CHAPITRE I : Déformation de la Terre et des planètes

1 Théorie de la gravito-élasticité

La Terre est un corps astronomique de grande dimension presque sphérique (rayon de quelques milliers de kilomètres) qui à la différence des étoiles apparaît comme solide. Cette grande dimension fait jouer un très grand rôle à la gravitation et la pression au centre peut atteindre de très grandes valeurs ($\sim 10^{11}$ Pa). C'est cette autogravitation qui lui donne une forme presque sphérique.

Nous avons donc une forme à priori presque sphérique; la déformation de la Terre consiste à étudier les modifications de cette forme à priori (considérée comme l'état de référence) sous l'action des différentes forces qui agissent sur la planète, c'est-à-dire à étudier les nouvelles positions des particules de la planète. Ces nouvelles positions sont caractérisées par un champ de déplacement $\vec{u}$ (parfois on fait intervenir un champ de vitesse $\vec{v}$). Dans ces conditions, l'étude de la déformation de la Terre relève de la mécanique des corps déformables pour un corps gravitant possédant une forme à priori. Cependant le problème est légèrement plus compliqué car le changement de forme de la planète entraîne une modification de son champ de gravitation, c'est-à-dire une perturbation, notée souvent Φ, de son potentiel gravifique. Cette modification du potentiel exerce une force qui déforme elle-aussi la Terre. Aussi, contrairement à la mécanique des milieux déformables classique étudiée à partir du champ de déplacement $\vec{u}$, on introduit une mécanique des milieux déformables qui fait intervenir à la fois le champ $\vec{u}$ et le potentiel Φ qui sont couplés : c'est la **gravito-élasticité**.

Du fait de la forme presque sphérique, cette déformation s'étudie au mieux à partir d'une représentation de tous les paramètres dans un système de coordonnées sphériques et à partir de fonctions liées aux coordonnées sphériques que l'on appelle les fonctions sphériques $Y_n^m(\theta, \lambda)$ (solutions de l' équation de Laplace en coordonnées sphériques), ou θ est la colatitude et λ la longitude. Ainsi les fonctions excitatrices, le champ de déplacement (ou de vitesse) et la perturbation du potentiel de gravitation vont se développer en séries de fonctions sphériques. On aura par exemple, pour les forces perturbatrices qui dérivent de potentiels V, à l'intérieur de la Terre ($r < a$, avec r le rayon):

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} V_n(a) \frac{r^n}{a^n} Y_n^m(\theta, \lambda) \tag{1}$$

où a est le rayon de la sphère initiale de référence.

Quelles sont les sources d'excitation qui peuvent déformer une planète relativement à sa configuration de référence ? On ne peut donner que les principaux exemples:

- les forces de volumes telles que les perturbations de la rotation ou les forces de marées.
- les conditions aux limites qui résultent d'anomalies de masses dans les fluides superficiels et dans les parties internes, ou de mouvements de convection.

- les pressions et les tractions tangentielles qui apparaissent aux interfaces solide-fluide, si les parties fluides de la planète ont une dynamique propre.

Enfin, il faut préciser que la déformation de la planète dépend essentiellement de sa capacité à se déformer sous l'action des forces agissantes, c'est-à-dire de sa rhéologie. Une terre parfaitement rigide ne se déformerait pas. De façon simplifiée, l'expérience montre que pour des phénomènes assez rapides (inférieurs à quelques années) la Terre réagit de façon élastique (comme un ressort), alors qu'aux plus longues échelles de temps elle réagit de façon plutôt visqueuse, voir quasiment comme un fluide parfait.
La connaissance de la déformation consiste donc à connaître en tout point de la Terre le champ de déplacement $\vec{u}$ et le potentiel Φ. Nous supposerons dans la suite que le problème de la déformation est linéaire, c'est-à-dire que les effets sont proportionnels aux causes.
Nous allons maintenant exposer les bases mécaniques qui permettent d'étudier la déformation de la Terre.

1.1 Conservation de la masse

En l'absence de sources externes de masse, la masse d'un système se conserve.
En général, il n'y a pas d'apport externe; on a donc:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} \rho \vec{v} = 0 \tag{2}$$

où ρ est la densité volumique.

1.2 Conservation de l'impulsion

En l'absence de sources d'impulsion, l'impulsion se conserve. On appelle impulsion élémentaire en mécanique des milieux continus la quantité : $p_i = \rho v_i$, où v_i est la composante de la vitesse.
Les lois de la physique disent qu'il existe deux sources possibles d'impulsion : d'une part les forces volumiques (loi de Newton) notée $\vec{f}$ et d'autre part les forces de surface ou traction, notées $\mathrm{div}\overline{\overline{\Sigma}}$. Ce principe s'écrit :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + \mathrm{div}\overline{\overline{\Sigma}} \tag{3}$$

On peut supposer que $\vec{f}$ s'écrit $\rho\vec{\nabla}(\Phi + V)$ où Φ est le potentiel de gravitation propre et V un potentiel quelconque. On posera $\vec{T} = \mathrm{div}\overline{\overline{\Sigma}}$.

1.3 Lois rhéologiques et équations d'état

Nous avons vu que pour établir les équations de la dynamique il faut, en plus des principes de conservation, des lois rhéologiques ou d'état. Ces lois sont des relations entre les paramètres qui apparaissent dans les principes de conservation. Dans les équations précédentes

$$\rho \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = \rho\vec{\nabla}(\Phi + V) + \mathrm{div}\overline{\overline{\Sigma}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \tag{4}$$

les physiciens ont montré qu'il existe d'une part, une relation entre ρ et Φ (Newton, loi d'attraction) et d'autre part que l'on peut trouver plus ou moins approximativement une relation entre $\vec{u}$ et div$\overline{\overline{\Sigma}}$ qui traduit le comportement rhéologique du corps, c'est-à-dire sa capacité à se déformer sous l'action des forces. Nous allons préciser ces deux équations de comportement.
La première entre ρ et Φ est simplement l'équation de Poisson, $\Delta\Phi = -4\pi\rho G$, propriété des potentiels newtoniens, avec G la constante de gravitation universelle.
Pour la deuxième relation entre contraintes et déformations, nous allons considérer des rhéologies linéaires.
L'hypothèse de rhéologie linéaire consiste à postuler une relation linéaire entre le tenseur de contrainte, noté σ_{kl}, et le tenseur de déformation, noté e_{kl} . Pour un corps élastique, on a la loi de Hooke:

$$\sigma_{kl} = 2\mu e_{kl} + (K - \frac{2}{3}\mu)e_{ii}\delta_{kl} \tag{5}$$

où μ est le module de cisaillement (ou rigidité) et K le module d'incompressibilité adiabatique. δ_{kl} est le symbole de Kronecker.

1.4 Système des y_i

En conclusion, nous avons donc à ajouter à la conservation de l'impulsion ces deux lois complémentaires: équation de Poisson et loi rhéologique. Il vient pour un corps élastique:

$$\rho\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = \rho\vec{\nabla}(\Phi + V) + \mathrm{div}\overline{\overline{\Sigma}} \tag{6}$$

$$\Delta\Phi = -4\pi G\rho \tag{7}$$

$$\sigma_{kl} = 2\mu e_{kl} + (K - \frac{2}{3}\mu)\mathrm{div}\vec{u}\ \ \delta_{kl} \tag{8}$$

Dans une théorie de perturbation, les quantités $\overline{\overline{\Sigma}}$, Φ, ρ sont décomposées en un terme d'ordre o (lié à l'état initial : Terre sphérique précontrainte, radialement stratifiée) et un terme d'ordre 1 très petit, lié à l'état perturbé (Terre déformable). Les équations sont écrites en paramètres lagrangiens (c'est à dire dans un système de coordonnées liées à la particule) notés avec un exposant ^{l}. L'exposant ^{e} sera relatif aux coordonnées eulériennes (voir les deux premiers chapitres de Dahlen and Tromp (1998) pour une revue de ces représentations mathématiques).

- $\overline{\overline{\Sigma}} = \overline{\overline{\Sigma_o}} + \overline{\overline{\Sigma_1^e}}$ avec $\overline{\overline{\Sigma_1^e}} = \overline{\overline{\Sigma_1^l}} - \vec{u}.\vec{\nabla}\overline{\overline{\Sigma_o}}$
- $\rho = \rho_o + \rho_1^e$ avec $\rho_1^e = \rho_1^l - \vec{u}.\vec{\nabla}\rho_o$
- $\Phi = \Phi_o + \Phi_1$

(9)

Le potentiel newtonien est classiquement écrit en variable eulérienne, associé à un repère lié à la configuration de référence.
L'intégration en temps de la conservation de la masse (2) conduit à:

$$\rho_1^e = -\mathrm{div}(\rho_o \vec{u}) \tag{10}$$

Considérons le tenseur de Piola-Kirchoff défini à partir de la traction eulérienne $\vec{T}^e$ (voir Dahlen and Tromp, 1998):

$$\vec{T}^e = \vec{n} \ . \ \overline{\overline{\Sigma_1^e}} = \vec{n}_o \ . \ \overline{\overline{T_1^{PK}}} \tag{11}$$

où $\vec{n}$ est la normale à la surface déformée et $\vec{n}_o$ la normale à la surface avant déformation. L'introduction de ce tenseur sera très utile pour l'écriture des conditions aux limites (en particulier pour la section 7, relative aux déformations pour une Terre avec des variations latérales et une précontrainte initiale non-hydrostatique). On peut l'exprimer en fonction du tenseur de contrainte lagrangienne $\overline{\overline{\Sigma_1^l}}$ (appelé encore tenseur de Cauchy lagrangien):

$$\overline{\overline{T_1^{PK}}} = \overline{\overline{\Sigma_1^l}} + (\mathrm{div}\vec{u})\overline{\overline{\Sigma_o}} - (\vec{\nabla}\vec{u})^T.\overline{\overline{\Sigma_o}} \tag{12}$$

En l'absence de pression ou de traction tangentielle en surface, les conditions aux limites s'écriront simplement:

- $\left[\vec{n}_o \ . \ \overline{\overline{T_1^{PK}}}\right]_-^+ = 0$ aux interfaces solide-solide
- $\left[\vec{n}_o \ . \ \overline{\overline{T_1^{PK}}}\right] = 0$ à la surface de la Terre

(13)

Pour la condition aux limites de continuité de la gravité écrite sur la surface non-déformée, on aura:

$$\left[\vec{n}_o.\vec{\nabla}\Phi_1 + 4\pi G\rho_o\vec{n}_o.\vec{u}\right]_-^+ = 0 \tag{14}$$

Dans cette section, nous ferons l'hypothèse que la sphère initiale de référence (radialement stratifiée) est en équilibre hydrostatique; elle obéit à la loi, en notant P_o la pression hydrostatique initiale:

$$\mathrm{div}\overline{\overline{\Sigma_o}} = -\rho_o\vec{\nabla}\Phi_o = -\vec{\nabla}P_o \tag{15}$$

et vérifie l'équation de Poisson:

$$\Delta\Phi_o = -4\pi G\rho_o \tag{16}$$

Le tenseur de contrainte lagrangienne est alors égal au tenseur élastique $\overline{\overline{\sigma}}$:

$$(\Sigma_1^l)_{ij} = \sigma_{ij} = \Gamma_{ijkl}(u_l)_{,k} \qquad \text{avec} \quad \Gamma_{ijkl} = (K - \frac{2}{3}\mu)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{17}$$

La différence entre les équations (6), (7), (8) et les équations qui gouvernent la sphère initiale de référence (15), (16) nous donne le système différentiel qui régit les déformations élastiques et dont les inconnues sont $\vec{u}$ et Φ_1.

$$\rho_o\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = \mathrm{div}\left(\overline{\overline{\sigma}} + \vec{u}.\vec{\nabla}P_o\overline{\overline{I}}\right) + \rho_o\vec{\nabla}(\Phi_1 + V) - \mathrm{div}(\rho_o\vec{u})\vec{\nabla}\Phi_o \tag{18}$$

$$\Delta\Phi_1 = 4\pi G \mathrm{div}(\rho_o\vec{u}) \tag{19}$$

L'équation (18) peut encore s'écrire, en utilisant le tenseur de Piola-Kirchoff défini en (12):

$$\rho_o \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = \mathrm{div}\overline{\overline{T^1_{PK}}} + \rho_o\vec{\nabla}(\Phi_1 + V) + \rho_o\vec{u}.\vec{\nabla}\vec{\nabla}\Phi_o \tag{20}$$

Pour résoudre ce système, on décompose classiquement les paramètres en harmoniques sphériques. Ces équations peuvent être transformées en un système de 8 équations différentielles du premier ordre. Pour cela, on introduit les huit fonctions notées $y_1(r), ...y_8(r)$ définies par Alterman, Jarosh and Pekeris (1959).
Le vecteur déplacement $\vec{u}$ est décomposé en vecteurs harmoniques sphériques toroidal et poloidal. On note:

$$\vec{u} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} y_{1n}(r)Y_n^m(\theta,\lambda)\frac{\vec{r}}{r} + ry_{3n}(r)\vec{\nabla}Y_n^m(\theta,\lambda) + y_{7n}(r)\vec{\nabla}\wedge\vec{r}Y_n^m(\theta,\lambda) \tag{21}$$

$Y_n^m(\theta,\lambda)$ sont les harmoniques sphériques. On note également les tractions:

$$\vec{T^e} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} y_{2n}(r)Y_n^m(\theta,\lambda)\frac{\vec{r}}{r} + ry_{4n}(r)\vec{\nabla}Y_n^m(\theta,\lambda) + y_{8n}(r)\vec{\nabla}\wedge\vec{r}Y_n^m(\theta,\lambda) \tag{22}$$

Enfin, pour le potentiel:

$$\Phi_1 + V = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} y_{5n}(r)Y_n^m(\theta,\lambda) \tag{23}$$

Pour la dérivée radiale du potentiel, on introduit pour chaque y_{5n} une fonction y_{6n} définie par:

$$y_{6n} = \frac{dy_{5n}}{dr} - 4\pi G\rho_o y_{1n}(r) \tag{24}$$

Le système aux dérivées partielles, dans le domaine des fréquences ω, devient alors un système différentiel du premier ordre (on omettra l'indice n pour simplifier) suivant (Alterman, Jarosh and Pekeris, 1959):

$$\tag{25}$$

$$\dot{y}_1 = -\tfrac{2(K-\frac{2}{3}\mu)}{(K+\frac{4}{3}\mu)}\tfrac{y_1}{r} + \tfrac{1}{(K+\frac{4}{3}\mu)}y_2 + \tfrac{n(n+1)(K-\frac{2}{3}\mu)}{(K+\frac{4}{3}\mu)}\tfrac{y_3}{r}$$

$$\dot{y}_2 = [-4\rho g - \omega^2\rho r + \tfrac{12\mu K}{(K+\frac{4}{3}\mu)r}]\tfrac{y_1}{r} - \tfrac{4\mu}{(K+\frac{4}{3}\mu)}\tfrac{y_2}{r} + n(n+1)[\rho g - \tfrac{6\mu K}{(K+\frac{4}{3}\mu)r}]\tfrac{y_3}{r} + \tfrac{n(n+1)y_4}{r} - \rho y_6$$

$$\dot{y}_3 = -\tfrac{y_1}{r} + \tfrac{y_3}{r} + \tfrac{y_4}{\mu}$$

$$\dot{y}_4 = [\rho g - \tfrac{2\mu(3K)}{(K+\frac{4}{3}\mu)r}]\tfrac{y_1}{r} - \tfrac{(K-\frac{2}{3}\mu)}{(K+\frac{4}{3}\mu)}\tfrac{y_2}{r} + \left\{-\omega^2\rho r + \tfrac{2\mu\left[(K-\frac{2}{3}\mu)(2n^2+2n-1)+2\mu(n^2+n-1)\right]}{(K+\frac{4}{3}\mu)r}\right\}\tfrac{y_3}{r} - \tfrac{3y_4}{r} - \rho\tfrac{y_5}{r}$$

$$\dot{y}_5 = 4\pi G\rho y_1 + y_6$$

$$\dot{y}_6 = -4\pi G\rho n(n+1)\tfrac{y_3}{r} + \tfrac{n(n+1)}{r}\tfrac{y_5}{r} - \tfrac{2y_6}{r}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_7 &= \tfrac{y_7}{r} + \tfrac{y_8}{\mu} \\
\dot{y}_8 &= \left[-\omega^2 \rho r + \tfrac{\mu(n^2+n-2)}{r}\right]\tfrac{y_7}{r} - \tfrac{3y_8}{r}
\end{aligned}$$

La densité $\rho(r)$, la rigidité $\mu(r)$ et le module d'incompressibilité $K(r)$ dépendent de la stratification radiale du modèle de Terre choisi (par exemple le modèle PREM construit à partir des données sismologiques). $g(r)$ est la gravité.
Ce système décrit le comportement gravito-élastique à l'intérieur des parties élastiques d'une planète déformable. Il permet également l'étude des modes sismiques. Pour les études des déformations de périodes grandes devant 1 heure, on pose généralement $\omega = 0$ dans le système: on parle alors de **déformations statiques.**
Dans le noyau fluide, le système d'équations différentielles doit être modifié. En effet, si on a toujours la conservation de la masse, la conservation de l'impulsion et l'équation de Poisson, en revanche la loi d'état qui relie les contraintes au déplacement est différente. Dans un fluide parfait, il n'y a pas de contrainte tangentielle $y_4(r) = 0$ et la contrainte radiale s'écrit:

$$y_2(r) = K \ \mathrm{div}\vec{u} = K\left[\dot{y}_1 + \frac{2}{r}y_1 - \frac{n(n+1)}{r}y_3\right] \tag{26}$$

On fait l'hypothèse que le noyau est stable, c'est-à-dire qu'il vérifie la relation d'Adams-Williamson: $\dfrac{\dot{\rho}_o}{\rho_o} + \dfrac{\rho_o g_o}{K} = 0$

Le système des y_i s'écrit alors:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= -\tfrac{2}{r}y_1 + \tfrac{1}{K}y_2 + \tfrac{n(n+1)}{r}y_3 \\
\dot{y}_2 &= -[4\rho g + \omega^2 \rho r]\tfrac{y_1}{r} + \tfrac{n(n+1)}{r}\rho g y_3 - \rho y_6 \\
y_3 &= \tfrac{1}{\omega^2 r}\left[g y_1 - \tfrac{1}{\rho}y_2 - y_5\right] \\
\dot{y}_5 &= 4\pi G \rho y_1 + y_6 \\
\dot{y}_6 &= -4\pi G \rho n(n+1)\tfrac{y_3}{r} + \tfrac{n(n+1)}{r}\tfrac{y_5}{r} - \tfrac{2y_6}{r}
\end{aligned} \tag{27}$$

Les équations de ces systèmes (élastique et fluide) se découplent en deux sous-systèmes:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_i(r) &= c_{ij}(r) y_j(r) \qquad i,j = 1..6 \quad \text{systeme spheroidal} \\
\dot{y}_i(r) &= c^*_{ij}(r) y_j(r) \qquad i,j = 7,8 \quad \text{systeme toroidal}
\end{aligned} \tag{28}$$

Dans la suite , nous nous intéresserons uniquement au système sphéroidal.

Pour résoudre les équations de la gravito-élasticité , on doit ajouter les conditions vérifiées à la limite du domaine.

1.5 Conditions aux limites

Nous nous intéresserons ici à des sources perturbatrices externes ou en surface de la planète (potentiel volumique V^{ext}, surcharge S^{ext}, pression P^{ext} ou traction tangentielle T^{ext}) ainsi qu'à de sources d'origine interne: potentiel volumique confiné dans le noyau (V^c) et dans la graine (V^{ic}), pression d'origine magnétique dans le noyau fluide agissant à l'interface noyau-manteau (P^c) et à l'interface graine-noyau (P^{ic}), traction tangentielle (friction visqueuse) à la CMB (T^c) et à l'ICB (T^{ic}), surcharge interne située au rayon r_o à l'intérieur du manteau (S^{in}), ou à l'ICB (S^{ic}).
Une densité superficielle de masse de degré n, $\sigma(r_o)$ situé au rayon r_o dans le manteau produira 2 effets:

- un effet de pression $(-g(r_o)\sigma(r_o))$ agissant au rayon r_o
- un effet de potentiel d'attraction $S^{in} = \dfrac{4\pi G}{2n+1}\sigma(r_o) r_o \begin{cases} \left(\frac{r}{r_o}\right)^n & \text{if } \mathrm{r} \leq \mathrm{r_o} \\ (\left(\frac{r_o}{r}\right)^{(n+1)} & \text{if } \mathrm{r} \geq \mathrm{r_o} \end{cases}$

Quand la planète est soumise à ces différentes sources d'excitation, les conditions aux limites peuvent s'écrire de la façon suivante, en notant $\tilde{\rho}$ la densité moyenne:

- à la surface: la contrainte tangentielle est égale à la traction tangentielle agissant et la contrainte radiale est égale à la pression agissant; la discontinuité dans le potentiel gravifique introduit une relation entre $y_6(a)$, $y_5(a)$ et le potentiel excitateur:

$$\begin{cases} y_4(a) = T^{ext} \\ y_2(a) = -P^{ext} - \frac{2n+1}{3}\tilde{\rho}S^{ext} \\ y_6(a) + \frac{n+1}{a}y_5(a) = \frac{2n+1}{a}\left[S^{ext} + V^{ext}\right] \end{cases} \tag{29}$$

- à une interface a_i à l'intérieur du manteau, les contraintes tangentielles et le potentiel sont continus; à cause de la surcharge interne S^{in} agissant au rayon r_o, la continuité des contraintes radiales et de la gravité dépendra de cette excitation si $a_i = r_o$:

$$\begin{cases} y_1(a_i^+) = y_1(a_i^-) \\ y_2(a_i^+) = y_2(a_i^-) + \frac{2n+1}{4\pi G}\frac{g(a_i)}{a_i}S^{in}\delta(a_i - r_o) \\ y_3(a_i^+) = y_3(a_i^-) \\ y_4(a_i^+) = y_4(a_i^-) \\ y_5(a_i^+) = y_5(a_i^-) \\ y_6(a_i^+) = y_6(a_i^-) - (2n+1)\frac{S^{in}}{a_i}\delta(a_i - r_o) \end{cases} \tag{30}$$

où $\delta(a_i - r_o)$ est la distribution de Dirac qui est égale à 1 si $a_i = r_o$ et 0 si $a_i \neq 0$.

- à la CMB ($r = b$): le déplacement radial est continu mais nous devons introduire un paramètre inconnu K_1 pour prendre en compte la différence entre la forme du manteau solide et la forme du noyau fluide qui est une equipotentielle (Chinnery, 1975); le déplacement tangentiel est indéterminé; la contrainte tangentielle est égale à la traction tangentielle agissant à la CMB; le potentiel gravitationnel est continu; la continuité de la contrainte radiale dépend de la pression fluide dans le noyau; la gravité du manteau est reliée à celle du noyau en prenant en compte la différence K_1:

$$\begin{cases} y_1(b^+) = y_1(b^-) + b\ \ K_1 \\ y_3(b^+) = b\ \ K_3 \\ y_4(b^+) = -T^c \\ y_5(b^+) = y_5(b^-) - V^c \\ y_2(b^+) = \rho(b^-)g(b)\ \ bK_1 - P^c \\ y_6(b^+) = y_6(b^-) - 4\pi G\rho(b^-)\ \ bK_1 - \frac{n}{b}V^c \end{cases} \tag{31}$$

- à l'ICB ($r = c$): le déplacement radial est continu mais nous devons introduire un paramètre inconnu K_2 pour prendre en compte la différence entre la forme de la graine solide et la forme du noyau fluide qui est une equipotentielle (Chinnery, 1975); le déplacement tangentiel est indéterminé; la contrainte tangentielle est égale à la traction tangentielle agissant à l'ICB; le potentiel gravitationnel est continu; la continuité de la contrainte radiale dépend de la pression fluide dans le noyau agissant à l'ICB et la gravité de la graine est reliée à celle du noyau fluide en prenant en compte la différence K_2:

$$\begin{cases} y_1(c^-) = y_1(c^+) - c\ \ K_2 \\ y_2(c^-) = -\rho(c^+)\ \ g(c)\ \ cK_2 - P^{ic} - \frac{2n+1}{3}\rho(c^-)S^{ic} \\ y_3(c^-) = c\ \ K_4 \\ y_4(c^-) = T^{ic} \\ y_5(c^-) = y_5(c^+) - V^c\left(\frac{c}{b}\right)^n + V^{ic} \\ y_6(c^-) = y_6(c^+) + 4\pi G\rho(c^+)\ \ cK_2 - \frac{n}{b}V^c\left(\frac{c}{b}\right)^{(n-1)} + \frac{n}{c}V^{ic} + \frac{2n+1}{c}S^{ic} \end{cases} \tag{32}$$

- au centre de la planète $r = 0$ les fonctions $y_i(r)$ ne doivent pas diverger.

1.6 Remarque sur les déformations de degré $n = 1$

Pour $n = 1$, il y a deux problèmes: d'une part, les équations des conditions aux limites précédemment citées ne sont plus indépendantes (il existe une relation dite 'Consistency Relation' entre différentes fonctions y_i (voir section sur le géocentre)), et d'autre part, le centre de masse de la Terre n'est pas conservé. En effet, les solutions élastiques données par la résolvante du système différentiel des y_i ne vérifient pas automatiquement cette condition. Conserver le centre de masse est équivalent à translater le centre de figure. La translation rigide étant une des solutions du système des y_i, pour $n = 1$, la conservation du centre de masse requiert simplement que le potentiel gravitationnel de surface de degré 1 soit égal à zéro. Nous obtenons alors un jeu d'équations indépendantes.

1.7 Nombres de Love

En résolvant le système différentiel des y_i, avec les conditions aux limites ci-dessus, on peut calculer les déformations élastiques partout à l'intérieur de la Terre, comme une fonction des sources d'excitation. Par exemple, pour un potentiel volumique externe, une surcharge en surface ou des pressions, de degré n, on introduit des nombres de Love tels que, à l'interface $r = r_o$, on ait, en notant g_o la gravité en surface:

- en déplacement radial:

$$y_1(r_o) = h'_{r_o}\frac{S^{ext}}{g_o} + h_{r_o}\frac{V^{ext}}{g_o} + \bar{h}_{r_o}\frac{P^{ext}}{\tilde{\rho} g_o} + \bar{h}^c_{r_o}\frac{P^c}{\tilde{\rho} g_o} + \bar{h}^{ic}_{r_o}\frac{P^{ic}}{\tilde{\rho} g_o} \tag{33}$$

- en déplacement tangentiel:

$$y_3(r_o) = l'_{r_o}\frac{S^{ext}}{g_o} + l_{r_o}\frac{V^{ext}}{g_o} + \bar{l}_{r_o}\frac{P^{ext}}{\tilde{\rho} g_o} + \bar{l}^c_{r_o}\frac{P^c}{\tilde{\rho} g_o} + \bar{l}^{ic}_{r_o}\frac{P^{ic}}{\tilde{\rho} g_o} \tag{34}$$

- en potentiel:

$$y_5(r_o) = \Big[\Big(\frac{r_o}{a}\Big)^n + k'_{r_o}\Big]S^{ext} + \Big[\Big(\frac{r_o}{a}\Big)^n + k_{r_o}\Big]V^{ext} + \bar{k}_{r_o}\frac{P^{ext}}{\tilde{\rho}} + \bar{k}^c_{r_o}\frac{P^c}{\tilde{\rho}} + \bar{k}^{ic}_{r_o}\frac{P^{ic}}{\tilde{\rho}} \tag{35}$$

Ces nombres de Love correspondent, en quelque sorte, à une fonction de transfert de la Terre pour les déformations. Ils sont calculés, une fois pour toutes, pour un modèle de Terre. On peut ensuite faire de nombreuses applications géophysiques.

On the fluid and viscoelastic deformations of the planets

Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, vol. 57, no. 1-2, 1993, 247-278.

Hilaire Legros and Marianne Lefftz
Institut de Physique du Globe de Strasbourg, 5 rue R. Descartes, 67084 Strasbourg, France

Abstract. The shape of the Earth and of planets depends on the exciting forces and on the rheology of the medium. From the equilibrium equation, we present the main modelizations of the viscous and inviscid fluids and we essentially describe the characteristics of linear viscoelastic deformations, for the Maxwell viscoelastic model of rheology. We use the elastic, viscoelastic and fluid Love numbers in order to investigate the associated relaxation modes. For these various kinds of rheology of the planets interior, we compute the geoid and the topography induced by an internal mass distribution. Finally, we show the importance of this viscoelastic deformation calculations in the study of the celestial body rotations.

Keywords: Elastic deformation, inviscid flow, planetary rotation, planetary structure, viscoelasticity, viscous flow, geoids, mass distribution, mathematical models, planetary surfaces, rheology, topography

2 Applications géophysiques

2.1 Marées terrestres

La plus célèbre application des nombres de Love est le calcul des marées terrestres. Prenons par exemple, le cas de l'onde lunaire M_2 (la plus importante en amplitude sur Terre). C'est une onde semi-diurne. Le potentiel de marée excitateur de degré 2 s'écrira:

$$V_2 = 3\sin^2\theta\Big[V_{22}\cos 2\lambda + \tilde{V}_{22}\sin 2\lambda\Big] \tag{36}$$

avec $V_{22} = V_o\cos(\frac{2\pi}{T_G}t)$ et $\tilde{V}_{22} = V_o\sin(\frac{2\pi}{T_G}t)$ où $T_G = 12h\ 27mn\ 19s$ le temps entre deux marées hautes successives, $2T_G$ étant le temps entre 2 passages successifs de la Lune au méridien du lieu. Si la Lune est dans le plan équatorial, on a $V_o = 0.8725\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$. Les nombres de Love de degré 2 pour un potentiel volumique externe sont calculés pour le modèle PREM: pour les déformations en surface, on a: $h_2 = 0.52$ et $k_2 = 0.287$. Le déplacement radial en surface s'écrira donc:

$$y_1(a,\theta,\lambda) = h_2\frac{V_2(\theta,\lambda)}{g_o} = h_2\ \ 3\sin^2\theta\frac{V_o}{g_o}\cos[\frac{2\pi}{T_G}t + \lambda] \tag{37}$$

soit à Paris ($\theta = 42^o$), un déplacement d'environ 7.6 cm entre une marée haute et une marée basse successives.
Avec ce formalisme de nombres de Love, on peut calculer très facilement, la perturbation de la gravité en surface induite par ce potentiel gravitationnel dû à l'attraction de la Lune. On peut montrer que sur la surface déformée de la Terre, la perturbation de gravité s'écrit:

$$\delta g(\theta,\lambda) = -y_6(a,\theta,\lambda) - 2\frac{g_o}{a}y_1(a,\theta,\lambda) = \delta_2\frac{2}{a}V_2(\theta,\lambda) \tag{38}$$

avec $\delta_2 = 1 - \frac{3}{2}k_2 + h_2$ le facteur gravimétrique de degré 2. On trouve alors une variation de 50 microgal (soit $5\times10^{-7}\ \ \mathrm{m/s}^2$) entre une marée haute et une marée basse successives.

2.2 Pressions magnétiques à l'interface noyau-manteau

L'application suivante du formalisme de nombres Love est beaucoup moins classique que celle des marées terrestres. Nous allons prendre comme source d'excitation le champ de pression fluide qui agit à l'interface noyau-manteau. Cette pression varie sur une échelle de temps décennale et peut être estimée à partir des mesures de la variation séculaire du champ magnétique en surface. La méthode utilisée pour ces estimations est largement décrite dans les thèses de D. Jault et G. Hulot soutenues en 1990 et 1992 dans le département de Géomagnétisme de l'IPGP. Le principe est le suivant: on calcule tout d'abord le champ de mouvement $\vec{u}$ à la surface du noyau fluide; pour cela, on prolonge la composante radiale du champ magnétique B_r et sa dérivée temporelle à la base du manteau, supposé isolant. L'équation d'induction, dans l'hypothèse dite du flux gelé où on néglige la diffusion devant l'advection, relie B_r et sa dérivée en temps au champ de vitesse tangentielle $\vec{u}$. Pour déterminer le champ $\vec{u}$ qui a deux composantes, on doit ajouter une autre équation à l'équation d'induction. On fait classiquement l'hypothèse

que le mouvement est tangentiellement géostrophique, c'est-à-dire que la composante tangentielle de la force de Coriolis est en équilibre avec le gradient tangentiel de pression, la force de Lorentz étant négligeable à l'interface noyau-manteau.
La pression géostrophique se calcule donc à partir de cet équilibre. A titre d'exemple, la pression magnétique géostrophique en 1980, décomposée en harmoniques sphériques jusqu'au degré 10, est représentée sur la figure 1-a. Les nombres de Love de pression $\bar{h}_a^c$ sont calculés jusqu'au degré 10 pour le modèle PREM. Le déplacement radial en surface induit cette pression à la CMB est représenté sur la figure 1-b. Il est de l'ordre de quelques millimètres.

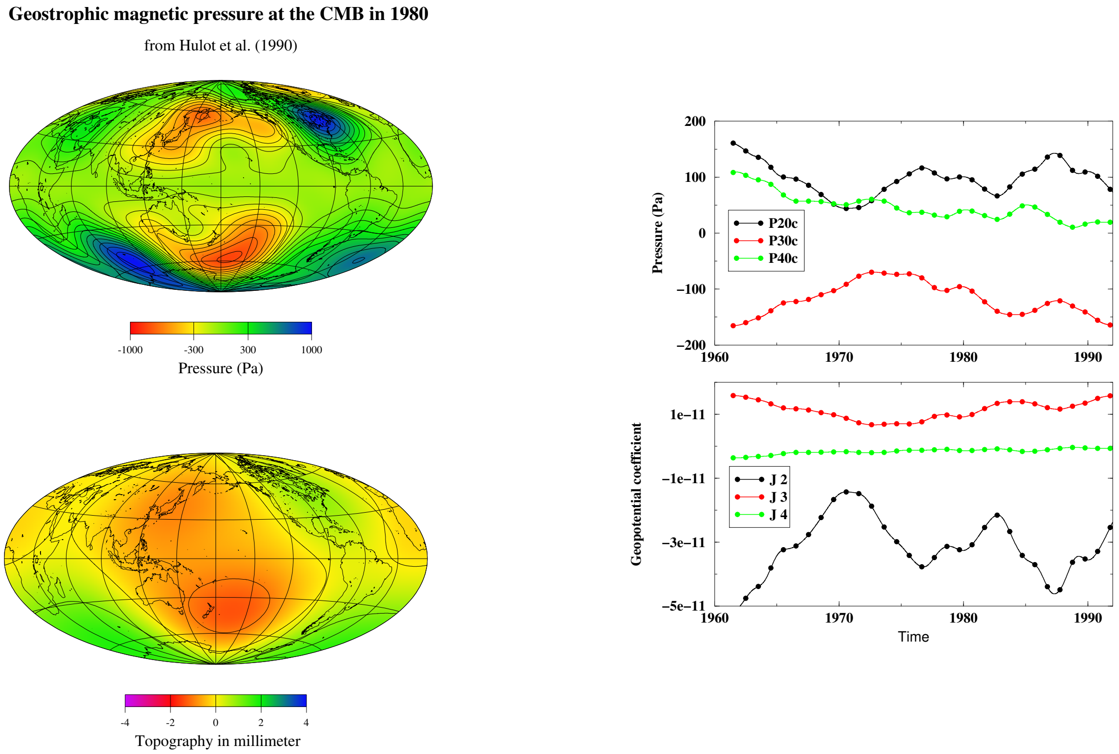


Figure 1: (a) fonction d'excitation: pression géostrophique à la CMB en 1980; (b) déplacement radial en surface dû aux déformations élastiques induites par la pression à la CMB en 1980; (c) variation décennale des coefficients zonaux de degrés 2,3 et 4 de la pression géostrophique à la CMB; (d) Variations temporelles des coeffcients zonaux du geopotentiel associés

Par déformation élastique, de telles pressions vont perturber le potentiel de redistribution des masses en surface. On peut calculer, par exemple, les variations temporelles décennales dans les coefficients zonaux de degrés 2, 3 et 4 (classiquement nommés J_2, J_3 et J_4) associés respectivement aux pressions zonales de degrés 2, 3 et 4. Nous avons représenté sur la figure 1-c la variation temporelle de ces pressions zonales et sur la figure 1-d les variations dans les coefficients zonaux du geopotentiel associes. Ces variations décennales ne sont pas négligeables: par exemple, pour le coefficient zonal de degré 2, on a entre 1960 et 1970 un taux d'environ $\dot{J}_2 = 1.25 \times 10^{-19}$ s^{-1}, soit 15% de la valeur observée par les satellites de $\dot{J}_2$ (voir la Figure 5 de la section 3).

3 Déformations visco-élastique

Certaines extensions de la théorie de la gravito-élasticité peuvent être faites pour étudier les déformations d'un corps viscoélastique ou fluide.

3.1 Nombres de Love viscoélastiques

En effet pour certaines applications planétologiques, il est important de prendre en compte les effets visqueux.

Le choix de la rhéologie est très important : le corps viscoélastique linéaire de Maxwell est actuellement le plus utilisé pour les études liées aux influences des surcharges et des déformations sur la rotation de la Terre, car aux courtes échelles de temps, il rend compte, dans sa limite élastique, des nutations propres de la Terre, alors qu'aux longues échelles de temps, il explique le comportement fluide de la Terre (aplatissement quasi hydrostatique).

Un corps de Maxwell obéit à une relation contrainte-déformation viscoélastique linéaire, pour une planète incompressible :

$$\dot{\sigma}_{ij} + \frac{\mu^{el}}{\nu}\sigma_{ij} = 2\mu^{el}\ \dot{e}_{ij} \tag{39}$$

où σ_{ij} et e_{ij} sont respectivement le tenseur des contraintes et des déformations, μ^{el} la rigidité élastique et ν la viscosité newtonienne du corps. En prenant la transformée de Fourier de cette équation, on obtient dans le domaine des fréquences ω la loi de Hooke:

$$\sigma_{ij}(\omega) = 2\mu(\omega)e_{ij}(\omega) \tag{40}$$

avec $\mu(\omega) = \mu^{el}\dfrac{i\omega}{i\omega + \mu^{el}/\nu}$ pour un corps incompressible. On a $\lim\limits_{\omega\to\infty}\mu(\omega) = \mu^{el}$, limite élastique aux courtes échelles de temps, et $\lim\limits_{\omega\to 0}\mu(\omega) = 0$, limite fluide où il n'y a plus de rigidité.

Dans le domaine de Fourier, les équations viscoélastiques et les conditions aux limites sont formellement identiques aux équations d'un corps élastique ayant la même géométrie. C'est le principe de correspondance : si l'on est capable de décrire la rhéologie par une loi contrainte-déformation viscoélastique linéaire, on peut alors employer les équations de la gravito-élasticité dans le domaine des fréquences pour calculer la réponse viscoélastique dépendant du temps à partir de la solution du problème élastique équivalent.

Les déformations pourront s'exprimer à l'aide de nombres de Love viscoélastiques :

- dans le domaine des fréquences :

$$y_1(a,\omega) = h_a(\omega)\frac{V^{ext}(\omega)}{g_o} + \bar{h}_a(\omega)\frac{P^{ext}(\omega)}{\tilde{\rho}g_o} + h'_a(\omega)\frac{S^{ext}(\omega)}{g_o} \tag{41}$$

- dans le domaine temporel :

$$y_1(a,t) = h_a(t) * \frac{V^{ext}(t)}{g_o} + \bar{h}_a(t) * \frac{P^{ext}(t)}{\tilde{\rho}g_o} + h'_a(t) * \frac{S^{ext}(t)}{g_o} \tag{42}$$

où $*$ dénote la convolution temporelle c'est-à-dire la mémoire visqueuse de la planète.

Pour un modèle de rhéologie de Maxwell, Peltier (1974) ou Spada et al. (1992) ont montré que les nombres de Love viscoélastiques avaient la forme fréquentielle suivante (par exemple pour $h(\omega)$):

$$h(\omega) = h^{el} + \sum_{k=1}^{M} \frac{h_k}{i\omega + 1/\tau_k} \tag{43}$$

Le premier terme du membre de droite correspond au nombre de Love élastique instantané et τ_k et h_k sont les temps de relaxation et les résidus des M modes de relaxation du modèle de Terre. τ_k ne dépend que du modèle de Terre, alors que h_k dépend du modèle de Terre et de la source d'excitation.
Les modes de relaxation sont générés à chaque interface du modèle de planète par des discontinuités dans les paramètres physiques. Par exemple, pour un modèle de Terre à 5 couches homogènes (lithosphère élastique, manteau supérieur et inférieur viscoélastique, noyau fluide et graine viscoélastique), nous avons 7 modes de relaxation: T_1 et T_2 dûs à un saut dans la distribution de rigidité ou de viscosité entre le manteau supérieur et inférieur et appelés modes de transition car il se relâchent très rapidement et sont faiblement excités; M_o, C et G dûs à la discontinuité en densité, respectivement à la surface de la Terre, à l'interface noyau-manteau et à l'interface graine-noyau; L dû au saut de viscosité entre la lithosphère et le manteau inférieur; et M_1 qui existe uniquement s'il y a une déflection dans la discontinuité en densité à 660 km, c'est-à-dire qui requiert que l'interface se comporte comme une interface chimique (non-adiabatique). Les temps de relaxation en milliers d'années sont représentés sur la figure suivante en fonction du degré n de la décomposition en harmoniques sphériques. Un contraste de viscosité de 30 est supposé entre le manteau inférieur et le manteau supérieur.

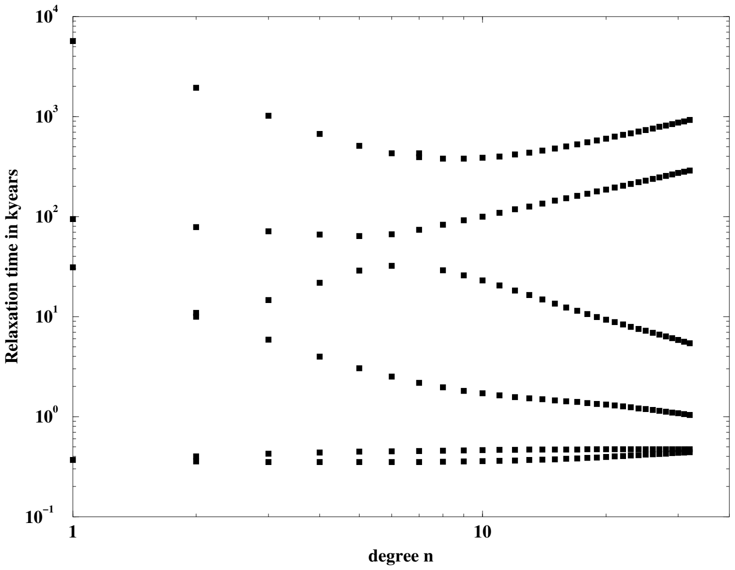


Figure 2: Temps de relaxation en 10^3 ans

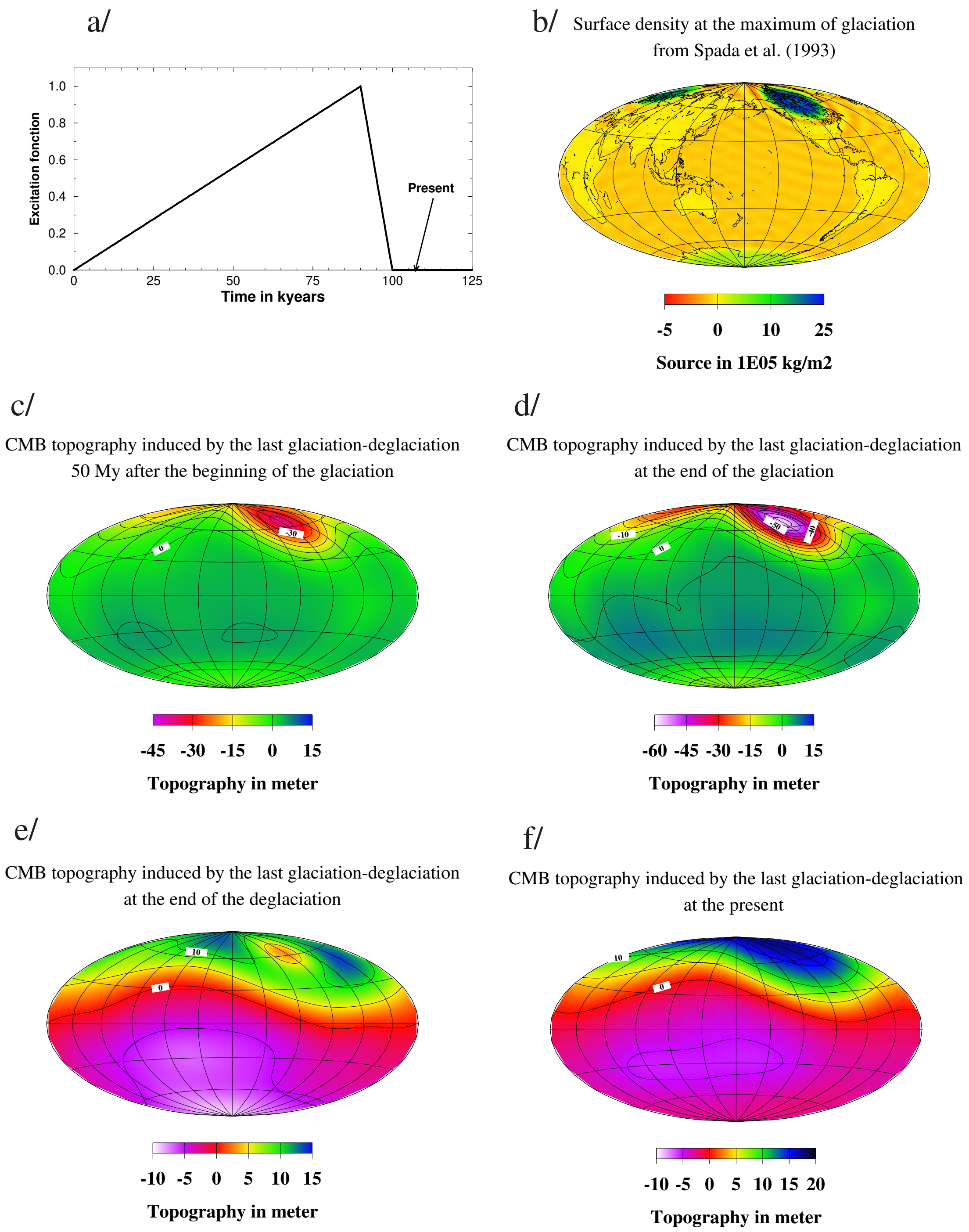


Figure 3: a- Temporal evolution of the glaciation-deglaciation cycle; b- surface density in $\mathrm{kg/m^2}$ at the end of the glaciation; c- CMB topography 50 kyears after the beginning of the glaciation; d- CMB topography at the end of the glaciation; e- CMB topography at the end of the deglaciation; f- Present-day CMB topography

3.2 Etudes des déformations induites par la déglaciation

Une application géophysique classique de la gravito-viscoélasticité est l' étude des déformations induites par la dernière glaciation-déglaciation.

La glaciation-déglaciation est simplement modélisée par trois calottes sphériques - Scandinavie, Laurentides et Antartique - (voir par exemple Peltier and Wu, 1983; Wu and Peltier, 1984) décomposées analytiquement en harmoniques sphériques avec la même dépendance en temps. La glaciation est caractérisée par une croissance de la hauteur de glace très lente sur une période de 90000 ans et la déglaciation par une fonte rapide, durant 10000 ans (Figure 3-a). La variation du niveau de la mer associée à la variation de la hauteur de glace sur les calottes est prise en compte et induit une surcharge en surface, décomposée en harmoniques sphériques à l'aide de la fonction océan-continent. Sur la Figure 3-b est représentée la densité superficielle de masse à la fin de la glaciation, décomposée jusqu'au degré 30, associée au dernier cycle de glaciation-déglaciation. A l'aide des nombres de Love viscoélastiques, on peut calculer l'évolution temporelle de la topographie de l'interface noyau-manteau induite par cette surcharge en surface: 50000 ans après le début de la glaciation (Figure 3-c), à la fin de la glaciation (Figure 3-d), à la fin de la déglaciation (Figure 3-e) et au présent (c'est-à-dire 6000 ans après la fin de la déglaciation) (Figure 3-f) où elle est de l'ordre de la dizaine de mètres.

Sur la figure 4, on a représenté la topographie actuelle à l'interface graine-noyau fluide (Figure 4-a): elle est de l'ordre de quelques mètres et de très grande longueur d'onde. Le taux de déplacement radial actuel (mouvement vertical) induit par la dernière glaciation est dessiné sur la Figure 4-b: il est de quelques millimètres par an.

Ces topographies ont été calculées pour un contraste de viscosité de 30 entre le manteau inférieur et le manteau supérieur. Les résultats sont très sensibles à ce paramètre. Pour illustrer cela, on peut calculer la variation temporelle actuelle du coefficient de degré 2 du geopotentiel ($\dot{J}_2$) en fonction de la viscosité du manteau inférieur (Figure 5). On note

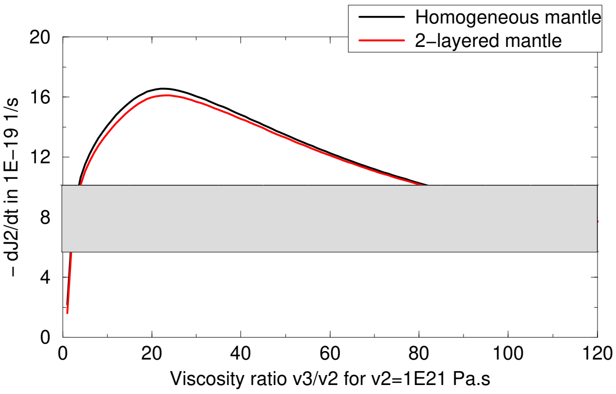
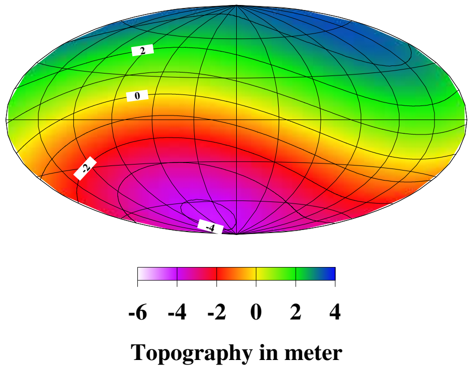


Figure 5: $\dot{J}_2$ pour une viscosité du manteau inférieur de 10^{21} à 10^{23} Pa.s. La zone ombrée représente la valeur observée et sa barre d'erreur (Cheng et al., 1989).

que pour deux modèles de viscosité du manteau inférieur, la dernière déglaciation peut expliquer la valeur observée de $\dot{J}_2$: un modèle avec un manteau quasi isovisqueux et un modèle avec un grand contraste de viscosité entre le manteau supérieur et inférieur. Ce dernier modèle est en accord avec des études géodynamiques basées sur l'influence des anomalies de masses du manteau sur le géoide.

a/ ICB topography induced by the last glaciation-deglaciation at the present



b/ Present radial displacement rate

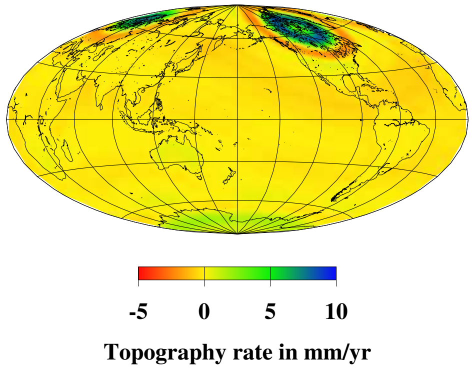


Figure 4: a- Topographie actuelle de l'ICB induite par la dernière déglaciation; b- taux de déformation radiale en surface actuel: le maximum se trouve sous les calottes glaciaires (en particulier, sous la Scandinavie)

Sur une échelle de temps plus grande (échelle de temps géologique), on peut utiliser les nombres de Love viscoélastiques pour calculer les effets de surcharges internes (anomalies de masse dans le manteau) sur les topographies (en surface, à la CMB ou à l'ICB) et sur le géoide.
Nous avons tout d'abord calculé analytiquement les effets de surcharge interne sur le coefficient $\dot{J}_2$ pour des modèles simples (Lefftz and Legros, 1993), puis différentes topographies pour un modèle d'anomalies de masses plus réaliste proposé par Ricard et al. (1993). Ce dernier modèle utilise des reconstructions de mouvements des plaques tectoniques, en faisant l'hypothèse que ces subductions plongent verticalement dans le manteau; cela permet d'avoir un modèle de l'évolution temporelle des anomalies de masse dans le manteau depuis 100 millions d'années. A l'aide des nombres de Love viscoélastiques, nous avons pu calculer les déformations induites dans la Terre profonde, par ces hétérogénéités du manteau (Greff-Lefftz and Legros, 1996).
Les topographies ainsi que les géoides calculés à la CMB et à l'ICB sont représentées respectivement sur la Figure 6 pour la CMB et sur la Figure 7 pour l'ICB. La topographie à la CMB est maximale sous l'anomalie de masse maximale, i.e. sous la ceinture du Pacifique, où elle a une amplitude d'environ -30 km: on a une déflection de l'interface qui tend à compenser isostatiquement les hétérogénéités de masse dans le manteau. Cette topographie est très sensible aux masses situées dans le manteau profond et pose le problème des plaques qui plongent jusqu'à la CMB dans le modèle Ricard et al. (1993).
Les termes de degrés 1-3 dominent dans la topographie à l'ICB: cela vient du fait qu'on prolonge un potentiel de surcharge dont les sources sont dans le manteau. La comparaison des figures 7-a et 7-b montre que la topographie est égale au rapport de l'equipotentielle sur la gravité à l'ICB: la graine est donc en équilibre hydrostatique sous l'action des anomalies de masses du manteau.

Ce formalisme de nombres de Love viscoélastiques peut avoir de nombreuses applications planétologiques. Nous avons montré, en particulier, (Lefftz et Legros, 1993-c) que pour la Lune, une surcharge interne (située à environ 400 km de profondeur), mise en place il y a environ 3.8 milliard d'années lors de la différenciation de l'océan de magma, avait crée des déformations viscoélastiques en surface qui, à cause de la viscosité élevée de la Lune, ne sont pas complètement relâchées aujourd'hui et permet d'expliquer la forme non-hydrostatique observée de la planète.

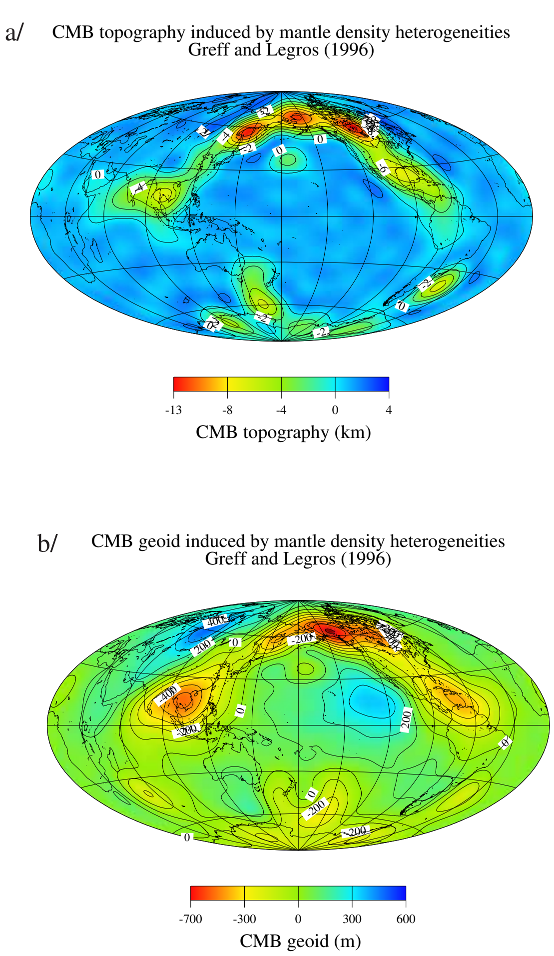


Figure 6: CMB topography (a) (contour interval 1km) and equipotential (b) (contour interval 50 m) induced by mantle-density heterogeneity of Ricard et al. (1993) in the degree range 1-15

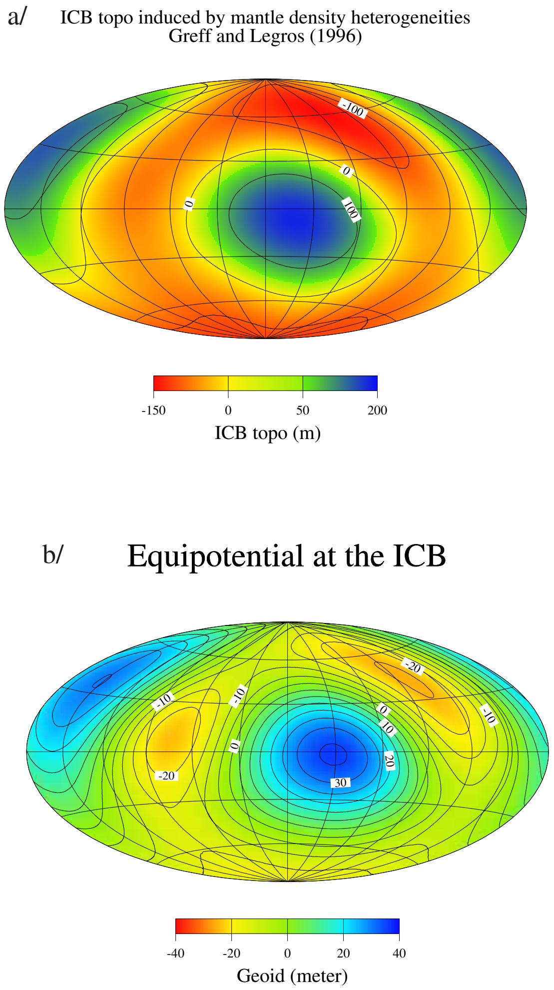


Figure 7: ICB topography (a) (contour interval 20 m) and equipotential (b) (contour interval 5 m) induced by mantle-density heterogeneity of Ricard et al. (1993) in the degree range 1-15

Dynamics of Earth's Deep Interior and Earth rotation
Geophysical Monograph 72, IUGG Volume 12
Published in 1993 by the International Union of Geodesy and Geophysics
and the American Geophysical Union

Variation of J_2 and internal loads

Marianne Lefftz and Hilaire Legros

Institut de Physique du Globe de Strasbourg, 5 rue R. Descartes, 67084 Strasbourg - France

Abstract. The temporal variation of the terrestrial gravity potential coefficients, and particularly of the J_2 coefficient of the degree 2 zonal term, has often been attributed to the viscous response of the Earth to superficial loads, especially to the one due to the last deglaciation. We show here that for a Maxwell model of rheology, such temporal variation can also result from internal loads, located at various discontinuities of the Earth model, and in particular at the 670 km depth discontinuity and at the core-mantle boundary.

Physics of the Earth and Planetary Interiors, Vol. 76 (3-4) (1993) pp. 317-327
Elsevier Science Publishers B.V. All rights reserved.

Some remarks on the non-hydrostatic form of the Moon

Marianne Lefftz [a] and Hilaire Legros[a]

[a] *Institut de Physique du Globe, 5, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France*

Abstract

The viscoelastic deformations of a gravitational rotating multilayered Maxwell planet, submitted to a volume external potential and to internal loads, are computed using a Love numbers formalism. First, we calculate the relaxation modes associated with the viscoelastic Love numbers; they are dependent on the jumps in density, rigidity or viscosity at each interface of the multilayered planet. The largest excitations for the relaxation modes associated with the density jump at a given interface i are obtained when mass anomalies are located at this interface. For the Moon, such a mode creates viscoelastic deformations that change the radial displacement and the mass redistribution potenial at the surface, which relax with a relaxation time of about 1 Ga. Taking into account the time-scale for the Moon's age, these are quasi-constant deformations. Finally, we show that the prevailing non-hydrostatic form of the Moon can be explained by an internal load (which appeared 3 Ga ago) located between the upper and lower parts of the lunar lithosphere, which creates viscoelastic surface deformations in the selenoid that are not completely relaxed at present.

Geophys. J. Int. (1996) **125,** 567–576

Viscoelastic mantle density heterogeneity and core-mantle topography

Marianne Greff-Lefftz and Hilaire Legros
Institut de Physique du Globe de Strasbourg, Dynamique Interne, 5 *rue R. Descartes* 67084 *Strasbourg, France*

Accepted 1995 December 23. Received 1995 September 14; in original form 1994 November 25

SUMMARY

Starting with the model of mantle density heterogeneity derived by Ricard *et al.* (1993), which uses plate-motion reconstructions under the assumption that subducted slabs sink vertically into the mantle, we model the temporal evolution of these internal loads. We investigate the viscoelastic deformation of the Earth due to this time-dependent excitation source using a Love-number formalism for a linear viscoelastic mantle with a Maxwell model of rheology. We are especially interested in the deep-Earth viscoelastic deformation, such as the radial displacement that appears at the core-mantle boundary, and we compare the calculated topography with that proposed by seismologists.

Key words: core-mantle boundary, mantle rheology, viscoelasticity.

4 Déformations de degré 1 ou géocentre

Nous avons vu dans la section 1.6, que pour le degré $n = 1$, il existe une relation entre les différentes fonctions y_i et que d'autre part, le centre de masse de la Terre n'est pas conservé. Nous nous sommes intéressés à l'étude théorique de ce problème (Greff-Lefftz and Legros, 1997), aussi bien dans le cas élastique que dans le cas visco-élastique où le nombre de modes de relaxation change également. Ce travail a été résumé dans un court article écrit pour des proceedings de l'IAG, suite à un exposé invité à l'IUGG en 1999.

4.1 Degree-one deformations of the Earth

Abstract

The degree one deformations of the Earth, in a reference frame related to the center of mass of the planet, are computed using a theoretical approach (Love numbers formalism) at short time-scale (from the month up to the century), where the Earth has an elastic behavior. The translations at each interface of the layers of the Earth's model (especially at the surface, at the Core-Mantle boundary (CMB) and at the Inner Core boundary (ICB)) are computed when the excitation source is the atmospheric pressure or a magnetic pressure acting at the CMB and at the ICB. The effects of external and internal tangential tractions are also investigated. The total force, resulting from the excitation sources, in a geographic frame (centered at the center of mass) has to be equal to zero, in order to conserve the center of mass of the Earth. This involves a relation between the different forcing mechanisms; we obtain a Consistency Relation, i.e., a special condition that the degree-one valid solutions have to obey (Farrell, 1972).
As geophysical application, we have computed the degree-one static deformations induced by atmospheric loading.
To end, at secular and geological time-scales, where the Earth has a viscoelastic behaviour, we have computed the secular and geological variations of the geocenter induced by post-glacial rebound and by mantle density heterogeneities.

Keywords. deformation, geocenter.

Introduction

The degree-one deformations of the Earth (and the induced discrepancy between the center of figure of the outer surface and the center of mass) are computed using a theoretical approach. In a first part, we briefly review the problem of the elasto-gravitational theory for the degree one and then some geophysical applications at different time-scales are presented.

Elasto-gravitational theory

We use the classical elasto-gravitational theory (Alterman et al, 1959). This is a theory of perturbation. We start with an initial state where the Earth is assumed to be in hydrostatic equilibrium, radially stratified following the PREM model (Dziewonski and Anderson, 1981). The origin of the reference frame is the center of mass (CM) which is identical to the center of geometry of the sphere at this initial state. At the perturbed state, the Earth is elastic and the static equations are still written in a reference frame related to the center of mass. The center of figure (CF) is defined as the geometric center of the outer deformed sphere with respect to CM. The differential equations governing the spheroidal part of the displacement field, the stresses and the body force potentials are of sixth order. Expanding the displacement vector field $\vec{u}$ and the traction $\vec{T}$ in spherical spheroidal vectors, $\vec{\nabla}_H$ denoting the tangential gradient :

$$\vec{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \Big[y_{1n}(r) Y_n^m(\theta,\varphi) \frac{\vec{r}}{r} + r y_{3n}(r) \vec{\nabla}_H Y_n^m(\theta,\varphi) \Big] \tag{44}$$

$$\vec{T} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \Big[y_{2n}(r) Y_n^m(\theta,\varphi) \frac{\vec{r}}{r} + r y_{4n}(r) \vec{\nabla}_H Y_n^m(\theta,\varphi) \Big] \tag{45}$$

noting for the potential

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} y_{5n}(r) Y_n^m(\theta,\varphi) \tag{46}$$

and introducing for the radial derivative of the potential a function defined by

$$y_{6n}(r) = \frac{dy_{5n}(r)}{dr} - 4\pi G \rho y_{1n}(r) \tag{47}$$

where Y_n^m are the spherical harmonics, θ the colatitude, φ the longitude, $\rho(r)$ the density and G the gravitational constant, the static elasto-gravitational equations (describing the mass conservation, the equation of Poisson and the Hookean rheological law) can be written (Alterman et al., 1959)

$$\frac{dy_{in}(r)}{dr} = \sum_{j=1}^{6} A_{ij}^n \;\; y_{jn}(r) \quad \text{for } i = 1..6 \tag{48}$$

where A_{ij}^n is a 6×6 matrix whose elements are a function of the compressibility , the rigidity, the density and the gravity $g(r)$.
When the Earth is submitted to a surface loading potential S_n^e, $y_{in}(r)$ are continuous within the Earth and there are three boundary conditions at the outer surface $r = a$:

- the tangential stress is equal to zero $y_{4n}(a) = 0$
- the radial stress is equal to the pressure effect of the load: $y_{2n}(a) = -\frac{2n+1}{3}\tilde{\rho} S_n^e$
- the discontinuity in the radial derivative of the potential may be written:

$$y_{6n}(a) + \frac{n+1}{a} y_{5n}(a) = \frac{2n+1}{a} S_n^e \tag{49}$$

For the degree $n = 1$ there are two problems: first, the surface boundary conditions are not independent, and second, the center of mass of the Earth is not conserved.
Farrell (1972) has shown that for the degree $n = 1$ there is a Consistency Relation, that is to say a special condition that the degree-one valid solutions have to obey. For a surface

load, this relation may be written (in the above section, the subscript $n = 1$ will be suppressed for simplicity of notation):

$$y_2(r) + 2y_4(r) + \frac{g(r)}{4\pi G}[y_6(r) + \frac{2}{r}y_5(r)] = 0 \tag{50}$$

this is a relationship between the stresses and the potential within the Earth (Saito, 1974). Because of this relationship, the boundary conditions are not independent: only two of the three surface boundary conditions are needed and the Consistency Relation ensures that the third boundary condition is met automatically. To solve the elasto-gravitational differential system (48) we have to add a new boundary condition: the conservation of the center of mass of the Earth. From the MacCullagh theorem (Munk and MacDonald, 1960), we show that the conservation of the center of mass will simply require that the degree-one surface potential is equal to zero:

$$y_5(a) = 0 \tag{51}$$

The Consistency Relation may be interpreted as implying that, in the static case, there cannot be net force on any portion of the Earth (Okubo and Endo, 1986). As a matter of fact, if we rewrite this Relation when the Earth is submitted to external and internal pressure and tangential traction (noted respectively P^e and T^e at the surface, P^c and T^c at the CMB (r=b) and P^{ic} and T^{ic} at the ICB (r=c)), we will obtain (Greff-Lefftz and Legros, 1997):

$$a^2(-P^e + 2T^e) + b^2(P^c + 2T^c) + c^2(-P^{ic} + 2T^{ic}) = 0 \tag{52}$$

The total degree one force acting at the various fluid-solid interfaces and at the surface of the planet has to be equal to zero. There may be a static equilibrium between stresses at ICB and CMB (which vary at decadal time-scale) and a static equilibrium between pressure and tangential traction at the Earth's surface (which vary at annual time-scale).

Solving the elasto-gravitational static system for the degree one and using the new boundary condition described above, we obtain the displacement field within the Earth, when the Earth is submitted to a surface load. Expanding the surface loading potential in non-normalized degree-one spherical harmonics:

$$S_1^e = S_1^{0e}\cos\theta + [\cos\varphi S_1^{1e} + \sin\varphi \tilde{S}_1^{1e}]\sin\theta \tag{53}$$

the displacement at the Earth's surface may be written using a Love number formalism:

$$\left[X, Y, Z\right] = \frac{h_1 + 2l_1}{3}\left[\frac{S_1^{1e}}{g_o}, \frac{\tilde{S}_1^{1e}}{g_o}, \frac{S_1^{0e}}{g_o}\right] \tag{54}$$

Geophysical application

- **Atmospheric continental loading**
  In this part we want to investigate the effects of the atmospheric pressure on the

geocenter. To compute the degree-one deformations, we use a model proposed by Gegout (1995) for the atmospheric loading. The data are the 11-years pressure field record provided by ECMWF. The atmospheric load which has dominant annual and semi-annual components, is separated in two parts: a part over the continents and a part over the oceans. On the one hand, the load over the oceans does not deform the Earth, because oceans react as Inverted Barometer at this time-scale. On the other hand, the load over the continent deforms the whole Earth, i.e the continental surface but also the bottom of the oceans. As a consequence, we have to take into account the variations of the water thickness induced by the deformation of the bottom of oceans. To do that, Gegout (1995) has introduced a coefficient β_n which is a combination of Love numbers (h_n in radial displacement and $1 + k_n$ in surface potential)

$$\beta_n = 1 - \frac{\rho^w}{\tilde{\rho}}(1 + k_n - h_n) \tag{55}$$

where ρ^w is the water density and $\tilde{\rho}$ the mean density of the Earth. For the degree-one, because of the conservation of the center of mass, β_1 may be simply written: $\beta_1 = 1 + \frac{\rho^w}{\tilde{\rho}} h_1$. The surface displacement is then written using classical Love numbers and this β_1 coefficient:

$$y_1(a) = \frac{h_1}{\beta_1}\frac{S_1^e}{g_o}; \quad y_3(a) = \frac{l_1}{\beta_1}\frac{S_1^e}{g_o}; \tag{56}$$

where S_1^e is the degree-one spherical harmonics coefficients of the continental part of the atmospheric loading. The effect of the variation of the water thickness is an increase of the amplitude of the degree-one deformations by about 30%.

We have plotted, on Figure 8, the degree-one non-normalized coefficients of the continental atmospheric loading S_1^{0e}, S_1^{1e}, $\tilde{S}_1^{1e}$ and the associated variation of the geocenter coordinates from 1985 up to 1997. The geocenter variation is about a few millimeters and has essentially annual and semi-annual components. Z has the largest amplitude but has noise. Y has a major annual component. These results are similar to those obtained by Dong et al. (1997) in phase but the amplitude is 30 % larger because of the amplification factor β_1.

We have also computed the variations of the figure center of the CMB and of the ICB with respect to the center of mass (in Figure 9). These are about one millimeter for the CMB and 0.1 mm for the ICB.

Some recent space geodesy measurements (DORIS, GPS and SLR) give the variations of CF with respect to a fixed reference frame. In Figure 10 we present a compilation of these observations done by Sillard (1998) for the X, Y and Z annual and semi-annual components of the geocenter since 1993. Note that these different kinds of data are neither consistent in phase nor in amplitude. The amplitude of the observations seems to be about 10 mm, that is to say larger than the geocenter variations induced by atmospheric loading: this source cannot alone explain the annual and semi-annual variations of the geocenter. Dong et al. (1997) have shown that the ground water storage may create an annual variation of the geocenter with the same order of magnitude than the observations.

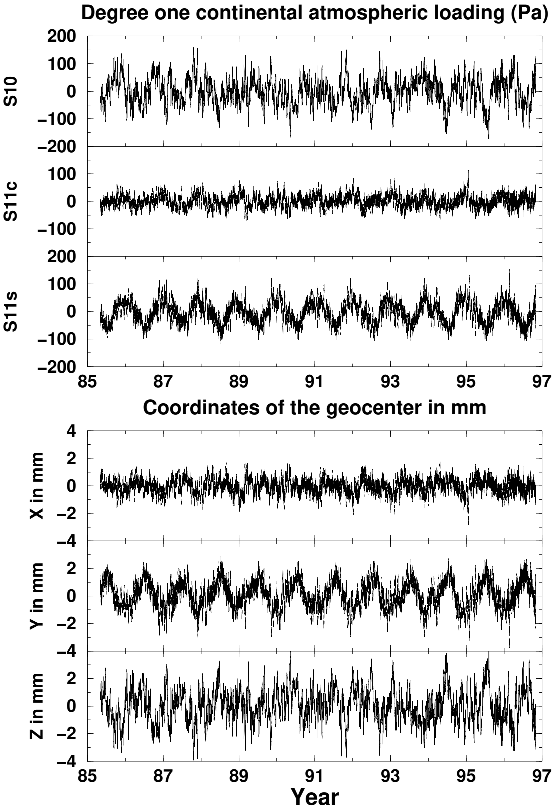


Figure 8: (top): degree one non-normalized spherical harmonics coefficients for the continental atmospheric loading computed by Gegout (1995). (bottom): coordinates of the geocenter derived from the above load.

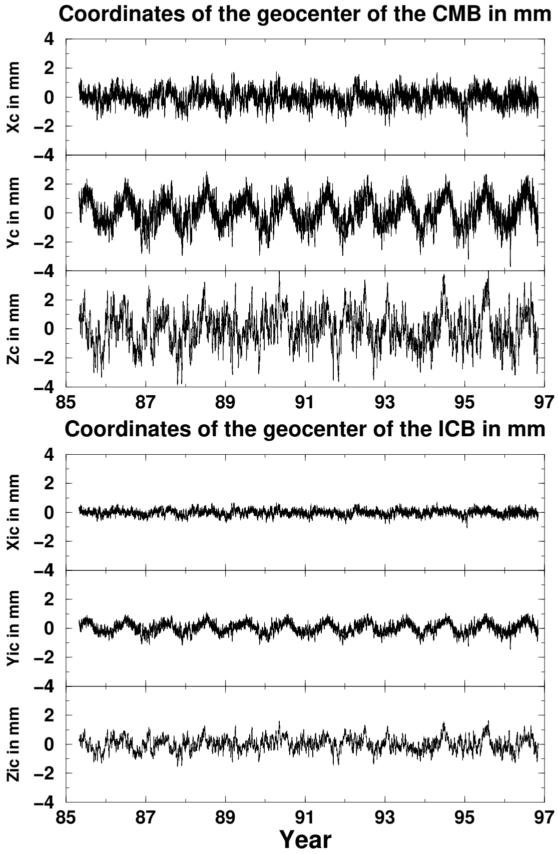


Figure 9: (top): temporal variation, in millimeter, of the coordinates of the figure center of the CMB. (bottom) : same than the top for the ICB

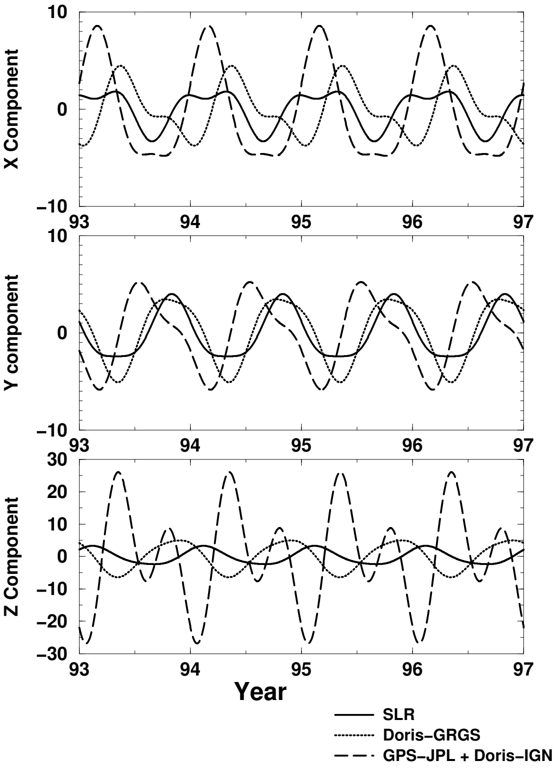


Figure 10: Observed variation of the geocenter's coordinates since 1993, from Sillard, 1998

- **Secular and geological variation of the geocenter**
In this part, we present an application of the same theory at longer time-scale, where the effect of the viscosity of the mantle has to be taken into account: this is the degree-one Visco-Elasto-Gravitational theory. We assume a Maxwell model of rheology for the mantle (for more details, see Greff-Lefftz and Legros, 1997).
At secular time-scale, we have computed the geocenter variation induced by the Pleistocenic deglaciation, for the present-time (almost 7000 years after the end of the deglaciation). We find a surface translation of about one meter in the direction ($\theta_o = 20.7^o$ and $\lambda = -46.6^o E$), which tends to be relaxed in the future, because of the surface isostatic compensation. The present rate of the geocenter's variation is strongly dependent on the viscosity profile within the mantle. Assuming a viscosity of the upper mantle of about 10^{21} Pa.s, we plot in Figure 11 the rate $\sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2}$ (the dot denotes here the time-derivative) obtained for viscosity increases in the lower mantle varying from 5 up to 100. The value of this rate varies from 0.2 up to 0.4 mm/years and consequently, in 10 years, one can expect a variation of the geocenter induced by the post-glacial rebound comparable to the one due to atmospheric loading.
At geological time-scale, we have computed the degree one deformation induced by the present-day mantle density heterogeneity derived by Ricard et al. (1993). This model uses plate motion reconstructions under the assumption that subducted slabs sink vertically into the mantle. It assumes, at 670 km depth, no density jump and a viscosity contrast of about 40. We find that the difference between CF and CM, i.e. the coordinates of the geocenter, is of about some hundred meters. At the time-scale of the observations (i.e. few years) it could be interesting to see how this kind of constant translation may be observed in geodetical measurements.

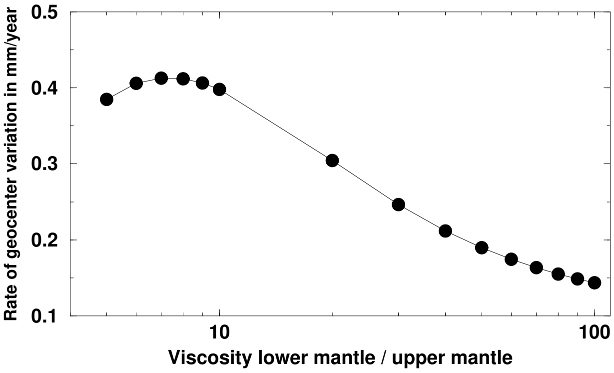


Figure 11: rate of the geocenter temporal variation in the antipodal direction of the load ($\theta_o = 20.7^o$ and $\lambda = -46.6^o E$)

Conclusion

In this paper we have computed the degree one elastic and viscoelastic deformations of the Earth using a theoretical approach. We have noted that for the degree-one deformations, a Consistency Relation exists implying that the total force acting on the Earth has to be equal to zero.

As geophysical application, we have computed the degree one elastic deformations induced by atmospheric continental loading: the geocenter's variation has semi-annual and annual components and is about a few millimeters.

At secular time scale, we find that the post-glacial rebound involves a present rate of the geocenter variation of about 0.2 - 0.4 mm/year.

At geological time-scale, we obtain a geocenter about a few hundred meters, varying on the time-scale of the convection, i.e some millions years.

References

Alterman, Z., Jarosch, H. & Pekeris, C.H., 1959. Oscillation of the Earth. Proc. R. Soc. London, **A252**, 80-95.

Dong, D., Dickey, J.O., Chao, Y. & Cheng, M.K., 1997. Geocenter variations caused by atmosphere, ocean and surface ground water. *Geophys. Res. Let.*, **24**, No 15, 1867-1870.

Dziewonski, A.M., & Anderson, D.L., 1981. Preliminary Reference Earth Model PREM, *Phys. Earth Planet. Int.*, **25**, 297-356.

Farrell, W.E., 1972. Deformation of the Earth by Surface Loads. Reviews of Geophysics and Space Physics, **10**,n^o3, 761-797.

Gegout, P., 1995. De la variabilité de la rotation de la Terre et du champ de gravité, conséquente aux dynamiques de l'Atmosphère et des Océans. Thesis, Strasbourg, France.

Greff-Lefftz, M. & Legros, H., 1997. Some remarks about the degree-one deformation of the Earth.*Geophys. J. Int.*, **131**, 699-723.

Munk, W.H. & MacDonald, G.J.F. 1960. The rotation of the Earth, Cambridge University Press, 323 pp.

Okubo, S. & Endo, T., 1986. Static spheroidal deformation of degree I. Consistency relation, stress solution and partials, *Geophys. J.R. astr. Soc.*, **86**, 91-102.

Ricard, Y., Richards, M., Lithgow-Bertelloni,C. & Le Stunff Y., 1993. A geodynamical model of mantle density heterogeneity. J. Geophys. Res., **98**, 21895-21909.

Saito, M., 1974. Some problems of static deformation of the earth. *J. Phys. Earth*, **22**, 123-140.

Sillard, P., 1998. Les variations du géocentre determinees par DORIS et les autres techniques de geodesie spatiale. Journées DORIS 1998, Toulouse, 28 Avril 1998.

4.2 Mouvements du géocentre - Synthèse sur les concepts et les mesures

La comparaison des variations calculées du géocentre avec celles observées par la géodésie spatiale n'est pas aisée, les géodésiens ne se repérant pas dans un système lié au centre de masse, et la sphère de référence initiale utilisée par les géophysiciens étant quelque peu fictive.
Dans le cadre du Groupe de Recherche AGRET (Astrométrie, Géodynamique et Systèmes de Référence) qui a pour "mission d'organiser des études trans-disciplinaires dans des domaines où les géophysiciens et les géodésiens sont susceptibles de s' épauler mutuellement", un groupe de travail s'est mis en place, afin que les géodésiens et les géophysiciens se mettent d'accord sur une définition, et que les relations entre les différentes mesures et les repères de la géophysique soient clairement établies, si elles existent.
En tant que membre du Conseil Scientifique d'AGRET, j'ai coordonné ce groupe. A l'issue d'un peu plus d'une année de travail, un manuscrit de revue sur le sujet a été établi. Je le transmets intégralement ici car il pose bien les différents problèmes et propose quelques recommandations.

LE GEOCENTRE: CONCEPTS, DEFINITION ET REALISATION

M. GREFF [a], R. BIANCALE, J.F. CRETAUX, J.M. LEMOINE, S. LOYER [b], H. LEGROS, P. GEGOUT [c], M. FEISSEL [df], P. SILLARD [d], P. EXERTIER [e]

[a] Institut de Physique du Globe de Paris
[b] GRGS-CNES, Toulouse
[c] Institut de Physique du Globe de Strasbourg
[d] LAREG-IGN, Marne La Vallée
[e] CERGA-OCA, Grasse
[f] Observatoire de Paris

18 Janvier 2001

Concepts et définitions

Centre de masse

La masse du système Terre (comprenant la Terre solide, son noyau fluide, l'océan et l'atmosphère), considéré comme un système isolé, se conserve.

Le centre de masse C_m est défini par la nullité du moment de degré 1 de la densité dans le volume du système :

$$\frac{1}{M_T} \int_{V_{systeme}} \rho \overrightarrow{C_m P} dv = 0 \tag{57}$$

où P sont les points courants de l'intérieur du système, M_T la masse totale et ρ la densité de la planète.
Il semble préférable de rejeter le terme 'centre de gravité'.
En l'absence de toute force extérieure (nous ne prenons pas en compte ici l'influence gravitationnelle du Soleil, de la Lune et des planètes), la Terre est un système isolé, quels que soient les déplacements de masse générés en son sein d'après le principe d'action-réaction.

Modélisation des mouvements de stations et relation avec les repères de référence

En géodésie comme dans toutes les sciences métrologiques, on distingue traditionnellement le concept de sa réalisation. Pour les systèmes de référence, cette distinction s'opère comme suit:

- un système de référence terrestre idéal est un espace affine euclidien muni d'une base orthonormée comobile avec la surface terrestre, d'échelle proche de l'unité, d'origine voisine du centre des masses de la Terre

- un système de référence terrestre conventionnel consiste en la description des lois de la physique, des constantes et des algorithmes réalisant le système idéal
- enfin, un repère de référence terrestre conventionnel est la donnée de coordonnées d'évènements exprimées dans le système conventionnel précédent. Ces évènements sont par exemple les positions occupées par un ensemble de stations (réseau) à un instant donné. On dit alors que le système terrestre est réalisé par le jeu de coordonnées des stations du réseau. Le repère est donc une réalisation du système terrestre.

Le concept de système idéal est relativement flou, mais est nécessaire pour construire une hiérarchie théorique entre un concept et sa mise en pratique. Dans un sens, le système conventionnel est lui aussi une réalisation du système idéal. Puisque la notion de système idéal est floue, on peut très bien considérer que deux systèmes conventionnels n'ont pas la même origine. C'est ce que nous faisons dans la suite du texte. On considère deux systèmes conventionnels, l'un vérifiant rigoureusement les hypothèses du système idéal (repère non tournant, centré au centre des masses de la Terre et d'échelle unité), et l'autre possédant une orientation, une échelle et une origine arbitraires. La transformation entre ces deux systèmes est une similitude (les bases sont des trièdres orthonormés). Ainsi, on écrira pour une station indicée i:

$$\overrightarrow{C_mM_i}(t) = \overrightarrow{OM_i^b}(t_o) + (t-t_o)\dot{\overrightarrow{OM_i^b}} + \overrightarrow{T}(t) + \mu(t)\overline{\overline{R}}(t)\left[\overrightarrow{OM_i^b}(t_o) + (t-t_o)\dot{\overrightarrow{OM_i^b}}\right] \quad (58)$$

où O est l'origine du second système, $\overrightarrow{T}(t)$, $\mu(t)$ et $\overline{\overline{R}}(t)$ correspondant respectivement au vecteur de translation, au facteur d'homothétie et à la matrice de rotation qui permettent de changer de système. On en déduit une relation entre les coordonnées cartésiennes de la station dans les deux repères:

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_i^o \\ Y_i^o \\ Z_i^o \end{pmatrix} + (t-t_0)\begin{pmatrix} \dot{X}_i^o \\ \dot{Y}_i^o \\ \dot{Z}_i^o \end{pmatrix} + \overrightarrow{T}(t) + \mu(t)\overline{\overline{R}}(t)\left[\overrightarrow{OM_i^b}(t_0) + (t-t_0)\dot{\overrightarrow{OM_i^b}}\right] \quad (59)$$

Du fait de la forme presque sphérique de la Terre, les déformations s'étudient au mieux à partir d'une représentation de tous les paramètres dans un système de coordonnées sphériques par des fonctions sphériques, notées $Y_n^m(\theta, \lambda)$, fonctions harmoniques de degré n et d'ordre m, solutions de l' équation de Laplace. Ainsi les fonctions excitatrices, le champ de déplacement sphéroidal $\vec{u}(r, \theta, \lambda)$ et la perturbation du potentiel de gravitation $\Phi(r, \theta, \lambda)$ vont se développer en séries de fonctions sphériques; on aura par exemple:

$$\vec{u}(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} y_{1n}(r) Y_n^m(\theta, \lambda)\frac{\vec{r}}{r} + r y_{3n}(r)\vec{\nabla} Y_n^m(\theta, \lambda) \quad (60)$$

$$\Phi(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \Phi_n(r) Y_n^m(\theta, \lambda)$$

où θ et λ sont respectivement la colatitude et la longitude. Il faut noter que le terme de degré $n = 1$ dans la décomposition en harmoniques sphériques du déplacement décrit une translation de la planète.

Un repère ayant pour origine le centre de masse C_m est un repère naturel pour l'orbitographie des satellites. En effet, dans ce cas, le potentiel gravitationnel ne comporte pas de terme de degré 1 dans sa décomposition en harmoniques sphériques. Dans une certaine mesure, c'est aussi un repère naturel pour la forme de la surface océanique.

Le point de vue géophysique (supposant a-priori un système de référence et une configuration de référence (non observable) dont on étudiera les perturbations) se situe lui-aussi dans un cadre dynamique et il parait donc naturel de prendre un repère centré au centre de masse C_m. La configuration de référence sera donc centrée en son centre de masse C_m. Sous l'effet de redistributions de masse de degré 1 (par 'degré 1', on entendra, par la suite, degré 1 dans la décomposition en harmoniques sphériques), la Terre se déforme; on pose

$$\overrightarrow{C_m M_i}(t) = \overrightarrow{C_m M_i^o} + \overrightarrow{u_i}(t) \tag{61}$$

On peut montrer qu'au premier ordre en déplacement, la position des stations se déduit de leurs positions initiales par une translation locale faisant intervenir les nombres de Love h_1 et l_1 associés respectivement au déplacement radial et tangentiel.
Soit une surcharge en surface dont le potentiel de degré 1 s'écrit:

$$S_1^e(\theta, \lambda) = S_{10} \cos\theta + (S_{11}^c \cos\lambda + S_{11}^s \sin\lambda) \sin\theta \tag{62}$$

Sous l'action de cette surcharge la Terre se déforme et le déplacement de sa surface ($r = R_T$, où R_T est le rayon de la sphère initiale de référence) s'écrit, en coordonnées sphériques:

$$\vec{u}(R_T, \theta, \lambda) = \begin{pmatrix} u_r(\theta, \lambda) \\ u_\theta(\theta, \lambda) \\ u_\lambda(\theta, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \frac{S_1^e(\theta,\lambda)}{g_o} \\ \\ l_1 \frac{1}{g_o} \frac{\partial S_1^e(\theta,\lambda)}{\partial\theta} \\ \\ l_1 \frac{1}{g_o} \frac{\partial S_1^e(\theta,\lambda)}{\sin\theta \partial\lambda} \end{pmatrix} \tag{63}$$

où g_o est la gravité radiale en surface. Les nombres de Love h_1 et l_1 se calculent en résolvant les équations de la gravito-élasticité et des conditions de continuité pour une Terre soumise à une surcharge en surface, dans un repère lié au centre des masses de la Terre déformable. Si la sphère initiale de référence est compressible, stratifiée radialement en densité et en rigidité selon le modèle sismologique PREM (Anderson and Dziewonski, 1981), on obtient les valeurs numériques : $h_1 = -1.2858$ et $l_1 = -0.8958$. Il faut noter que l'on trouve dans la littérature des nombres de Love exprimant les déformations dans des repères non-centrés au centre des masses de la Terre déformable (par exemple Farrell (1972)).

On peut calculer les perturbations des coordonnées cartésiennes, notées (X_i, Y_i, Z_i) d'une station M_i située à la colatitude θ_i et à la longitude λ_i, dans un repère lié au centre de masse, sous l'action d'une surcharge en surface:

$$\overrightarrow{C_mM_i} = R_T\vec{e_r} + \vec{u}(R_T, \theta_i, \lambda_i) = X_i\vec{e_x} + Y_i\vec{e_y} + Z_i\vec{e_z} \tag{64}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} X_i - X_i^o = \frac{h_1+2l_1}{3}\frac{S_{11}^c}{g_o} + \frac{h_1-l_1}{3}\Big[\frac{S_{10}}{g_o}Y_{21}^c + \frac{S_{11}^s}{2g_o}Y_{22}^s + \frac{S_{11}^c}{g_o}(\frac{1}{2}Y_{22}^c - Y_{20})\Big] \\ Y_i - Y_i^o = \frac{h_1+2l_1}{3}\frac{S_{11}^s}{g_o} + \frac{h_1-l_1}{3}\Big[\frac{S_{10}}{g_o}Y_{21}^c + \frac{S_{11}^c}{2g_o}Y_{22}^s - \frac{S_{11}^s}{g_o}(\frac{1}{2}Y_{22}^c + Y_{20})\Big] \\ Z_i - Z_i^o = \frac{h_1+2l_1}{3}\frac{S_{10}}{g_o} + \frac{h_1-l_1}{3}\Big[2\frac{S_{10}}{g_o}Y_{20} + \frac{S_{11}^c}{g_o}Y_{21}^c + \frac{S_{11}^s}{g_o}Y_{21}^s\Big] \end{cases} \tag{65}$$

avec $[X_i^o, Y_i^o, Z_i^o] = [R_T \sin\theta_i \cos\lambda_i, R_T \sin\theta_i \sin\lambda_i, R_T \cos\theta_i]$.
Les harmoniques sphériques de degré 2 sont définies par:

$$Y_{20} = \frac{3\cos(\theta_i)^2 - 1}{2}; \quad Y_{21}^c = 3\sin\theta_i\cos\theta_i\cos\lambda_i; \quad Y_{21}^s = 3\sin\theta_i\cos\theta_i\sin\lambda_i; \tag{66}$$

$$Y_{22}^c = 3\sin(\theta_i)^2\cos 2\lambda_i; \quad Y_{22}^s = 3\sin(\theta_i)^2\sin 2\lambda_i$$

Centre de figure et centre de forme

Pour rejoindre le point de vue géodésien, il faut trouver dans le déplacement $\vec{u}(R_T, \theta, \lambda)$ local une partie globale.
D'un point de vue strictement géométrique, on peut définir un **centre de figure** C_f par rapport la surface de la Terre S_{Terre} (solide et liquide) tel que :

$$\frac{1}{A}\int\limits_{S_{Terre}} \overrightarrow{C_fS}ds = 0 \tag{67}$$

où S sont les points courants de la surface terrestre d'aire A.
Pour calculer les coordonnées du centre de figure C_f, on considère le déplacement moyen en surface dans un repère lié au centre de masse:

$$\overrightarrow{C_mC_f} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} \int\int X_i\sin(\theta_i)d\theta_i d\lambda_i \\ \int\int Y_i\sin(\theta_i)d\theta_i d\lambda_i \\ \int\int Z_i\sin(\theta_i)d\theta_i d\lambda_i \end{pmatrix} = \frac{h_1+2l_1}{3}\begin{pmatrix} \frac{S_{11}^c}{g_o} \\ \frac{S_{11}^s}{g_o} \\ \frac{S_{10}}{g_o} \end{pmatrix} \tag{68}$$

Pour les valeurs numériques des nombres de Love h_1 et l_1 données précédemment, on trouve $\frac{h_1+2l_1}{3} = -1.025$; l'élasticité du manteau est négligeable pour la détermination du centre de figure (une planète parfaitement rigide aurait $h_1 = -1$; $l_1 = -1$ et donc $\frac{h_1+2l_1}{3} = -1$).

Il ne faut pas confondre ce centre de figure avec le centre de la sphère translatée. En effet, au premier ordre en déplacement, d'après l'équation (65) on a la relation:

$$(X_i - h_1\frac{S_{11}^c}{g_o})^2 + (Y_i - h_1\frac{S_{11}^s}{g_o})^2 + (Z_i - h_1\frac{S_{10}}{g_o})^2 = R_T^2 \tag{69}$$

La **forme** de la sphère dans l'état perturbé est une sphère translatée. On peut définir un centre C_{forme} comme le centre de la sphère précédente translatée avec:

$$\overrightarrow{C_m C}_{forme} = \begin{pmatrix} h_1\frac{S_{11}^c}{g_o} \\ h_1\frac{S_{11}^s}{g_o} \\ h_1\frac{S_{10}}{g_o} \end{pmatrix} \tag{70}$$

Il faut noter que l'élasticité du manteau n'est plus négligeable pour la détermination du centre de forme ($h_1 = -1.2858 \neq -1$).
Néanmoins, si l'on peut définir mathématiquement cette notion de forme, ou encore de topographie de degré 1, il est difficile de la relier aux observations des stations.

La notion de centre de figure a été fréquemment utilisée dans la littérature (Trupin et al. 1992; Dong et al., 1997; Greff and Legros, 2000). Cependant, la réalisation de ce centre de figure repose sur un échantillonage de la surface terrestre par des stations d'observations. Il s'ensuit une réalisation imparfaite et éventuellement biaisée de ce centre de figure.

Origine du repère géométrique

On introduit un **centre géométrique défini par les mesures**. Dans cette référence géométrique que nous allons préciser, la position du centre de masse varie dans le temps. Etant donné un réseau de stations réparties à la surface de la Terre, l'analyse des observations par les méthodes dynamiques (ces méthodes reliant la position des stations de suivi aux trajectoires calculées par rapport au centre des masses) permet de réaliser un repère géométrique implicite par l'attribution de coordonnées explicites aux stations. Autrement dit, les coordonnées apparaissent dans les équations de réduction des observations; les éléments de définition du repère [cf équation (58)] eux n'interviennent pas.
Soit un réseau de N stations M_i, $i = 1..N$. On définit le barycentre G de ce réseau par:

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \tag{71}$$

On peut noter que cette équation (71) est un pendant de l'équation (67) dans le cas d'une Terre échantillonnée.
Un réseau de stations représente un échantillonnage non uniforme de la surface terrestre. Il s'ensuit que la position de son barycentre diffère par une translation constante inconnue de celle du centre géométrique. Mais, pour un même réseau de stations, les variations

temporelles de G sont identiques à celles du centre géométrique.
Le rattachement au centre de masse de ce repère géométrique implicite est obtenu en imposant, dans l'analyse, la nullité des coefficients de degré 1 dans la décomposition en harmoniques sphériques du potentiel gravitationnel.

Recommandations

On recommande d'appeler **géocentre**, ce centre géométrique défini par les mesures. On utilisera cette définition dans la suite.

L'ITRF 2000 (International Terrestrial Reference Frame) réalise une origine O du système conventionnel qui est, elle-aussi, rattachée au centre de masse en annulant les coefficients de degré 1 du potentiel gravitationnel. On peut recommander aux géodésiens de se repérer par rapport à cette origine.

Les géophysiciens travaillant dans une configuration initiale de référence non-réalisable perdront une constante par rapport aux observations géodésiques. En conséquence, seules les variations temporelles du géocentre calculé et du géocentre réalisé pourront être comparées.

Variations temporelles et réalisation du géocentre

Les variations temporelles du géocentre reflètent les déformations de surface de la croûte terrestre correspondant à une translation globale du réseau dans un large spectre de fréquences.
Elles sont causées par des phénomènes de charges de degré 1 internes ou en surface:

- des phénomènes séculaires (tectonique, rebond post-glaciaire, évolution dynamique des masses mantéliques par convection ...)
- des phénomènes maréaux (marées terrestre, polaire...)
- des phénomènes de forçage (surcharges en surface, de type eaux continentales, neige, glace, atmosphère, océans ...)
- des phénomènes aléatoires dus à des causes accidentelles (séisme ...)

La réalisation du géocentre passe par l'ajustement des coordonnées (par exemple X_i) de chaque station i par rapport à un référentiel ayant pour origine C_m, au moyen d'une modélisation qui inclut:

- une constante X_{oi} qui définit la position de la station à un date donnée par rapport au géocentre
- des termes variant dans le temps: un terme séculaire $\dot{X}_i t$ qui traduit une translation lente de chaque station du réseau et des termes périodiques qui représentent les déplacements dûs aux surcharges ou aux marées à la fréquence ω_k

- un terme aléatoire $\epsilon_i(t)$

On peut donc décrire la variation temporelle des coordonnées (par exemple X_i) dans le référentiel ayant pour origine C_m sous la forme:

$$X_i(t) = X_{oi} + \dot{X}_i t + \Sigma_k a_k^i \sin(\omega_k t - \phi_k^i) + \epsilon_i(t) \tag{72}$$

C'est la partie commune à toutes les stations qui est interprétée comme une mesure de la variation du géocentre.

Dans la figure suivante, on montre un exemple détermination des termes annuels et semi-annuels du géocentre issu de la solution GRIM5 (GRGS/GFZ).

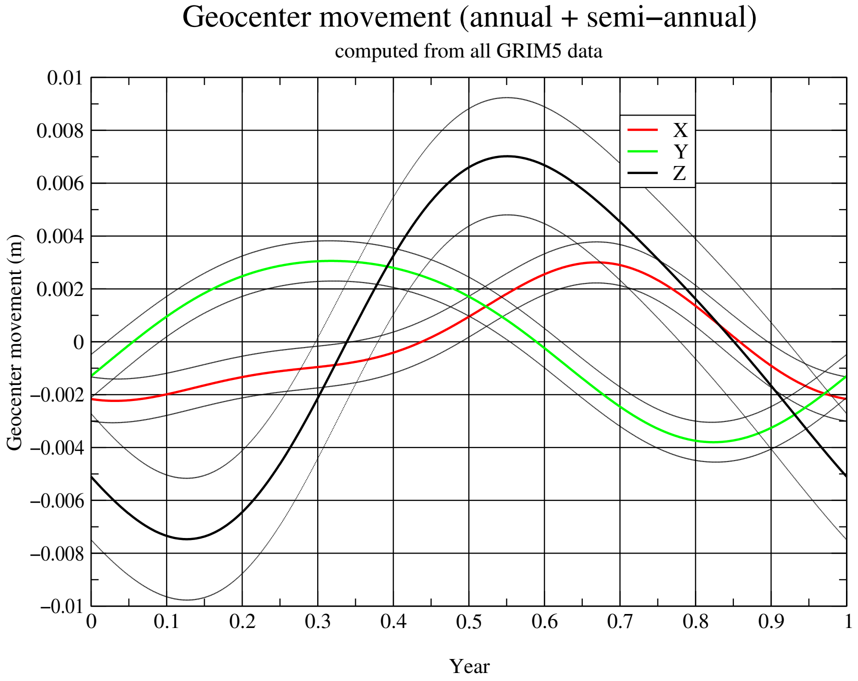


Figure 12: Exemple de détermination des termes périodiques annuels et semi-annuels du géocentre issu de la solution GRIM5 (GRGS/GFZ)

4.3 Modes de Slichter

L'approche théorique permettant de calculer les déformations statiques de degré 1 peut être étendue à l'étude des modes gravito-inertiels et sismiques. Je me suis particulièrement intéressée au mode de Slichter (mode gravito-inertiel de translation de la graine). Nous avons résolu analytiquement, pour le degré $n = 1$, le système de y_i pour un modèle de Terre simplifié comprenant trois couches homogènes incompressibles (le manteau, le noyau et la graine), en conservant cette fois les termes inertiels. La rotation a été négligée dans ce calcul simplifié; elle aurait pour effet de transformer ce mode en un triplet (phénomène classiquement appelé 'splitting' des modes). Nous avons montré que comme pour le problème de déformation statique, il existe une relation de Consistence entre les différents y_i (avec cette fois des termes dépendant de la fréquence), et que l'on doit rajouter la conservation du centre de masse de la Terre globale pour résoudre le système.
La valeur de la période de ce mode dépend fortement du saut de densité à l'interface graine-noyau fluide. Pour le modèle PREM, elle est supérieure à 4 heures. Mais d'autres paramètres, tels que la viscosité de la graine, peuvent également influencer la période et l'atténuation de ce mode. Les propriétés physiques de l'intérieur de la Terre profonde ne sont pas très bien contraintes par la sismologie: ceci explique l'intéret d'observer ce mode par d'autres types de méthodes. Sa detection à l'aide des séries temporelles des gravimètres supra-conducteurs est encore très controversée: l'amplitude de l'excitation de ce mode semble inférieure à quelques dizaines de nanogals et donc est fortement perturbée par le bruit atmosphérique.
Les mécanismes d'excitation de ce mode sont encore mal connus. Nous en avons étudié quelques uns. Ils doivent être de courte période par rapport au jour.

- Pour modéliser l'effet d'un tremblement de Terre, nous avons étudié l'effet d'une redistribution de masse instantanée en surface. Une perturbation de gravité de quelques nanogals induite par un seisme correspondrait à une translation de la graine de quelques centimètres.

- Avec notre formalisme analytique, nous avons calculé l'effet d'une variation temporelle rapide dans la pression magnétique de degré 1 à l'ICB et à la CMB. Ce forçage est très efficace, mais l'existence de telles secousses magnétiques est très hypothétique. En effet, les observations magnétiques à la surface de la Terre sont filtrées par un effet de peau lié à la conductivité du manteau inférieur et donc n'apportent pas d'information sur la dynamique magnétique du noyau pour des périodes inférieures à quelques mois.

Les progrès dans l'exactitude et la précision des mesures géodésiques et gravimétriques ont été de plusieurs ordres de grandeur depuis trois décennies, ouvrant de très nouvelles perspectives pour la connaissance de la Terre. On peut donc imaginer de nouvelles méthodes qui nous permettraient d'atteindre les précisions nécessaires à la detection de ce mode (voir le dernier chapitre avec le projet LICODY). L'observation de sa période et son atténuation apporterait des informations sur les propriétés physiques et rhéologiques de la graine et son amplitude permettrait de tester ses différents mécanismes d'excitation.

Geophys. J. Int. (1997) **131,** 699–723

Some remarks about the degree-one deformation of the Earth

Marianne Greff-Lefftz[1] and Hilaire Legros[2]

[1] *Institut de Physique du Globe de Paris, Geomagnetisme,* 4 *place Jussieu,* 75252 *Paris* 05, *France. E-mail: greff@ipgp.jussieu.fr*
[2] *Institut de Physique du Globe de Strasbourg, Dynamique Interne,* 5 *rue R. Descartes* 67084 *Strasbourg, France*

Accepted 1997 July 1. Received 1997 March 3; in original form 1996 February 23

SUMMARY

The degree-one deformation of the Earth (and the induced discrepancy between the figure centre and the mass centre of the Earth) is computed using a theoretical approach (Love numbers formalism) at short timescales (where the Earth has an elastic behaviour) as well as at long timescales (where the Earth bas a viscoelastic or quasi-fluid behaviour). For a Maxwell model of rheology, the degree-one relaxation modes associated with the viscoelastic Love numbers have been investigated: the M, mode does not exist and there is only one transition mode (instead of two) generated by a viscosity discontinuity.

The translations at each interface of the incompressible layers of the earth model [surface, 670 km depth discontinuity, core-mantle boundary (CMB) and inner-core boundary (ICB)J are computed. They are elastic with an order of magnitude of about 1 mm when the excitation source is the atmospheric continental loading or a magnetic pressure acting at the CMB. They are viscoelastic when the earth is submitted Io Pleistocene deglaciation, with an order of magnitude of about 1 m. In a quasi-fluid approximation (Newtonian fluid) because of the mantle density heterogeneity their order of magnitude is about 100 m (except for the ICB, which is in quasi-hydrostatic equilibrium at this timescale).

Key words: deformation, elasticity, relaxation modes, viscoelasticity.

JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH, VOL. 105, NO. B11, PAGES 25685-25692, NOVEMBER 10,2000

Secular variation of the geocenter

Marianne Greff-Lefftz

Geomagnetism Department, Institut de Physique du Globe de Paris, Paris, France

Abstract. The degree 1 deformations of Earth induced by a surface load are computed, in a reference frame related to the center of mass of the planet, using a theoretical approach (Love number formalism), at secular timescale, where Earth has a viscoelastic behavior. The temporal variation of the coordinates of the geocenter induced by the Pleistocenic deglaciation is investigated for two loading histories (three ice sheets with the same time dependence or ICE-3G model) testing different viscosity profiles within the mantle. The present-day secular variation of Earth's geocenter induced by postglacial rebound is found to be from 0.2 up to 0.5 mm/yr, and consequently, we suggest that observations from Space Geodesy of this rate could be used to constrain the viscosity contrast between upper and lower mantle.

5 Perspectives: déformations pour un modèle de Terre avec des variations latérales

La théorie de la gravito-élasticité telle qu'elle a été exposée dans les sections précédentes repose sur une sphère initiale de référence radialement stratifiée et en équilibre hydrostatique. Or ce modèle moyen de Terre n' est qu'une première approximation de la Terre réelle. En effet, d'une part la figure d'équilibre de celle-ci diffère légèrement de l'équilibre hydrostatique, essentiellement à cause de la convection mantélique, et d'autre part, elle possède des variations latérales en densité et en paramètres élastiques. La plus importante est certainement celle liée à l'ellipticité de la Terre. L'effet de cette dernière, dans le cas où elle est supposée hydrostatique (c'est-à-dire la forme qu'aurait une planète fluide sous l'action de sa rotation) a déjà été étudié (Smith, 1974; Dahlen, 1976). Les effets d'un état de précontrainte initiale non-hydrostatique (par exemple contrainte d'origine tectonique ou contrainte newtonienne dans le manteau résultant de la convection) n'ont jamais été pris en compte dans un calcul de gravito-élasticité. Or, des variations latérales à grande longueur d'onde, comme par exemple la répartition croûte continentale - croûte océanique, pourraient également perturber ces déformations.

Les équations de base de ce problème ont déjà été posées par les sismologues (voir Dahlen and Tromp, 1998), en vue d'étudier les effets des variations latérales sur les modes sismiques: une application directe de ces équations étant les études de tomographie sismique. Une étude faite en collaboration avec H. Legros, P. Gegout (EOST-Strasbourg) et Laurent Métivier (Gravimétrie-IPGP) a commencé l'an dernier: nous avons établi les équations de la gravito-élasticité pour Terre avec des précontraintes initiales non-hydrostatiques et des variations latérales, ainsi que toutes les conditions aux limites nécessaires pour étudier les déformations élastiques forcées par la marée luni-solaire ou par des surcharges atmosphériques. Cela a fait le sujet de stage de DEA de L. Métivier. J'en résume ici les principaux résultats.

5.1 Approche théorique

Modèle de référence

Notre modèle de référence a des précontraintes initiales, qui sont petites devant la pression hydrostatique; on note

$$\overline{\overline{\Sigma_o}} = -P_o\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\delta T_o}} \tag{73}$$

où $\overline{\overline{\delta T_o}}$ comprend une partie pression non-hydrostatique et une partie déviatorique petites devant la pression hydrostatique P_o.

La densité s'écrira $\rho_o + \delta\rho_o$ où ρ_o est la densité radiale et $\delta\rho_o$ les variations latérales. On a alors une perturbation du potentiel gravitationnel qui obéit à l'équation de Poisson:

$$\Delta(\Phi_o + \delta\Phi_o) = -4\pi G(\rho_o + \delta\rho_o) \tag{74}$$

Le tenseur des contraintes obéit à l'équilibre:

$$-\vec{\nabla}P_o + \mathrm{div}\overline{\overline{\delta T_o}} = -\rho_o\vec{\nabla}\Phi_o - \rho_o\vec{\nabla}\delta\Phi_o - \delta\rho_o\vec{\nabla}\Phi_o \tag{75}$$

Les différentes interfaces qui existent dans ce modèle de référence (limite noyau-manteau, manteau supérieur-inférieur, manteau-lithosphère, surface de la Terre ...) ne sont plus sphériques mais ont une topographie liée à l'état de précontrainte initiale.

Etat perturbé

On notera les perturbations sous la forme: $\overline{\overline{\Sigma_1^l}} + \overline{\overline{\delta\Sigma_1^l}}$, $\vec{u} + \vec{\delta u}$, $\Phi_1 + \delta\Phi_1$, de sorte à se ramener toujours à l'état de référence initiale d'une sphère radialement stratifiée en équilibre hydrostatique, donc à un modèle moyen, type PREM, donné par la sismologie. L'équation d'équilibre et de Poisson deviennent:

$$(\rho_o + \delta\rho_o)\frac{d^2(\vec{u} + \vec{\delta u})}{dt^2} = \operatorname{div}\Big(\overline{\overline{\Sigma_1^l}} + \overline{\overline{\delta\Sigma_1^l}} - (\vec{u} + \vec{\delta u}).\nabla\overline{\overline{\Sigma_o}}\Big) + (\rho_o + \delta\rho_o)\vec{\nabla}(\Phi_1 + V + \delta\Phi_1) \tag{76}$$

$$-\operatorname{div}[(\rho_o + \delta\rho_o)(\vec{u} + \vec{\delta u})]\vec{\nabla}(\Phi_o + \delta\Phi_o)$$

$$\Delta\Big[\Phi_1 + \delta\Phi_1\Big] = 4\pi G\operatorname{div}[(\rho_o + \delta\rho_o)(\vec{u} + \vec{\delta u})] \tag{77}$$

En soustrayant les equations (18) et (19) à ces équations et en négligeant les termes de second ordre, on obtient:

$$\delta\rho_o\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} + \rho_o\frac{d^2\vec{\delta u}}{dt^2} = \operatorname{div}\Big[\overline{\overline{\delta\Sigma_1^l}} - (\vec{u}.\nabla)\overline{\overline{\delta T_o}} + (\vec{\delta u}.\nabla)P_o\overline{\overline{I}}\Big] + \delta\rho_o\vec{\nabla}(\Phi_1 + V) + \rho_o\vec{\nabla}\delta\Phi_1 \tag{78}$$

$$-\operatorname{div}[\rho_o\vec{\delta u} + \delta\rho_o\vec{u}]\vec{\nabla}\Phi_o - \operatorname{div}(\rho_o\vec{u})\ \vec{\nabla}\delta\Phi_o$$

$$\Delta\delta\Phi_1 = 4\pi G\operatorname{div}[\rho_o\vec{\delta u} + \delta\rho_o\vec{u}] \tag{79}$$

En introduisant le tenseur de Piola-Kirchoff défini dans la section (1) en (12) et sa perturbation $\overline{\overline{\delta T_1^{PK}}}$, la conservation de l'impulsion s'écrira simplement:

$$\rho_o\frac{d^2\vec{\delta u}}{dt^2} - \operatorname{div}\overline{\overline{\delta T_1^{PK}}} - \rho_o\vec{\nabla}\delta\Phi_1 - \rho_o\vec{\delta u}.\vec{\nabla}\vec{\nabla}\Phi_o = -\delta\rho_o\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} + \delta\rho_o\vec{\nabla}(\Phi_1 + V) + \delta\rho_o\vec{u}.\vec{\nabla}\vec{\nabla}\Phi_o + \rho_o\vec{u}.\vec{\nabla}\vec{\nabla}\delta\Phi_o \tag{80}$$

Les tenseurs de Piola-Kirchoff et de Cauchy perturbés s'écrivent (voir Dahlen et Tromp, 1998, p79):

$$\left(\delta T_1^{PK}\right)_{ij} = \Gamma_{ijkl}\ (\delta u_l)_{,k}\ +\ \delta\Gamma_{ijkl}\ (u_l)_{,k}\ +\ \delta\Delta_{ijkl}\ (u_l)_{,k} \tag{81}$$

$$\left(\delta\Sigma_1^l\right)_{ij} = \Gamma_{ijkl}\ (\delta u_l)_{,k}\ +\ \delta\Gamma_{ijkl}\ (u_l)_{,k}\ +\ \delta\Lambda_{ijkl}\ (u_l)_{,k} \tag{82}$$

$$\text{avec}\ \ \delta\Lambda_{ijkl} = \frac{1}{2}\Big[-(\delta T_o)_{ij}\delta_{kl} + (\delta T_o)_{kl}\delta_{ij} + (\delta T_o)_{ik}\delta_{jl} + (\delta T_o)_{jk}\delta_{il} - (\delta T_o)_{il}\delta_{jk} - (\delta T_o)_{jl}\delta_{ik}\Big]$$

$$\delta\Delta_{ijkl} = \delta\Lambda_{ijkl} - (\Sigma_o)_{jk}\delta_{il} + (\Sigma_o)_{ij}\delta_{kl}$$

$$\delta\Gamma_{ijkl} = \Big(\delta K - \frac{2}{3}\delta\mu\Big)\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta\mu\Big[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\Big]$$

où $K(r)$ et $\mu(r)$ sont respectivement la partie radiale de l'incompressibilité et de la rigidité, et δK et $\delta\mu$ les variations latérales. On note que les équations (78) et (79) peuvent s'écrire sous la forme:

$$\rho_o \frac{d^2\vec{\delta u}}{dt^2} - \mathrm{div}\Big[\overline{\overline{\Gamma}} : \Big(\vec{\nabla}\vec{\delta u}\Big) + (\vec{\delta u}.\nabla)P_o\overline{\overline{I}}\Big] - \rho_o\vec{\nabla}\delta\Phi_1 + \mathrm{div}(\rho_o\vec{\delta u})\vec{\nabla}\Phi_o = \vec{F}_1 \qquad (83)$$

$$\Delta\delta\Phi_1 - 4\pi G\mathrm{div}(\rho_o\vec{\delta u}) = \vec{F}_2$$

avec

$$\vec{F}_1 = -\delta\rho_o\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} + \mathrm{div}\Big[\Big(\overline{\overline{\delta\Gamma}} + \overline{\overline{\delta\Lambda}}\Big) : \Big(\vec{\nabla}\vec{u}\Big) - (\vec{u}.\nabla)\overline{\overline{\delta T_o}}\Big] + \delta\rho_o\vec{\nabla}(\Phi_1 + V) - \mathrm{div}[\delta\rho_o\vec{u}]\vec{\nabla}\Phi_o - \mathrm{div}(\rho_o\vec{u})\ \vec{\nabla}\delta\Phi_o$$

$$\vec{F}_2 = 4\pi G\mathrm{div}(\delta\rho_o\vec{u})$$

L'opérateur de gravito-élasticité qui s'applique à $\vec{\delta u}$ et à $\delta\Phi_1$ est le même que celui des équations (18) et (19); on a cette fois un membre de droite qui se calcule à partir des solutions $\vec{u}$ et Φ_1.

Les conditions aux limites sont inchangées, a savoir la continuité du déplacement, des tractions, du potentiel et de la gravité à chaque interface solide-solide et en surface. Néanmoins, comme nous allons les écrire sur la sphère initiale radialement stratifiée (pour pouvoir soustraire les conditions aux limites associées à $\vec{u}$ et Φ_1), il faudra prendre en compte l'existence d'une topographie à chaque interface (que nous noterons δd) et donc d'une normale $\vec{n}'_o = \vec{n}_o - \vec{\nabla}^S\delta d$ non radiale à chaque interface. $\vec{\nabla}^S$ est le gradient tangentiel.

Dahlen and Tromp (1998) ont montré que les conditions aux limites en surface et à chaque interface solide-solide du modèle de Terre sont:

- $\Big[\delta u\Big]_-^+ = \Big[-\delta d\partial_{\vec{n}_o}\vec{u}\Big]_-^+$
- $\Big[\vec{n}_o\ .\ \overline{\overline{\delta T_1^{PK}}}\Big]_-^+ = \Big[-\delta d\ \ \vec{n}_o.\partial_{\vec{n}_o}\overline{\overline{T_1^{PK}}} + \vec{\nabla}^S\delta d\ .\ \overline{\overline{T_1^{PK}}}\Big]_-^+$
- $\Big[\delta\Phi_1\Big]_-^+ = \Big[-\delta d\ \ \partial_{\vec{n}_o}\Phi_1\Big]_-^+$
- $\Big[\vec{n}_o\ .\ \delta\vec{\xi}\Big]_-^+ = \Big[-\delta d\ \ \vec{n}_o.\partial_{\vec{n}_o}\vec{\xi} + \vec{\nabla}^S\delta d\ .\ \vec{\xi}\Big]_-^+$

avec $\vec{\xi} = -\vec{\nabla}\Phi_1 + 4\pi G\rho_o\vec{u}$ et $\delta\vec{\xi} = -\vec{\nabla}\delta\Phi_1 + 4\pi G(\delta\rho_o\vec{u} + \rho_o\vec{\delta u})$

5.2 Résolution et applications géophysiques

Pour résoudre ce nouveau système, deux approches sont proposées:

- une approche en harmoniques sphériques:
  de façon similaire à $\vec{u}$ et Φ_1 [voir équation (21 .. 24)], on décompose $\vec{\delta u}$ et $\delta\Phi_1$ sur une base de fonctions sphériques et on peut établir un système differentiel en δy_i.

  $$\dot{\delta y_i}(r) = c_{ij}(r)\delta y_i(r) + b_i$$

  La matrice c_{ij} est la même que celle du système des y_i (cf eq. 28): on pourra donc utiliser le même propagateur pour résoudre le système différentiel. On a cette fois un second membre b_i qui est directement relié à F_1 et F_2. Tout le problème va être de décomposer b_i sur une base de fonctions sphériques. F_1 et F_2 font intervenir des produits de fonctions sphériques (par exemple $\delta\rho_o\vec{u}$). Il nous faut donc introduire les harmoniques sphériques généralisées: en utilisant la loi de conversion de produit en somme à l'aide des symboles de Wigner, on pourra alors décomposer b_i sur une base de fonctions sphériques généralisées. On aura des couplages dans les différents degrés et ordres de la décomposition en harmoniques des différents paramètres. C'est cette approche qu'ont choisie d'étudier P. Gegout et H. Legros (EOST-Strasbourg).

- une approche en éléments spectraux:
  on peut intégrer numériquement les équations à l'aide d'éléments finis (éléments spectraux) afin de considérer des hétérogénéités de faibles longueurs d'onde. C'est le but de la thèse de Laurent Métivier que je co-encadre avec M. Diament (Gravimétrie-IPGP). La modélisation se fait en collaboration avec le département de Modélisation Physique et Numérique, en reprenant des travaux se rapportant au calcul des modes propres de vibrations de la Terre (Thèses de E. Chaljub et Y. Capdevielle). La réalisation d'un code résolvant ces équations se déroule en deux étapes. La première consiste à étendre la méthode des éléments spectraux appliquée à la Terre en ajoutant le couplage déformation-gravité jusqu'ici négligé (le potentiel de redistribution des masses Φ_1 peut être négligé pour le calcul des modes de vibrations (hypothèse de Cowling)). L'équation de Poisson doit être introduite. La deuxième étape consiste à prendre en considération des variations latérales et des précontraintes initiales non-hydrostatiques. Ce problème n'est pas trivial car de nombreux points mathématiques doivent être préciser, en particulier la symétrie ou la non-symétrie de l'opérateur de gravito-élasticité.
  La modélisation des perturbations générées par des variations latérales de densité et de rhéologie dans les séries gravimétriques induites par les marées ou d'autres sources d'excitation pourra s'appliquer à l'étude des structures de grandes échelles, telles le super-bombement Polynésie, mais aussi à des structures plus petites, telles que les édifices volcaniques, où localement on observe des perturbations qui ne sont pas expliquées par les modèles classiques de marées terrestres.
  Cette approche pourra ultérieurement être mise en oeuvre pour d'autres planètes: par exemple pour la planète Mars qui n'est pas en équilibre hydrostatique et qui possède des variations latérales à grande échelle d'origine dynamique comme Tharsis.

> Une perturbation de l'amplitude et un déphasage dans les marées martiennes dues à l'attraction gravitationnelle du Soleil et de Phobos et Deimos pourra être calculée puis comparée avec les observations gravimétriques prévues par mission Netlander.

Quelque soit la méthode de résolution utilisée et les excitations géophysiques étudiées (marées ou surcharges atmosphériques), il est nécessaire de disposer d'un modèle de référence avec des précontraintes initiales. Une collaboration avec A. Forte a été démarrée sur ce sujet. Ses modèles d'anomalies de masse dans le manteau obtenus à partir de la sismologie et de la géodynamique et le choix d'un profil de viscosité lui permettent de calculer les contraintes newtoniennes et les topographies des différentes interfaces du modèle de Terre, associées à ces variations latérales. Ces paramètres peuvent être considérés comme statiques sur une échelle de temps de quelques années.

6 Références

Alterman, Z., Jarosch, H. & Pekeris, C.H., 1959. Oscillation of the Earth. Proc. R. Soc. London, **A252**, 80-95.

Cheng, M.K., Eanes, R.J., Shum, C.K., Schutz, B.E. & Tapley, B.D., 1989. Temporal variations in low degree zonal harmonics from Starlette orbit analysis. *Geophys. Res. lett.*, **16**, 393-396.

Chinnery, M.A., 1975. The static deformation of an Earth with a fluid core: a physical approach. Geophys. J. R. astr. Soc., **42**, 461-475.

Dahlen, F.A., 1976. Reply, *J. Geophys. Res.*, **81**, No 26, 4951-4956.

Dahlen, F.A. and Tromp, J., 1998. Theoretical Global Seismology. Princeton University Press.

Peltier, W.R., 1974. Impulse response of a Maxwell Earth. *Rev. Geophys. Space Physics*, **12**, 649-669.

Peltier, W.R. & Wu, P., 1983. Continental lithospheric thickness and deglaciation induced true polar wander. *Geophys. Res. lett.*, **10**, 181-184.

Ricard, Y., Richards, M., Lithgow-Bertelloni,C. & Le Stunff Y., 1993. A geodynamical model of mantle density heterogeneity. J. Geophys. Res., **98**, 21895-21909.

Smith, M., 1974. The scalar equations of infinitesimal elastic-gravitational motion for a rotating, slightly elliptical Earth, *Geophys. J. Int. astr. Soc.*, **37**, 491-526.

Spada, G., Sabadini, R., Yuen, D.A., & Ricard, Y., 1992. Effects on post-glacial rebound from the hard rheology in the transition zone, *Geophys. J. Int.*, **109**, 683-700.

Wu, P. & Peltier, W.R., 1984. Pleistocene deglaciation and the Earth's rotation: a new analysis. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **76**, 753-791.