 2.3 Relations entre les angles et les côtés d'un triangle sphérique
- 2.4 Exemples
 - 2.4.1 Exercice 1
 - 2.4.2 Calcul de la distance entre Paris et Moscou
 - 2.4.3 Equation d'un petit cercle sur la sphère
 - 2.4.4 Equation d'un grand cercle sur la sphère

3 Cinématique sur la sphère

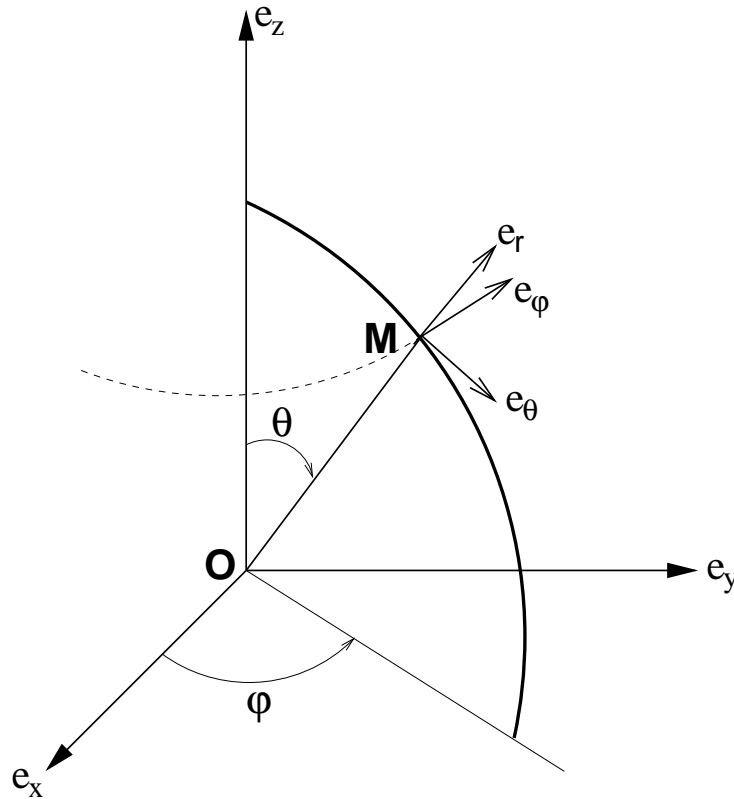
1 Coordonnées sphériques

Du fait de sa forme presque sphérique, la Terre s'étudie au mieux à partir d'une représentation de tous les paramètres dans un système de coordonnées sphériques.

1.1 Changement de coordonnées

La position d'un point M peut être spécifié soit par (x, y, z) ses coordonnées cartésiennes soit par (r, θ, φ) ses coordonnées sphériques.

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta \quad (1)$$



L'équation (1) peut se résoudre en r, θ, φ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}; \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad (2)$$

$$\text{avec} \quad 0 \leq r \leq \infty; \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3)$$

La restriction (3) assure l'unicité de la correspondance entre (x, y, z) et (r, θ, φ) . Les ensembles d'équations (1) ou (2) définissent un changement de coordonnées.

1.2 Coordonnées sphériques orthogonales

Les surfaces $r = cste$ (coquille), $\theta = cste$ (parallèle) et $\varphi = cste$ (méridien) se coupent chacune deux à deux suivant des courbes appelées *courbes ou droite de coordonnées*. Les courbes de coordonnées r, θ, φ sont analogues aux axes de coordonnées x, y, z d'un repère rectangulaire. Les surfaces de coordonnées se coupent en formant des angles droits: le système de coordonnées sphériques est orthogonal.

1.3 Vecteurs unités dans le système de coordonnées sphériques

Soit la base cartésienne orthonormée de vecteurs unitaires \vec{e}_x, \vec{e}_y et \vec{e}_z .

A partir des vecteurs normaux aux surfaces de coordonnées, on peut définir une base dite *naturelle* $\vec{E}_r, \vec{E}_\theta$ et \vec{E}_φ telle que:

$$\begin{cases} \vec{E}_r = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \\ \vec{E}_\theta = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \\ \vec{E}_\varphi = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (4)$$

Cette base est orthogonale mais non normée: On note

$$h_r = \sqrt{\vec{E}_r \cdot \vec{E}_r}; \quad h_\theta = \sqrt{\vec{E}_\theta \cdot \vec{E}_\theta}; \quad h_\varphi = \sqrt{\vec{E}_\varphi \cdot \vec{E}_\varphi}$$

Les quantités h_r, h_θ et h_φ s'appellent les facteurs de proportionnalité:

$$h_r = 1; \quad h_\theta = r; \quad h_\varphi = r \sin \theta$$

On peut définir une base physique orthonormée:

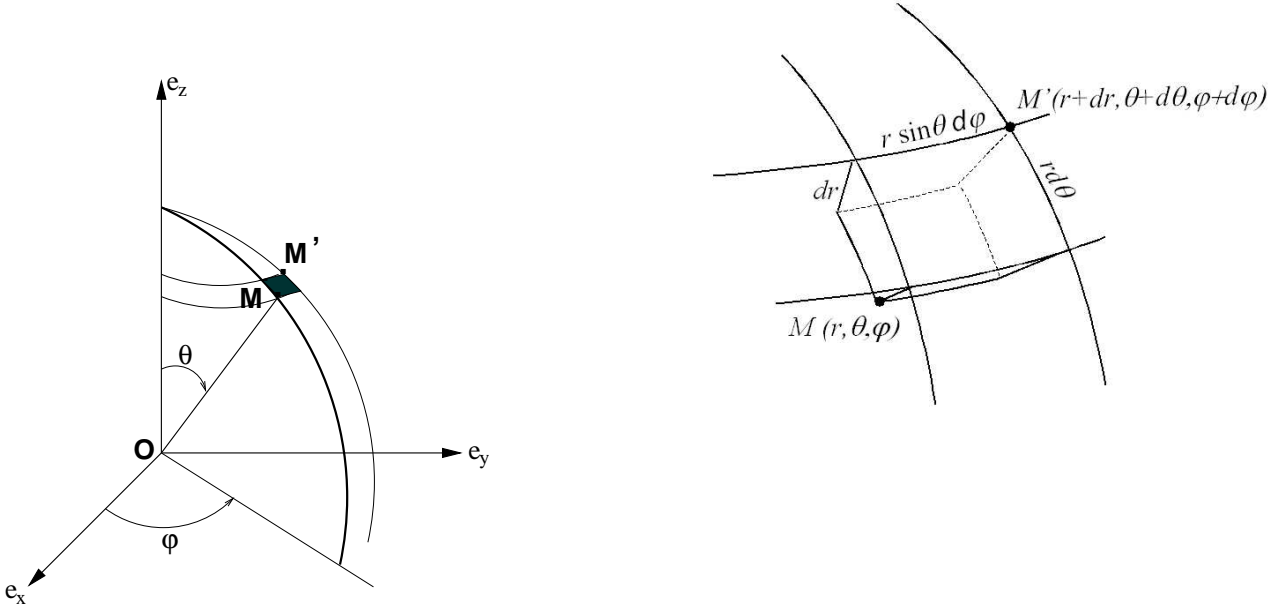
$$\begin{cases} \vec{e}_r = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \\ \vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \\ \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (5)$$

On a alors:

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \quad (6)$$

1.4 Éléments d'arc et de volume

Soit un point M' proche du point M de coordonnées cartésiennes $[x + dx, y + dy, z + dz]$ et sphériques $[r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi]$. Alors que les éléments de longueurs de $\overline{MM'}$ projetés sur $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ seront $[dx, dy, dz]$, ceux projetés dans les directions $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ seront $dr, r d\theta, r \sin \theta d\varphi$.



On peut calculer l'abscisse curviligne $ds^2 = \overline{MM'} \cdot \overline{MM'}$:

$$\begin{aligned} ds^2 &= h_r^2 dr^2 + h_\theta^2 d\theta^2 + h_\varphi^2 d\varphi^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \end{aligned} \quad (7)$$

L'élément de volume pour le système de coordonnées sphériques est donné par :

$$\begin{aligned} dV &= h_r h_\theta h_\varphi dr d\theta d\varphi \\ &= r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (8)$$

1.5 Matrices de changement de base

On peut exprimer les coordonnées cartésiennes $[A_x, A_y, A_z]$ d'un vecteur \vec{A} , en fonction des ses coordonnées sphériques $[A_r, A_\theta, A_\varphi]$ et vice-versa:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z \\ &= A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\varphi \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Ou encore en introduisant une matrice de passage:

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} \quad (9)$$

Ou

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (10)$$

Exercice: Soit un ellipsoïde de révolution, de demi-grand axe a et de demi petit-axe c . Sa surface est décrite, en cartésiennes, par l'équation:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Ecrire cette surface en utilisant les coordonnées sphériques. On exprimera le rayon r comme une fonction de θ , φ . On note $\frac{a-c}{a} = \alpha$ l'aplatissement de l'ellipsoïde.

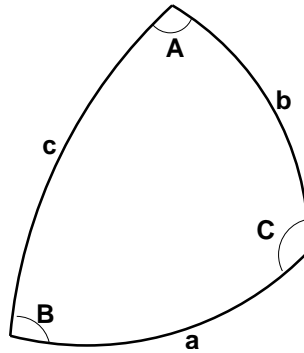
2 Trigonométrie sphérique

2.1 Grand cercle

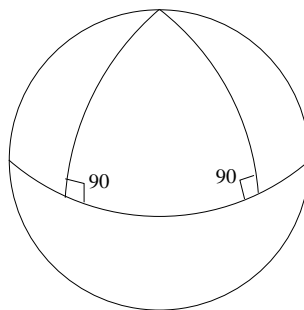
- Sur une sphère de rayon R , un grand cercle est un cercle de rayon R dont le centre est celui de la sphère (ex: les méridiens sont des grands cercles)
- Sur la sphère, la **géodésique** (le plus court chemin d'un point à un autre) est un grand cercle

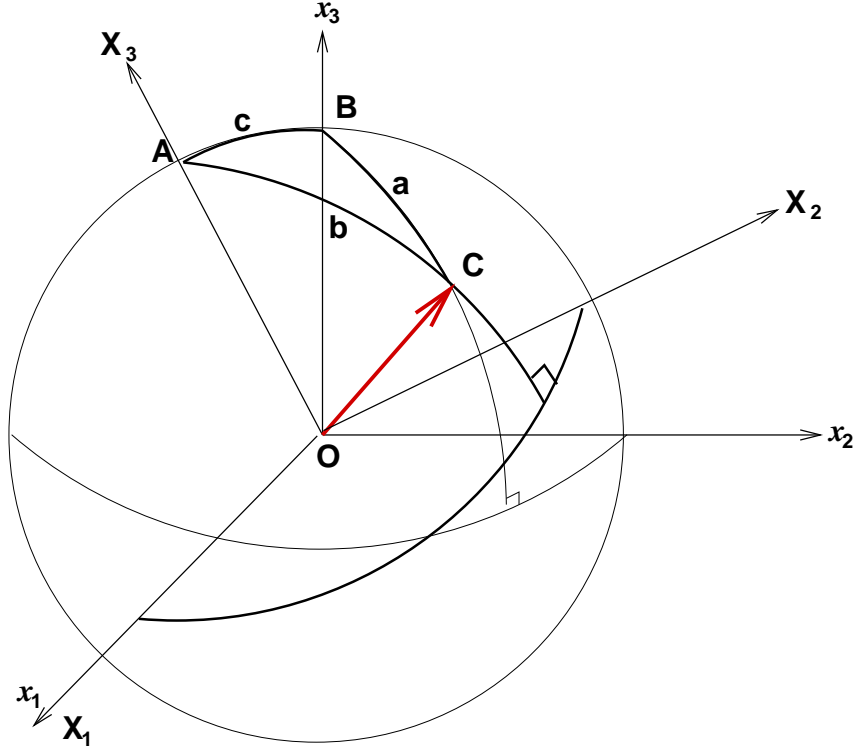
2.2 Le triangle sphérique

Un triangle sphérique est limité par des arcs de grands cercles.



- les côtés (a, b, c) d'un triangle sphérique s'expriment en unité d'angle.
 - les angles dièdres (A, B, C) des plans (qui déterminent les grands cercles) s'expriment en unité d'angle.
 - **Remarque:** la somme des angles d'un triangle sphérique diffère de 180° .
- Exemple:**





2.3 Relations entre les angles et les côtés d'un triangle sphérique

On introduit deux bases : (O, x_1, x_2, x_3) et $(O, x_1 X_2, X_3)$. On passe de l'une à l'autre par une rotation d'angle c autour de l'axe x_1 .

On note \underline{P} la matrice de passage de $(O, x_1 X_2, X_3) \rightarrow (O, x_1, x_2, x_3)$:

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos c & -\sin c \\ 0 & \sin c & \cos c \end{pmatrix}$$

On calcule les composantes du vecteur \overrightarrow{OC} dans (O, x_1, x_2, x_3) puis dans $(O, X_1 X_2, X_3)$:

$$\overrightarrow{OC}_{(O, x_1, x_2, x_3)} = \begin{pmatrix} \sin a \sin B \\ -\sin a \cos B \\ \cos a \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{OC}_{(O, X_1 X_2, X_3)} = \begin{pmatrix} \sin b \sin A \\ \sin b \cos A \\ \cos b \end{pmatrix}$$

On a la relation:

$$\overrightarrow{OC}_{(O, x_1, x_2, x_3)} = \underline{P} \cdot \overrightarrow{OC}_{(O, X_1 X_2, X_3)}$$

On obtient alors le système:

$$\begin{cases} \sin b \sin A = \sin a \sin B \\ -\sin a \cos B = -\cos b \sin c + \sin b \cos c \cos A \\ \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \end{cases} \quad (11)$$

D'où les formules:

- **Analogie des sinus:**

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad (12)$$

- **Formule de Gauss:**

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (13)$$

- **Formule des 4 éléments consécutifs:**

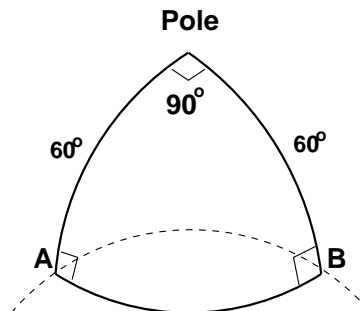
En combinant les équations (1) et (3) du système 11, on obtient:

$$\sin A \cotg B = \cotg b \sin c - \cos c \cos A \quad (14)$$

2.4 Exemples

2.4.1 Exercice 1

On modélise la Terre par une sphère de rayon $R = 6371$ km.



Calculer Δ la longueur de la géodésique entre A et B .

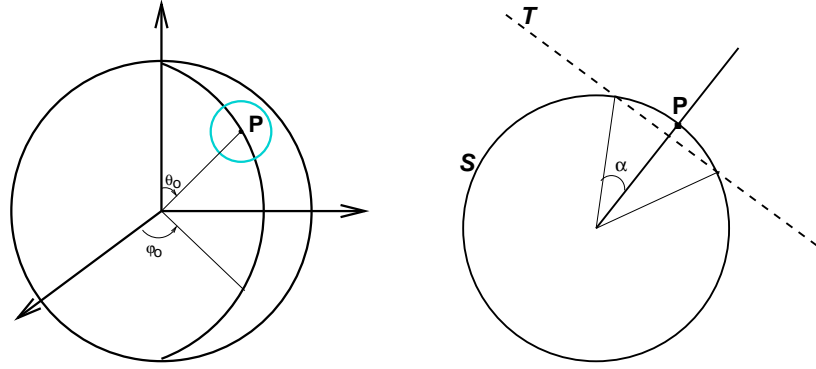
Calculer δ la distance sur le cercle parallèle entre A et B .

2.4.2 Calcul de la distance entre Paris et Moscou

$$\text{Paris : } \begin{cases} \text{latitude} & \theta_o = 48^\circ 50' 11.2'' \\ \text{longitude} & \varphi_o = 2^\circ 20' 13.8'' \end{cases} \quad \text{Moscou : } \begin{cases} \text{latitude} & \theta_1 = 55^\circ 45' 39.4'' \\ \text{longitude} & \varphi_1 = 37^\circ 39' 53.1'' \end{cases}$$

2.4.3 Equation d'un petit cercle sur la sphère

Soit un petit cercle centré en P (de colatitude θ_o et de longitude φ_o) et d'angle α . Une courbe sur une sphère unité s écrira: $f(\theta, \varphi) = 0$.



Soit P le centre du petit cercle:

$$P \begin{cases} a_o = \sin \theta_o \cos \varphi_o \\ b_o = \sin \theta_o \sin \varphi_o \\ c_o = \cos \theta_o \end{cases}$$

Soit \mathbf{T} le plan qui coupe la sphère unité \mathbf{S} :

$$T : \begin{cases} a_o x + b_o y + c_o z + d = 0 \\ \text{avec } d = -\cos \alpha \end{cases} \quad S : \begin{cases} x = \sin \theta \cos \varphi \\ y = \sin \theta \sin \varphi \\ z = \cos \theta \end{cases}$$

Le petit cercle C_1 est l'intersection du plan \mathbf{T} et de la sphère \mathbf{S} : $\mathbf{C}_1 = \mathbf{T} \cap \mathbf{S}$.
D'où :

$$C_1 : \sin \theta_o \cos \varphi_o \sin \theta \cos \varphi + \sin \theta_o \sin \varphi_o \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta_o \cos \theta = \cos \alpha$$

L'équation d'un petit cercle centré en $P(\theta_o, \varphi_o)$, de rayon l'angle α s'écrit:

$$\sin \theta_o \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_o) + \cos \theta \cos \theta_o = \cos \alpha \quad (15)$$

2.4.4 Equation d'un grand cercle sur la sphère

On pose $\alpha = 90^\circ$ dans l'équation (15). D'où:

$$\cos(\varphi - \varphi_o) = -\cotg \theta \cotg \theta_o \quad (16)$$

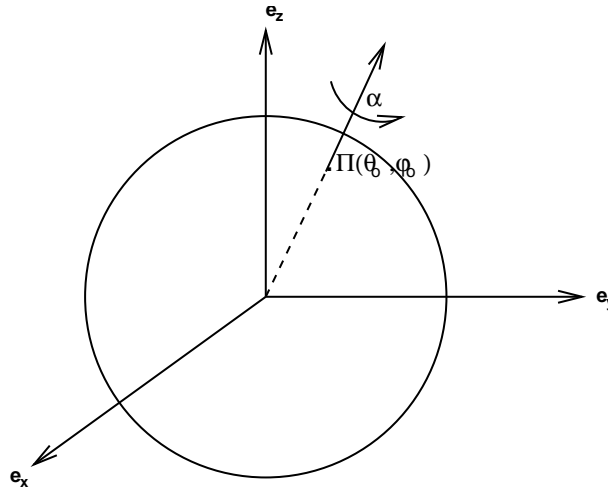
3 Cinématique sur la sphère

Comment décrire le mouvement d'un corps à la surface de la Terre ?

Théorème d'Euler (1776): à la surface de la Terre on peut toujours passer d'un point à un autre par une rotation autour d'un axe.

Remarque: on travaille toujours dans une base fixée (axe Nord-Sud + axe équatorial Greenwich + axe équatorial 90° E de Greenwich); on la notera $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Problème: on veut exprimer la matrice de rotation d'un angle α autour d'un axe passant par un pôle Π de colatitude θ_o , de longitude φ_o



On décompose ce mouvement (R) en plusieurs rotations:

- une rotation R_1 d'un angle φ_o par rapport à l'axe \vec{e}_3 (Nord-Sud) \Rightarrow on se ramène dans le méridien qui comprend le pôle Π .
- dans ce méridien, on fait une rotation R_2 d'angle θ_o pour amener l'axe \vec{e}_z au point Π .
- on fait une rotation R_3 par rapport à l'axe $O\Pi$ d'un angle α .

Par ce mouvement on a transformé le point P en P' . On veut exprimer ce point d'arrivée P' dans la base géographique initiale : il faut donc revenir dans le repère initial par deux rotations:

- une rotation d'angle $-\theta_o$: $-R_2$
- puis une rotation d'angle $-\varphi_o$: $-R_1$

Le mouvement complet (R) s'écrira donc:

$$(R) = (-R_1)(-R_2)(R_3)(R_2)(R_1)$$

Il faut exprimer chaque rotation dans le repère de coordonnées initial.
Introduisons 3 matrices de rotation:

$$(\Phi_o) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_o & -\sin \varphi_o & 0 \\ \sin \varphi_o & \cos \varphi_o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; (\Theta_o) = \begin{pmatrix} \cos \theta_o & 0 & \sin \theta_o \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_o & 0 & \cos \theta_o \end{pmatrix}; (A) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors:

$$(R) = (\Phi_o)(\Theta_o)(A)(\Theta_o)^{-1}(\Phi_o)^{-1}$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11} = \cos \alpha [\sin^2 \varphi_o + \cos^2 \varphi_o \cos^2 \theta_o] + \cos^2 \varphi_o \sin^2 \theta_o \\ R_{12} = -\cos \theta_o \sin \alpha + \cos \varphi_o \sin \varphi_o \sin^2 \theta_o (1 - \cos \alpha) \\ R_{13} = \sin \theta_o [\sin \alpha \sin \varphi_o + (1 - \cos \alpha) \cos \theta_o \cos \varphi_o] \\ R_{21} = \cos \varphi_o \sin \varphi_o \sin^2 \theta_o (1 - \cos \alpha) + \cos \theta_o \sin \alpha \\ R_{22} = \sin^2 \varphi_o \sin^2 \theta_o + \cos \alpha (\cos^2 \varphi_o + \sin^2 \varphi_o \cos^2 \theta_o) \\ R_{23} = \sin \theta_o [\cos \theta_o \sin \varphi_o (1 - \cos \alpha) - \sin \alpha \cos \varphi_o] \\ R_{31} = \sin \theta_o [\cos \theta_o \cos \varphi_o (1 - \cos \alpha) - \sin \alpha \sin \varphi_o] \\ R_{32} = \sin \theta_o [\cos \theta_o \sin \varphi_o (1 - \cos \alpha) + \sin \alpha \cos \varphi_o] \\ R_{33} = \cos \alpha \sin^2 \theta_o + \cos^2 \theta_o \end{array} \right.$$

Exercice: Calcul du transformé P' du point New York [$P(\theta_p = 49^\circ, \varphi_p = 72^\circ W)$] par la rotation d'angle $\alpha = 60^\circ$ et de pôle $\Pi(\theta_o = 45^\circ, \varphi_o = 0^\circ)$.

$$(R) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \sin \theta_p \cos \varphi_p \\ \sin \theta_p \sin \varphi_p \\ \cos \theta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.233 \\ -0.718 \\ 0.656 \end{pmatrix}$$

On a alors: $\overrightarrow{OP'} = (R) \cdot \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0.778 \\ -0.618 \\ 0.111 \end{pmatrix}$, point de colatitude 83.6° et de longitude $38.4^\circ W$.