

Thèse de doctorat de l'Université Denis Diderot - Paris VII  
UFR Sciences de la Terre, de l'Environnement et des Planètes

spécialité : Géophysique Interne

présentée par

**Laurent Métivier**

pour l'obtention du titre de  
**Docteur de l'Université Paris VII**

# Influence des variations latérales de densité et de paramètres rhéologiques sur la déformation de la Terre

soutenue le mardi 7 Décembre 2004 devant le jury composé de :

Georges BALMINO ..... *Examineur*  
Véronique DEHANT ..... *Rapporteur*  
Michel DIAMENT ..... *Directeur de thèse*  
Marianne GREFF-LEFFTZ ..... *Co-directeur de thèse*  
François GUYOT ..... *Examineur*  
Hilaire LEGROS ..... *Rapporteur*

---

**Institut de Physique du Globe de Paris**

Tour 24-14, 2<sup>e</sup> étage, salle bleue, 4 place Jussieu, 75252 Paris cedex 05

Laboratoire de Gravimétrie et Géodynamique, Département de Géophysique Spatiale et Planétaire - UMR 7096

Tour 14-15, 4<sup>e</sup> étage, 4, place Jussieu, case 89, 75252 Paris cedex 05. Tél : 01 44 27 49 03, Fax : 01 44 27 73 40

Dernières corrections : 26/09/05

## Remerciements

Je remercie Véronique Dehant et Hilaire Legros d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, et pour leurs conseils sur le manuscrit. Merci aussi à Georges Balmino et François Guyot d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Mes remerciements les plus vifs vont à mes directeurs de thèse. Ce travail a avant tout pour origine les interrogations de Michel Diamant sur la fiabilité des modèles de marées solides aux abords des volcans et des points chauds. Je le remercie chaleureusement de m'avoir offert l'opportunité de travailler sur ce sujet passionnant et source inépuisable de questions. Ce travail n'aurait pu avoir lieu sans Marianne Greff qui m'accompagna en chaque instant, m'aidant activement sur le traitement théorique des équations. Je les remercie aussi et surtout tous les deux pour leur présence et leur attention sans bornes.

Un grand merci, dans le désordre, à Véronique Dehant, Hilaire Legros, John Wahr, Olivier de Viron, Jacques Hinderer, Pascal Gégout, Guillaume Ramillien, Frédéric Deschamps, Stéphane Labrosse, Philippe Lognonné, Martine Feissel, Jacques Dubois, Séverine Rosat, Florent Deleffie (...) pour les discussions scientifiques fructueuses. Merci aussi à Laurent Jolivet sans qui je ne me serais probablement pas orienté vers les Sciences de la Terre.

J'exprime ma gratitude à Emmanuel Chaljub pour l'aide qu'il m'a donné au début de ma thèse et pour m'avoir permis d'utiliser son code. Merci à Florence Levy pour tout le travail effectué lors de son stage au laboratoire. J'ai grandement apprécié, à diverses reprises, les conseils avisés de Jean-Pierre Vilotte en matière d'analyse numérique. Enfin je remercie vivement Geneviève Moguilny et Patrick Stoclet pour leur aide sur le codage, le débogage et l'interface MPI.

Merci aux membres du Laboratoire de Gravimétrie et de Géodynamique pour leur contact au jour le jour, tant les permanents (Christine, Valérie, Hélène, les Jacques, Wladimir, Sébastien et Jérôme) que les étudiants (Gwendoline, Isabelle, Hendra, Andrès, Nicolas, et aussi Anne et Christina). Sans oublier bien sûr quelques personnes qui gravitent autour du labo : Christel, Setareh, Wayne, Sylvain et Valentin. Merci aussi à tous ceux que j'ai eu le plaisir de cotoyer autour de l'IPGP : Mathieu, Antoinette, Ata, Jules, Céline, avec qui j'ai eu la chance de visiter le Liban. Ainsi que Damien, Julien, Carène, Nicolas H., Alexandrine et Ben, Virginie, Amir, Giovanni, Raphaël, Mark, les pots de sismo du vendredi soir et leurs protagonistes...

Un petit mot pour mes parents qui n'ont eu de cesse de me soutenir, à mon frère, à ma sœur, et à ma grand mère. Quelques mots de remerciements à mes cousins, cousines, oncles et tantes, tout particulièrement François, Florence, Ludo, Raph, Julie, Guy, Simone, Hélène, Georges, Betty, Sophie, Mimi... Je finirai par mes amis les plus proches (Nico, Dod et Fanny, Micky, Fred, Arnaud, Gauth, ...), y compris bien sûr les Tyeajeb qui ont supporté sans (presque ?!) broncher mes absences chroniques aux répétitions alors que le groupe était à l'aube de sa gloire !

Enfin, merci infiniment à ma douce et tendre pour ses conseils, son aide, ses relectures, sa présence, et tellement plus encore...



## Résumé

À l'heure du développement de la gravimétrie spatiale (satellites GRACE et GOCE), de nouveaux modèles de déformation gravito-élastique de la Terre deviennent indispensables.

La Terre se déforme à chaque instant sous l'action de la Lune et du Soleil (la marée luni-solaire), et sous l'action des surcharges de surface engendrées par les enveloppes fluides de la planète (l'atmosphère, les océans et les eaux continentales). Actuellement, ces déformations élastiques sont modélisées en supposant la Terre comme un solide sphérique (ou ellipsoïdal) dont la structure interne est hydrostatique et à symétrie radiale. Or, la planète contient des variations latérales de densité et de paramètres rhéologiques, engendrées par sa dynamique interne, qui sont négligées dans ces modèles.

Nous avons réalisé un modèle de déformation de la planète qui, pour la première fois, tient compte des variations latérales internes des paramètres physiques de la Terre, de son état de précontraintes non-hydrostatique et de ses topographies dynamiques aux interfaces de discontinuité. Ces aspects sont intégrés dans les équations de la gravito-élasticité utilisant la théorie des perturbations. Le système d'équations est résolu à l'aide d'une méthode numérique : les éléments spectraux associés au maillage de la "sphère cubique".

Le modèle a été validé avec une bonne précision sur des problèmes géodynamiques connus. Nous avons dans ce but repris les travaux analytiques réalisés par Love concernant une Terre homogène incompressible. Nous nous consacrons ensuite à de premières applications. Nous réévaluons l'impact de l'ellipticité de la Terre sur sa réponse de marée solide, et sur sa réponse aux surcharges de surface. Nous prenons l'exemple de la surcharge de pression atmosphérique et son influence sur les variations zonales de la gravité (les coefficients  $J_2$  et  $J_3$ ).

Enfin nous discutons des applications de ce modèle à la détermination de l'influence des mégapanaches mantelliques sur la réponse de marée et la réponse de surcharges de la Terre.

## Abstract

Nowadays with the development of space gravimetry (GRACE and GOCE satellites), new elasto-gravity deformation models become essential.

Earth is continuously deformed by the Sun and the Moon attraction (luni-solar tides), and under the action of surface loading due to external fluid layers (atmosphere, ocean and continental water). Presently these elastic deformations are modeled assuming that the Earth is a spherical solid (or ellipsoidal) with a radially symmetrical hydrostatic structure. However, the internal dynamics of the planet induces lateral variations of density and rheological parameters that are neglected into these models.

We built an Earth deformation model which, for the first time, takes into account the internal lateral variations of the planet physical parameters, its no-hydrostatic prestresses, and the dynamical topographies of its discontinuity interfaces. These particularities are integrated into the elasto-gravitational equations using the perturbation theory. The equation system is solved with a numerical method : the spectral element method associated to the "cubed sphere" mesh.

The model has been validated on known geophysical problems with a good accuracy. With this aim, we recovered the Love analytical work concerning a homogeneous incompressible Earth. We then made first applications. We appraised the impact of Earth ellipticity on solid tides and on the Earth response to surface loadings. We took the example of the influence of atmospheric pressure on zonal gravity variations ( $J_2$  and  $J_3$  coefficients).

Finally, we discuss the ability of the model to determine the influence of mantellic superplumes on the tidal response and the loading response of the Earth.



# Table des matières

<b>Résumé\</b> Abstract	<b>4</b>
<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>1 Cadre Géodynamique</b>	<b>13</b>
1.1 La machine thermique Terre . . . . .	13
1.1.1 Figure et structure hydrostatique de la Terre . . . . .	13
1.1.2 Géodynamique interne du manteau et non hydrostaticité . . . . .	16
1.2 La déformation de la Terre . . . . .	20
1.2.1 Modes de vibrations et déformations de basses fréquences . . . . .	22
1.2.2 Les marées . . . . .	22
1.2.3 Les surcharges de surface . . . . .	27
1.3 Enjeux futurs . . . . .	30
1.3.1 L'observation de la gravité . . . . .	31
1.3.2 Développement de modèles réalistes . . . . .	33
<b>2 La gravito-élasticité</b>	<b>37</b>
2.1 Rappels de mécanique des milieux continus . . . . .	38
2.1.1 Descriptions lagrangiennes et eulériennes . . . . .	38
2.1.2 Contraintes et déformations . . . . .	38
2.1.3 La gravité . . . . .	40
2.1.4 Lois de conservation . . . . .	40
2.2 La théorie des perturbations . . . . .	42
2.2.1 Principe . . . . .	42
2.2.2 Résolution d'équations par méthode perturbative . . . . .	43
2.2.3 Notre utilisation de la théorie des perturbations . . . . .	44
2.3 La gravito-élasticité . . . . .	46
2.3.1 Système de référence (État 0) . . . . .	46
2.3.2 Approximation à de petits déplacements (État 1) . . . . .	48
2.3.3 Formulation variationnelle du système . . . . .	51
2.4 Perturbation au premier ordre de la gravito-élasticité . . . . .	55
2.4.1 Perturbation du système de référence (État 0')	55
2.4.2 Perturbation de la gravito-élasticité (État 1')	57
2.4.3 Formulation variationnelle du système . . . . .	59

<b>3</b>	<b>Résolution numérique</b>	<b>63</b>
3.1	La méthode des éléments spectraux . . . . .	64
3.1.1	L'approximation de Galerkin . . . . .	64
3.1.2	Les éléments spectraux . . . . .	66
3.2	Le maillage : la sphère cubique . . . . .	72
3.2.1	Construction . . . . .	72
3.2.2	Le problème du déraffinement en profondeur . . . . .	74
3.3	Résolution numérique de la réponse gravito-élastostatique de la Terre . . . . .	74
3.3.1	Modèle de départ : la réponse sismique élastodynamique de la Terre . . . . .	74
3.3.2	Solution numérique de l'équation de redistribution des masses . . . . .	75
3.3.3	Le système total . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Validation</b>	<b>81</b>
4.1	Extension du maillage à des modèles de Terre . . . . .	82
4.2	La gravito-élasticité classique (État 1) . . . . .	83
4.2.1	Nombres de Love . . . . .	83
4.2.2	La marée solide . . . . .	85
4.2.3	Les surcharges de surface . . . . .	87
4.3	La perturbation de la gravito-élasticité (État 1') . . . . .	89
4.3.1	La rotation et l'ellipticité . . . . .	89
4.3.2	Solution analytique de la perturbation due à l'ellipticité de la réponse de marée $M_2$ d'une Terre homogène incompressible . . . . .	91
4.3.3	Solution numérique de la perturbation d'ellipticité de la réponse de marée $M_2$ d'une Terre homogène incompressible . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Résultats et perspectives</b>	<b>97</b>
5.1	L'impact de l'ellipticité sur la marée . . . . .	97
5.1.1	L'effet de la rotation sur PREM . . . . .	97
5.1.2	Perturbation d'ellipticité sur la marée solide . . . . .	98
5.1.3	Écart aux solutions de Wang . . . . .	100
5.2	L'impact de l'ellipticité sur la réponse de la Terre aux surcharges atmosphériques	102
5.2.1	Les surcharges sur une surface déformée . . . . .	102
5.2.2	L'influence de l'ellipticité sur les nombres de Love . . . . .	103
5.2.3	Impact de l'ellipticité sur la réponse temporelle de la Terre aux surcharges de pression atmosphérique . . . . .	105
5.3	L'impact de panaches sur la réponse gravito-élastique de la Terre . . . . .	106
5.3.1	La perturbation visqueuse du modèle de référence . . . . .	106
5.3.2	La marée solide . . . . .	107
5.3.3	Les surcharges de surface . . . . .	107
	<b>Conclusions</b>	<b>109</b>
<b>A</b>	<b>Notations et définitions</b>	<b>113</b>
A.1	Notations du problème continu . . . . .	113
A.2	Notations du problème discret . . . . .	116
A.3	Les harmoniques sphériques . . . . .	117



<b>B Compléments sur la gravito-élasticité</b>	<b>121</b>
B.1 Complément au principe de perturbation . . . . .	121
B.2 La gravito-élasticité avec précontraintes déviatoriques . . . . .	122
B.2.1 L'opérateur de la gravito-élasticité . . . . .	122
B.2.2 Les conditions aux limites dynamiques . . . . .	122
B.3 Calcul des conditions de continuités perturbées . . . . .	123
B.3.1 principe . . . . .	123
B.3.2 Raccord des conditions aux limites en tractions au tenseur de Cauchy	124
B.4 Conservation du centre de masse dans le cas des surcharges de surface . . . .	127
B.5 Espaces fonctionnels . . . . .	128
B.6 Formule de Green . . . . .	129
<b>C Compléments sur l'approximation numérique</b>	<b>131</b>
C.1 Expression de la matrice $\mathbf{N}$ . . . . .	131
C.1.1 Partie volumique $\mathbf{N}_1$ . . . . .	131
C.1.2 Partie surfacique $\mathbf{N}_2$ . . . . .	132
C.2 Régularisation de l'opérateur $Dt\mathbf{N}$ . . . . .	133
C.3 Prise en compte de l'aspect temporel . . . . .	134
C.4 Méthodes de déraffinement du maillage avec la profondeur . . . . .	135
<b>D Articles</b>	<b>137</b>
D.1 Analytical solutions of Love numbers for an hydrostatic ellipsoidal incompressible homogeneous Earth, using Lagrangian formulation : . . . . .	137
D.2 A new approach to compute accurate gravity time variations for a realistic Earth model with lateral heterogeneities : . . . . .	137
<b>Références bibliographiques</b>	<b>187</b>



# Introduction

La Terre solide est soumise à l'action de diverses forces externes. À basses fréquences (par rapport aux fréquences de vibration sismique), elle subit l'attraction de la Lune et du Soleil (marées luni-solaires) et l'action des surcharges de surface liées aux échanges de masse entre les enveloppes fluides (l'océan, l'atmosphère, les eaux continentales, etc...). Ces forces externes perturbent son mouvement et la déforment globalement. Elles engendrent également une redistribution des masses internes qui modifie son champ de pesanteur.

Les modèles globaux de déformation gravito-élastique de la Terre supposent classiquement que la planète est une boule radialement stratifiée, dont l'état de précontrainte est hydrostatique (tel PREM). Cependant ce modèle moyen n'est qu'une première approximation de la Terre réelle. De par sa dynamique convective interne, notamment dans le manteau, la planète présente des variations latérales de densité et de paramètres élastiques, et voit sa figure d'équilibre s'écarter légèrement de l'équilibre hydrostatique. Les effets d'un état de précontrainte non-hydrostatique (les contraintes d'origine tectonique, les contraintes newtoniennes dans le manteau convectif, ...) n'ont jamais été pris en compte dans un calcul de déformation gravito-élastique. De même l'impact de variations latérales à grandes longueurs d'onde comme la répartition croûte continentale - croûte océanique, n'a jamais pu être estimé.

Depuis une dizaine d'années la précision des mesures de pesanteur et de position s'est particulièrement accrue. Parallèlement à cet effort technologique, de nouvelles missions satellitaires dédiées aux mesures de gravimétrie globale sont lancées. Au sol, on voit naître de nouveaux réseaux d'observatoires gravimétriques de très haute précision (le réseau GGP par exemple). L'étude des séries temporelles s'accompagne dans la pratique de modélisations importantes du comportement globale de la Terre. Une question se pose : les modèles actuels de réponse gravito-élastique de la Terre sont-ils suffisamment précis et réalistes face à la croissance actuelle de la précision des mesures ?

Au cours de cette thèse, nous avons réalisé un nouveau type de modèle de déformation gravito-élastique de la planète capable de prendre en compte la structure non hydrostatique du manteau jusqu'ici négligée. Ce travail constitue une première étape nécessaire pour répondre à cette question.

Le premier chapitre est une brève présentation du contexte géodynamique qui motiva ce travail. Nous présentons succinctement l'état des connaissances concernant la convection mantellique. Puis nous abordons les déformations de basses fréquences et leur méthodes de modélisations classiques. Le deuxième chapitre présente la formulation théorique du problème. Les variations latérales de densité et de paramètres rhéologiques, la non hydrostaticité des précontraintes et les topographies des interfaces de discontinuités de la Terre sont prises en compte en tant que perturbations d'une configuration sphérique à symétrie radiale. Nous présentons la formulation du système d'équations de la gravito-élasticité perturbé et une formulation équivalente dite variationnelle. Le troisième chapitre présente la méthode numérique

que nous avons utilisée pour résoudre ces équations. Elle s'appuie sur les développements récents en sismologie de modèles numériques en éléments spectraux, associés au maillage dit de la "sphère cubique". Nous présentons dans le quatrième chapitre les premières expériences que nous avons réalisées dans le but de valider le modèle. Cette phase nous a amené à reconsidérer et reformuler les travaux de Love du début du vingtième siècle pour une terre dont la structure est simplifiée. La structure non hydrostatique de la Terre n'ayant jamais été prise en compte dans les modèles de déformations basses fréquences, nous n'avons pu trouver de résultats plus récents et plus réalistes auxquels comparer nos solutions. Enfin, dans le cinquième chapitre, nous calculons la perturbation engendrée par l'ellipticité de la Terre sur ses réponses de marées solides et de surcharges de surface. Les expériences impliquant la convection du manteau sont discutées, et les perspectives qu'ouvre ce travail développées.

# Chapitre 1

## Cadre Géodynamique

Dans ce premier chapitre, nous présentons les différentes questions géodynamiques qui ont motivé ce travail de thèse, à savoir la convection asthénosphérique et la réponse de la Terre aux forçages de basses fréquences (les marées solides et les surcharges de surfaces).

La Terre est, en première approximation, un objet de forme quasi sphérique soumis à l'attraction gravitationnelle des autres planètes, de la Lune et du Soleil. Ces forces externes contraignent son orbite et la déforment avec le temps.

La Terre est aussi une machine thermique qui évacue depuis sa naissance la chaleur qu'elle a accumulée lors de sa formation. Le transport de cette énergie vers l'extérieur crée une dynamique interne complexe entre les différentes couches qui composent la planète. Sa structure interne, "vu d'un peu plus près", n'est donc pas à symétrie sphérique, ni ellipsoïdale, comme le suggèrent les modèles de structure hydrostatique.

Les échelles temporelles caractéristiques de ces deux aspects de la planète sont très différentes. La dynamique interne de la planète se développe sur une échelle de temps de l'ordre de quelques millions d'années alors que les déformations d'origine externe et le mouvement orbital ont des périodes allant de la milliseconde (pour les séismes) à la centaine d'années (variations climatiques par exemple).

Nous allons décrire succinctement quelques aspects de la structure interne de la Terre et de sa dynamique, principalement dans le manteau. Nous irons du plus général au plus précis. Le but n'est pas ici de faire une description complète du dynamisme du manteau mais plutôt de présenter quelques points clés des connaissances le concernant. Nous verrons que la dynamique asthénosphérique n'est pas totalement connue. En deuxième partie, nous présentons quelques aspects des déformations de la Terre dites de "basses fréquences" (relativement à la gamme de fréquences sismologique). Nous parlerons particulièrement de sa réponse de marée solide ainsi que de l'impact des surcharges de surfaces (l'impact des couches atmosphérique, océanique et l'hydrologie en général). Enfin nous concluons sur les enjeux géophysiques futurs et la nécessité de coupler aujourd'hui ces deux aspects de la planète.

### 1.1 La machine thermique Terre

#### 1.1.1 Figure et structure hydrostatique de la Terre

D'après les scénarii les plus classiques, la Terre s'est formée avec le reste du système solaire suite à l'accrétion de planétésimaux en gravitation autour du soleil.

En étudiant les rapports isotopiques des météorites chondritiques, Patterson en 1956 montre que la Terre est âgée de 4,55 Ga<sup>1</sup> (Milliards d'années). Allègre et al. (1995) un peu plus tard précisent qu'elle a probablement atteint sa taille actuelle 0,1 Ga plus tard. La Terre, telle qu'on l'observe aujourd'hui, possède un mouvement, une rotation sur elle-même et une chaleur interne principalement héritée de cette histoire. Son énergie interne, née d'une accréation rapide, s'évacue depuis le centre vers l'extérieur de la planète, et forme le moteur de sa dynamique interne, notamment dans le manteau.

### Structure radiale

Au premier ordre, on observe que la Terre a une structure interne en moyenne radiale. La planète s'est différenciée il y a 4,45 Ma (Allègre et al., 1995) en trois grandes couches distinctes : un noyau principalement ferreux, un manteau silicaté et une atmosphère primitive (la croûte s'étant par la suite extraite du manteau supérieur). La force qui joue le plus sur la structure interne de la Terre est l'autogravitation qui sépare les éléments les plus denses (Fer, Nickel), vers le centre de la planète, et les éléments les plus légers, vers la surface. La planète se comporte ainsi en première approximation comme un fluide parfait autogravitant obéissant au principe d'Archimède.

Les modèles de la structure radiale moyenne de la Terre sont hérités des observations sismologiques. Depuis le début du vingtième siècle différents modèles de référence de Terre sphériques ont été créés, dit de type S.N.R.E.I. (Symmetric Non Rotating Elastic Isotropic). Le plus reconnu est actuellement le modèle P.R.E.M. (Preliminary Referential Earth Model) développé par Dziewonski & Anderson (1981). Il comporte 12 couches distinctes : 2 dans le noyau dont une est fluide (le noyau externe), 7 dans le manteau, 2 dans la croûte et une couche uniforme fluide en surface caractérisant les océans. La figure 1.1 présente un schéma du modèle de Terre PREM, ainsi que le comportement des principaux paramètres physiques avec la profondeur (densité, rigidité, etc...).

### La rotation et l'ellipticité

Si la Terre est globalement sphérique "vu de loin", un premier écart à la sphéricité s'observe "vu d'un peu plus près" : la Terre est aplatie aux pôles. La forme moyenne de la planète en réalité se rapproche plutôt d'un ellipsoïde de révolution autour de son axe de rotation moyen.

La théorie hydrostatique de Clairaut (1743) permet d'expliquer ce grand trait de la forme de la Terre. Elle consiste à supposer que la planète est auto-gravitante et que les surfaces d'égale densité se confondent avec des surfaces d'égal potentiel de pesanteur. La planète se comporte toujours comme un fluide parfait mais cette fois en prenant en compte sa rotation sur elle-même. Physiquement on peut expliquer la structure hydrostatique par le relâchement des contraintes aux longues échelles de temps (Chambat, 1996) (ici le milliard d'années).

Dans le cas hydrostatique, la figure de la Terre moyenne est une surface équipotentielle qui se déforme sous l'action de la rotation. Le potentiel de pesanteur de surface est traditionnellement exprimé par un développement au voisinage de la sphère. Les coefficients adimensionnés de ce développement sont notés les  $J_l$  (le degré  $l$  allant de 2 à l'infini). Ils correspondent aux coefficients en harmoniques sphériques zonaux de mêmes degrés du développement du

---

<sup>1</sup>nous notons "Ga" ("Giga" années) le milliard d'années pour ne pas confondre avec le million d'années que nous notons "Ma"

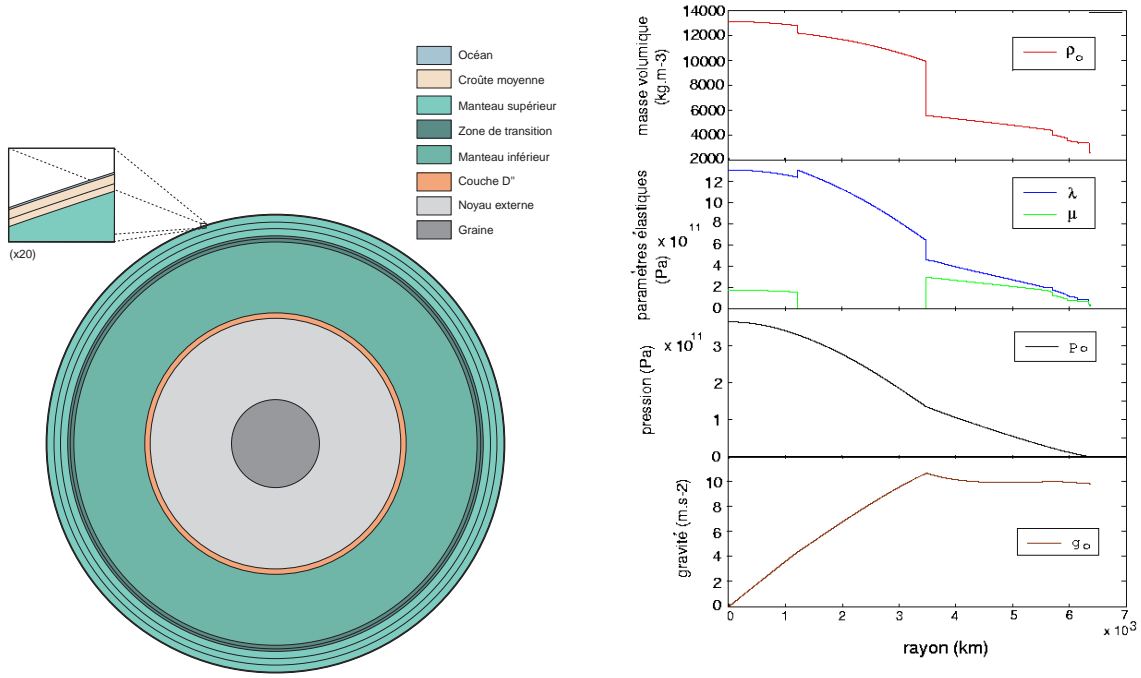


FIG. 1.1: Une coupe transversale du modèle de Terre P.R.E.M. (Preliminary Referential Earth Model de Dziewonski & Anderson, 1981)

géopotentiel. Le plus important de ces coefficients est le  $J_2$  qui traduit la forme ellipsoïdale des surfaces équiparamètres.

Un ellipsoïde de révolution se définit par son grand axe et son petit axe. On note l'aplatissement  $\alpha$  comme la différence relative entre le demi grand axe et le demi petit axe (relativement au rayon moyen de la Terre). Dans le repère géocentrique (centré sur le centre de masse de la planète) Clairaut montra que l'aplatissement  $\alpha(r)$  ( $r$  la position radiale) pour une Terre présentant une distribution radiale de masse volumique  $\rho(r)$  obéit à l'équation :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \alpha(r) + 6 \frac{\rho(r)}{\bar{\rho}(r)} \frac{\partial}{\partial r} \alpha(r) - 6 \left( 1 - \frac{\rho(r)}{\bar{\rho}(r)} \right) \alpha(r) = 0 \quad (1.1)$$

Cette équation sera appelée par la suite "équation de Clairaut".  $\bar{\rho}(r)$  est la masse volumique moyenne de la boule de rayon  $r$  :

$$\bar{\rho}(r) = \frac{3}{r^3} \int_0^r \rho(x) x^2 dx \quad (1.2)$$

Dès le XVIII<sup>e</sup> siècle, plusieurs expéditions ont tenté de mesurer l'ellipticité de la Terre (cf. l'expédition de Bouguer et de la Condamine racontée par F. Trystam). De nos jours elle est mesurée avec une grande précision (mesures de VLBI, GPS, LAGEOS). L'ellipticité est relativement faible. Si l'on se base sur l'ellipsoïde associé au "World Geodetic System 1984" (WGS84), le facteur d'aplatissement est  $\alpha = 1/298,257222$  et le demi-grand axe mesure 6378,137 km (le rayon moyen de la Terre étant 6371 km).

On notera qu'en appliquant l'équation de Clairaut sur le modèle PREM, le rayon polaire de la planète est diminué d'environ 14 km et le rayon équatorial augmenté d'environ 7 km, ce qui s'accorde assez bien aux mesures.

En première approximation la planète est donc ellipsoïdale composée de couches elles-mêmes ellipsoïdales de matériaux différenciés. La Terre se comporte sur une échelle de temps du milliard d'années comme un fluide parfait autogravitant en rotation sur lui-même. Sa structure interne héritée en conséquence est purement hydrostatique.

Cependant la Terre présente aussi une dynamique interne active qui se traduit en surface par la tectonique des plaques, le volcanisme et la sismicité.

### 1.1.2 Géodynamique interne du manteau et non hydrostaticité

A l'échelle de temps humaine, la Terre n'est pas un fluide parfait, comme le montre la propagation des ondes sismiques. Elle possède deux couches fluides : Le noyau externe et les enveloppes superficielles (océan, atmosphère, etc...), et un ensemble de couches qui à l'échelle des vibrations sismiques sont des solides élastiques.

Les matériaux qui composent la planète sont visco-élastiques : ils se comportent comme des fluides visqueux lorsqu'ils subissent des déformations sur de longues périodes de temps, et comme des solides élastiques lorsqu'ils subissent des déformations sur de courtes périodes de temps. La période caractéristique de coupure entre ces deux modes de déformation étant propre à chaque matériau. On notera par exemple que la majeure partie du manteau se comporte à l'échelle du million d'années comme un fluide visqueux d'une viscosité autour de  $10^{21} - 10^{22}$  Pa.s, alors qu'à notre échelle de temps, il se comporte de manière élastique (mis à part un peu d'atténuation sismique).

La Terre évacue sa chaleur vers l'extérieur générant une dynamique interne. L'évacuation de cette chaleur à travers le manteau se fait principalement par convection thermique sur une échelle de temps du million d'années. Cette convection est à l'origine de la tectonique des plaques que l'on observe en surface (les plaques sont en quelque sorte portées par l'asthénosphère en mouvement) et donc du volcanisme et de la sismicité qui s'y rapportent. L'asthénosphère présente des courants visqueux chauds ascendants (vers l'extérieur de la planète) et des courants froids descendants. La rhéologie et la densité des matériaux terrestres étant dépendantes de la température locale, le manteau présente des variations latérales de densité et de paramètres rhéologiques liées à sa dynamique convective. Par ailleurs le mouvement du "fluide" est visqueux, l'état de contraintes internes présente donc une composante non hydrostatique. Enfin la dynamique interne impose une topographie dynamique aux interfaces encadrant le manteau, la planète n'a donc plus une symétrie ellipsoïdale.

Nous allons présenter rapidement quelques aspects de la convection du manteau. L'étude de la convection du manteau est multidisciplinaire. Nous parlerons d'abord des contraintes apportées par quelques observations de surface. Nous parlerons ensuite des modèles de convection et enfin des modèles de tomographie et des modèles synthétiques.

#### Le volcanisme intraplaque

La première question qui se pose sur la convection mantellique concerne son organisation : le manteau convecte-t-il en une ou deux couches distinctes? Cette polémique qui date de la découverte de la tectonique des plaques sépare principalement la communauté des géochimistes et la communauté des géophysiciens.



On observe trois grands types de volcans : les volcans effusifs de dorsales océaniques, les volcans explosifs associés aux zones de subductions et les volcans de types points chauds (d'îles océaniques notamment). Deux de ces types de volcans sont associés aux limites de plaques lithosphériques et sont donc liés à la tectonique des plaques, le dernier (points chauds) est intraplaque et semble décorrélié des mouvements lithosphériques. La signature isotopique des basaltes issus des dorsales (Mid Ocean Ridge Basalt) et celle des basaltes des volcans dit de points chauds (Oceanic Island Basalt) sont très différentes (appauvri en éléments traces dans le cas des MORB, Vidal, 1994). La géochimie laisse donc penser que deux réservoirs distincts dans le manteau sont à l'origine de chacun de ces volcanismes, et donc que la convection est plus probablement organisée en deux couches qui ne se mélangent que très peu (le manteau supérieur et le manteau inférieur).

En revanche, la sismologie (voir plus loin la tomographie) semble suggérer que la convection implique d'un seul mouvement toute l'asthénosphère.

La communauté des sciences de la Terre s'accorde sur une chose : des courants froids descendants dans le manteau sont associées aux zones de subduction et des courants ascendants chauds donnent naissance aux dorsales. Au milieu intervient le volcanisme intraplaque qui soulève de nombreuses questions.

Depuis Morgan (1971) le volcanisme de points chauds est généralement expliqué par l'existence de panaches fins remontant dans le manteau. Des panaches de matières chaudes, ancrés à une interface type noyau-manteau (CMB<sup>2</sup>) ou manteau Supérieur-Inférieur, remonteraient épisodiquement jusqu'à la surface. Les panaches sont fins (100 km de large), ce qui explique qu'ils ne soient pas discernables par la tomographie sismique, dont la résolution est de l'ordre du millier de kilomètres. Lors de sa remontée le panache présente une tête entraînant du fluide environnant avec elle. La tête, en arrivant à la surface, serait à l'origine des larges épanchements basaltiques que sont les Trapps et les plateaux océaniques (Richards et al., 1989). Enfin le fluide du conduit, en atteignant par la suite la surface, serait à l'origine de la formation des chapelets d'îles menant aux volcans actifs.

Le modèle est toutefois mis en doute notamment par Anderson (Anderson, 1998, 2000; King & Anderson, 1995). Ce dernier pense que les points chauds sont des artefacts volcaniques liés à la dynamique de la lithosphère plutôt qu'à celle de l'asthénosphère, et que la convection profonde n'a pas d'impact sur les phénomènes que l'on observe en surface (voir Turcotte & Oxburgh, 1973). Il démontre que les observations associées aux points chauds peuvent être expliquées de différentes façons, notamment par de la convection secondaire courte longueur d'onde dans le manteau supérieur (King & Ritsema, 2000).

Si le modèle de panache marche bien dans certains cas (Hawaii, Louisville), il montre des incohérences avec certains volcans (Diament & Baudry, 1987; Mc Nutt et al., 1997; Hébert et al., 1999). On notera particulièrement la Polynésie française qui présente une concentration de points chauds, d'îles et de monts sous-marins exceptionnelle. Cette région possède une profondeur anormalement faible de ses fonds océaniques (on parle de super bombement, Mc Nutt & Judge, 1990), une anomalie de flux de chaleur positive, et une anomalie d'épaisseur élastique (Calmant & Cazenave, 1987). Des travaux sur la répartition et la périodicité des points chauds, notamment dans cette région où l'écart typique des volcans et des alignements volcaniques est de l'ordre de 800-1000km, laissent supposer que les mouvements de convection initiateurs sous-jacents ne peuvent s'enraciner plus profondément que la base du

---

<sup>2</sup>Core Mantle Boundary

manteau supérieur (Yamaji, 1992; Anderson, 1998; Clouard & Bonneville, 2001). Des ondulations du géoïde de différentes longueurs d'ondes, orientées selon la direction d'ouverture des fonds océaniques (Haxby & Weissel, 1986; Maia & Diament, 1991), sont de plus observées. La périodicité moyenne entre les chaînes volcaniques se retrouvant dans ces ondulations, seraient-elles la marque de cellules de convections sous-jacentes de courtes longueurs d'ondes orientées par la dérive des plaques (Vidal, 2004)? Enfin, il faut noter que quelques points chauds sont situés sur une dorsale ou proche d'une dorsale, surtout dans l'océan Atlantique (l'Iceland, Les Açores, Les Canaries, Tristan), ce qui laisse penser que les points chauds ne sont pas des objets totalement décorrélés de la tectonique des plaques (Hill, 1991).

### Les modèles de convection

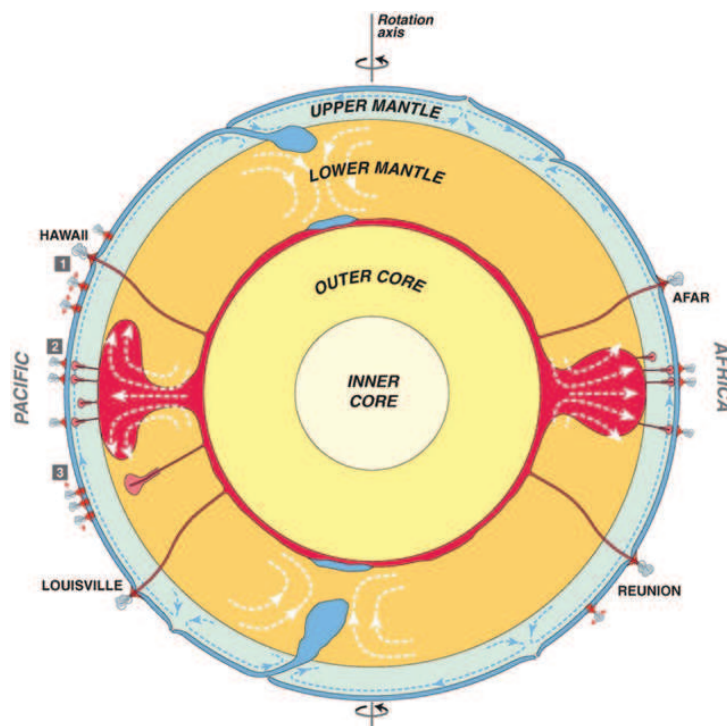


FIG. 1.2: Figure de Courtillot et al. (2003) qui schématise les grands traits de la convection dans le manteau selon les modèles proposés actuellement.

Une fois admis que le moteur principal de la dynamique du manteau et de la tectonique des plaques est la convection thermique, de nombreux auteurs ont cherché à modéliser cette dynamique afin de vérifier quantitativement les observations (Bercovici et al., 1989; Glatzmaier et al., 1990; Tackley et al., 1993; Bunge et al., 1996; Monnereau & Quéré, 2001).

La convection du manteau est un problème particulièrement complexe, dont le nombre de paramètres est très important : la viscosité, la température, la densité, le flux de chaleur entrant, la production de chaleur interne par radioactivité, le flux de chaleur sortant (et l'effet isolant des continents), la thermodynamique des matériaux impliqués et les changements de phase, sans parler de la sphéricité du manteau et de la rotation, etc... Les modèles numériques et analogiques ne considèrent en général qu'une partie de ces paramètres n'étudiant que

quelques aspects de la convection. On notera par exemple les modèles de convection thermique prenant en compte le chauffage interne radioactif (Sotin & Labrosse, 1999) qui montrent que l'essentiel des transferts de chaleur dans la Terre est dominé par les courants froids descendant dans le Manteau (subduction des plaques). D'autres modèles simples incorporant des continents mobiles isolants en surface montrent que la disposition des plaques continentales jouent significativement sur la structure de la convection sous-jacente (Grigné, 2003).

On notera particulièrement les travaux de Anne Davaille et de Michaël Le Bars (Davaille, 1999; Davaille et al., 2002) qui ont expérimenté analogiquement la dynamique de convection d'un système à plusieurs couches de densités et de viscosités différentes. Ils montrent que plusieurs types de mécanismes peuvent apparaître selon l'épaisseur des couches et le contraste de densité considéré : des panaches fins, dit "froid" en partance de la couche D" (du type de ceux de Morgan), des courants en cellules, ou encore de larges dômes oscillants surmontés de petits panaches fins "chauds".

Enfin, Courtillot et al. (2003) ont réalisé une étude sur les différents points chauds reconnus. Ils montrent que seulement 7 sur les 49 points chauds répertoriés présentent les caractéristiques définies par le modèle d'origine de Morgan (1971). Se basant sur le modèle de Davaille (1999), ils réduisent l'ensemble des volcans intraplaques à trois grands groupes (voir la figure 1.2). Le premier est composé des 7 points chauds correspondant au modèle d'origine. Ils proposent ensuite que les superswells polynésien et sud-africain soient associés à des méga-panaches (dôme oscillant de Davaille), surmontés de petits panaches dans le cas de la Polynésie. Enfin les autres volcans intraplaques seraient dûs à des phénomènes de surface.

### **La tomographie sismique et la convection quadripolaire**

La tomographie sismique est un outil utilisé depuis les années 70 qui permet de mettre en évidence les variations latérales des vitesses de propagation sismiques à l'intérieur de la Terre (en observant les temps de trajet des ondes). On distingue en général deux grands types de modèles tomographiques : ceux basés sur l'étude des temps de propagation des ondes volumiques P souvent qualifiés de modèles "hautes résolutions" et ceux se rapportant aux ondes S, combinant des ondes de volumes et des ondes de surface, qualifiés de modèles de "grandes longueurs d'ondes". Les modèles de hautes résolutions apportent peu d'informations sous les océans qui manquent de stations sismologiques, alors que les modèles basés sur les ondes de surface échantillonnent toute la partie supérieure de la planète (Romanowicz, 2003).

Les propriétés mécaniques des roches sont liées à la température locale, les vitesses d'ondes sismiques faibles dans le manteau sont en général associées à des courants de convection chauds et les vitesses fortes à des courants de convection froids.

De nombreux modèles tomographiques du manteau ont été réalisés ces dernières années avec une résolution moyenne de 1000 km (Boschi & Dziewonski, 2000; Mégnin & Romanowicz, 2000; Gu et al., 2001; Ritsema et al., 1999). Si dans le détail ils peuvent montrer quelques différences, de grands traits communs s'y dégagent. En surface et dans le manteau supérieur, on voit principalement apparaître les cratons froids, ainsi que des ceintures froides liées aux zones de subduction (Grand, 1994, 2002). À la base du manteau, on observe une organisation générale de degré 2, présentant deux larges anomalies de faibles vitesses d'ondes, une sous le Pacifique Sud l'autre sous l'Afrique du Sud (Romanowicz & Gung, 2002; Romanowicz, 2003). Ces deux anomalies sont associées aux méga-panaches (Courtillot et al., 2003) à l'origine des superswells en surface. On parle alors de convection à dominante quadripolaire dans le manteau inférieur (Busse, 1983). La figure 1.3 présente les variations relatives de vitesses

d'ondes issues de différents modèles de tomographie sismique.

Une question se pose : peut-on suivre les courants froids associés aux subduction jusque dans le manteau inférieur? Karason & van der Hilst (2001) montrent que certains "slabs" semblent traverser la zone de transition à 670 km, d'autres non. van der Hilst & Karason (1999) proposent qu'il existe une barrière qui empêcherait les slabs de descendre au delà de 1700 km de profondeur, ce qui irait dans le sens des inversions de viscosité réalisées par Forte & Mitrovica (2001) qui détectent un pic de viscosité à 2000 km de profondeur. Ces derniers proposent que ce pic sépare la convection du manteau en deux régimes distincts mais connectés, l'un quadripolaire dans le Manteau Inférieur, l'autre plus courte longueur d'onde au dessus de la limite à 2000 km. Cette théorie rejoint le modèle de Davaille et al. (2002), mais celle-ci propose que les dômes oscillants dans le manteau Inférieur se bloquent à la zone de transition à 670 km de profondeur.

D'autres méthodes permettent d'imager la convection du manteau. Les anomalies statiques du géoïde par exemple reflètent les mouvements profonds de masses de très grandes longueurs d'ondes. Une fois corrigées de la signature des plaques en subduction, les anomalies présentent une distribution principalement de degré 2 (Hager, 1984; Calmant & Cazenave, 1987). Les inversions de topographies dynamiques (Hager et al., 1985; Ricard & Wuming, 1991) permettent aussi d'imager la convection quadripolaire. Le méga-panache sud africain est notamment mis en évidence par les études de Gurnis et al. (2000) et Ni & Helmberger (2003).

On retiendra principalement que deux grandes hétérogénéités latérales de très grandes longueurs d'ondes, de positions diamétralement opposées, semblent apparaître dans le manteau inférieur.

## 1.2 La déformation de la Terre

Nous allons maintenant nous intéresser au comportement de la Terre sur des périodes de temps typique d'une vie humaine, à savoir de la seconde à quelques années.

Nous avons vu dans la partie précédente que la Terre connaît une dynamique interne active sur une échelle de temps du million d'année. Quelques années ne représentent qu'un instant  $t$  de cette évolution. À l'échelle de temps humaine la Terre semble présenter une forme moyenne et une structure interne fixe qui est soumise à l'action de différentes sollicitations "externes". Ces sources externes qui déforment la Terre sont de plusieurs types, nous distinguerons :

1. **Les séismes** qui engendrent sur de courtes périodes des vibrations libres de la planète,
2. **L'attraction de la Lune, du soleil** et des autres planètes qui génèrent les marées solides et océaniques,
3. **Les surcharges de surfaces** due principalement aux enveloppes fluides et aux variations climatiques,
4. **Les pressions dynamiques** à la CMB et à l'ICB dues à la convection du noyau externe fluide.

Ces déformations s'effectuent sur des échelles de temps de quelques millisecondes à la dizaines d'années, elles sont principalement élastiques. Nous présentons ici les déformations de la Terre dite "basses fréquences", à savoir principalement les déformations dues aux marées et aux surcharges de surface.

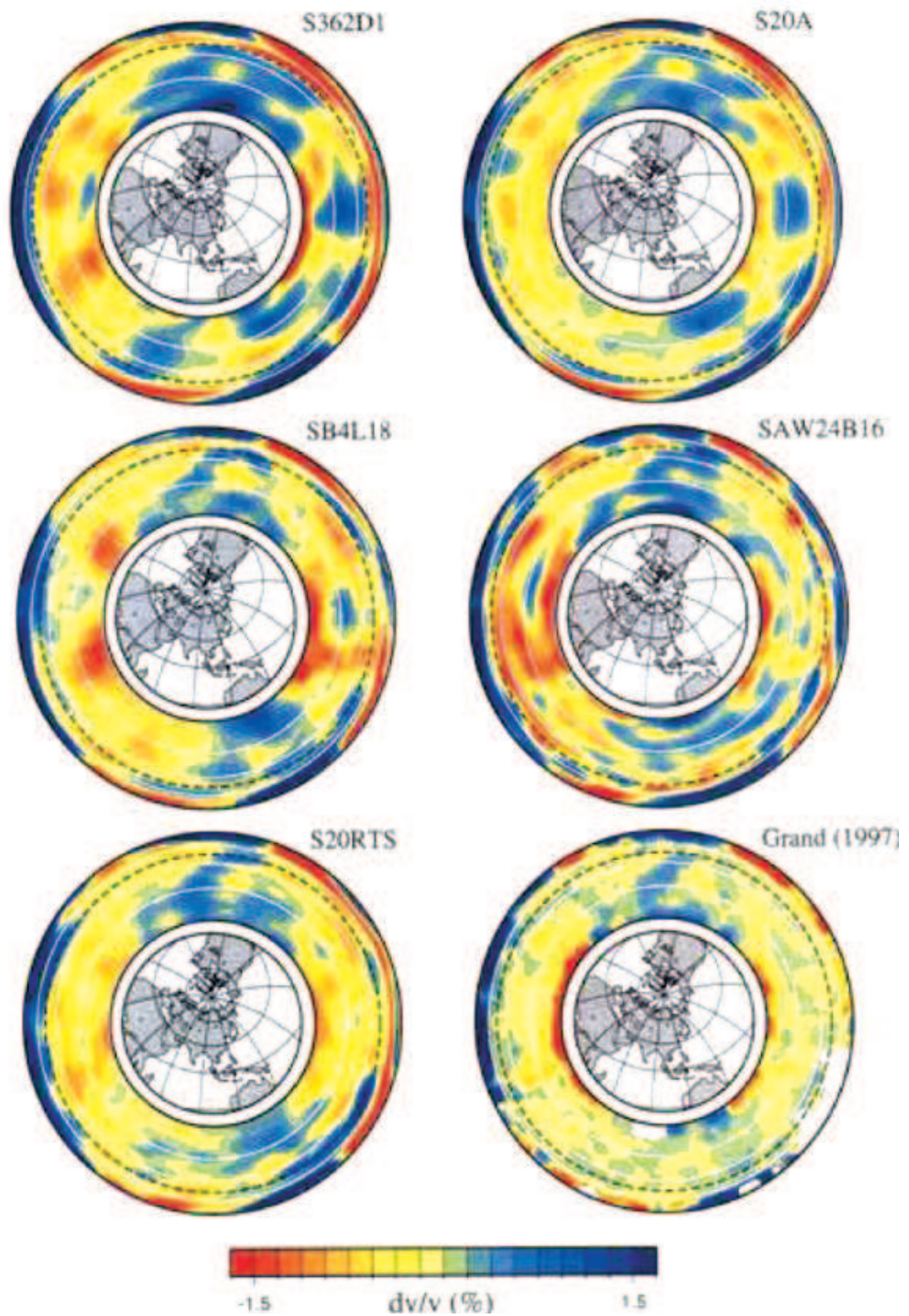


FIG. 1.3: Variations relatives des vitesses d'ondes  $S$  pour différents modèles de tomographie sismique (figure issue de Gu et al., 2001). La figure présente ici une coupe du manteau à la latitude nulle.

### 1.2.1 Modes de vibrations et déformations de basses fréquences

Comme tout corps déformable de dimension finie, la Terre présente un ensemble de modes de déformations qui lui sont propres. Nous le verrons dans le chapitre suivant, lorsque la Terre est soumise à une sollicitation externe, les "particules" qui la composent vont suivre un mouvement qui obéit à un ensemble d'équations que l'on nomme le système de la gravito-élasticité. On peut montrer que tous les déplacements admissibles de la planète sont exprimables à partir d'un ensemble de configurations de déplacements propres à la planète. Chacun de ces "vecteurs propres"-déplacements sont associés à une fréquence de vibration donnée, les modes propres de la planète.

La caractérisation du spectre de vibrations d'un corps solide élastique auto-gravitant remonte semble-t-il aux travaux de Poisson en 1829 (voir Valette, 1987). Cependant le concept d'élasticité de la Terre n'apparaît réellement qu'en 1847 lorsque Hopkins interpréta les vibrations émises durant un tremblement de Terre comme des ondes élastiques (Legros & Greff-Lefftz, 2003).

La caractérisation de ces modes s'est par la suite surtout développée dans le cadre de la sismologie. Love (1911) fut un des premiers à en faire une étude complète pour une Terre homogène. Par la suite Alterman et al. (1959) étendirent ce travail à une planète comprenant un noyau externe fluide.

On distinguera le spectre de vibration sismologique composé des modes de périodes inférieures à 1 heure environ, du spectre à plus haute période qui est forcé par des phénomènes tels que la marée ou les surcharges de surface. Nous nous intéresserons dans cette thèse essentiellement à ces derniers phénomènes sur Terre, qui sont dits "de basses fréquences" relativement à la gamme de fréquences sismologique. Une description récente parmi les plus complètes des modes de vibrations de la Terre a été faite par Wahr (1981a). Enfin Valette (1987) généralisa leur étude mathématique à une terre quelconque. On notera que certains de ces modes sont en réalité rotationnels, c'est à dire qu'ils correspondent à des rotations rigides de la planète.

### 1.2.2 Les marées

L'attraction du Soleil, de la Lune et des planètes du système solaire contraint l'orbite de la Terre. La Terre n'étant pas un solide rigide, les attractions vont aussi la déformer, on parle alors de marées terrestres. Cette déformation est essentiellement due au Soleil et à la Lune, les planètes étant soit trop éloignées, soit de trop faibles masses.

Le premier effet de marée observé sur Terre est bien sûr la variation périodique des hauteurs d'eaux océaniques qui peuvent dans certains cas atteindre plus d'une dizaine de mètres verticalement. Cependant la marée concerne aussi la partie solide de la Terre qui se déforme élastiquement voir visco-élastiquement. La surface solide de la Terre peut subir un déplacement vertical de marée atteignant 50 centimètres à la latitude de Paris (en cumulant toutes les ondes de marée).

Nous nous intéresserons ici essentiellement à la marée solide. On notera que la marée océanique est susceptible de perturber la réponse solide de la Terre en exerçant localement une charge, due aux hauteurs d'eau, qui ajoute une déformation de surface. Mais ce type de déformation est alors plutôt du ressort des surcharges de surface dont nous parlerons plus loin.

### Le potentiel de marée

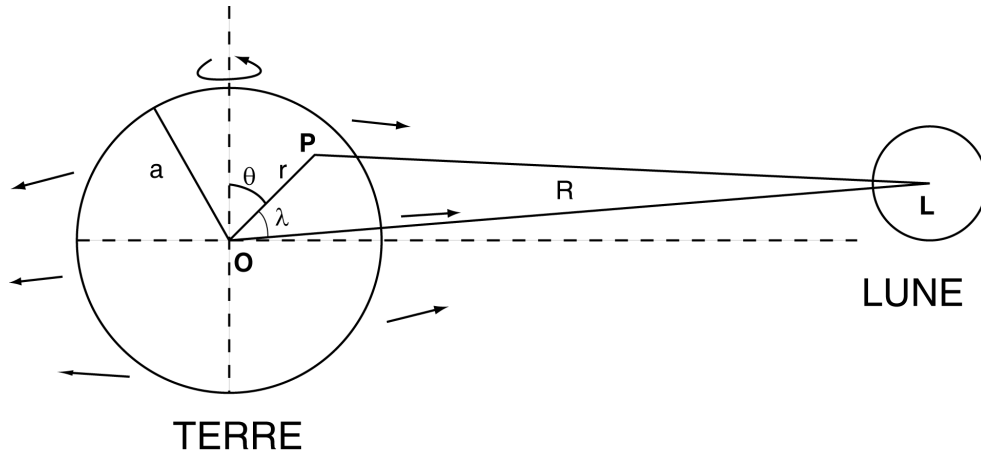


FIG. 1.4: L'attraction de marée de la Lune sur la Terre. L'attraction ressentie au point P n'est pas la même que celle ressentie au point O.

Suivant les lois de la gravitation universelle de Newton, l'attraction gravitationnelle qu'exerce tout corps céleste sur la planète dérive d'un potentiel  $V$  qui évolue comme l'inverse de la distance qui sépare le corps de la Terre. Considérons par exemple l'attraction exercée par la Lune, le potentiel d'attraction qu'elle exerce au point  $P$  dans la Terre est simplement (voir la figure 1.4) :

$$V(P) = -\frac{GM_L}{\|\vec{PL}\|} \quad (1.3)$$

avec  $G$  la constante de gravitation universelle, et  $M_L$  la masse de la Lune. On note la position du point  $P$  dans le repère géocentrique sphérique  $P(r, \theta, \varphi)$ . Le rayon  $r$  étant la position radiale,  $\theta$  la colatitude,  $\varphi$  la longitude.

$1/\|\vec{PL}\|$  est la fonction génératrice des polynômes de Legendre. On a  $\|\vec{PL}\| = \|\vec{PO} + \vec{OL}\| = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \lambda}$ .  $r$  étant petit devant  $R$ , on peut à l'aide d'un développement de Taylor exprimer le potentiel au voisinage de la Terre :

$$V(P) = -\frac{GM_L}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos \lambda) \quad (1.4)$$

$\lambda$  dépend de  $\theta$ , de  $\varphi$  et de la position de l'astre attracteur. Ainsi, en utilisant des relations de trigonométrie sur la sphère, le potentiel s'exprime à l'aide d'une somme d'harmoniques sphériques  $\mathcal{Y}_l^m$  (voir l'annexe A.3) :

$$V(r, \theta, \varphi, t) = \Re \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} V_l^m(t) \left(\frac{r}{a}\right)^l \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \right] \quad (1.5)$$

$a$  le rayon moyen de la Terre,  $V_l^m$  les coefficients d'harmoniques sphériques de degré  $l$  et d'ordre  $m$  ( $\Re$  indique la partie réelle). Les  $V_l^m$  dépendent de la position du centre de la Lune et varient donc avec le temps. Si on se base sur le développement en annexe A.16, ils

sont égaux à  $V_l^m(t) = -\frac{4\pi GM_L}{2l+1} \mathcal{Y}_l^m(\theta_L(t), \varphi_L(t))$  (avec  $\theta_L$  et  $\varphi_L$  la position de la Lune dans le référentiel terrestre en coordonnées sphériques).

La composantes de degrés 0 et 1 tendent à dilater ou à translater rigidement la planète, ils n'interviennent pas dans le potentiel de marée (Munk & MacDonald, 1960). Les degrés supérieurs caractérisent l'attraction différentielle qui agit entre chaque point de la Terre et engendrent donc une déformation asphérique globale de la planète tout en conservant la position de son centre de masse. Ces différents termes pour  $l \geq 2$  caractérisent le potentiel de marée exercé par la Lune sur la Terre. Cependant, on notera que pour la Terre l'effet de marée est majoritairement engendré par les degrés 2 et 3.

La partie temporelle est dans la pratique décomposée en un certain nombre d'ondes de fréquences distinctes relatives à l'orbite de la Lune (ou du soleil) (Wahr, 1995) :

$$V_l^m(t) = \sum_p H_p e^{i(\omega_p t + \phi_p)} \quad \text{pour } l \geq 2 \quad (1.6)$$

avec  $H_p$  l'amplitude de l'onde,  $\omega_p$  et  $\phi_p$  la pulsation et la phase. On distingue principalement 3 types d'ondes dont la fréquence dépend grossièrement de l'ordre et  $\omega_p \approx 2\pi \frac{m}{24} h^{-1}$ .

Le tableau 1.1 présente quelques ondes de marées caractéristiques. On distingue principalement trois grands types d'ondes : des ondes dites semi-diurnes telles que  $M_2$  et  $S_2$  (les ondes semi-diurnes principales dues respectivement à la Lune et au Soleil), des ondes diurnes telles que  $O_1$  et  $K_1$ , enfin des ondes longues périodes.

	Ondes de marée	période (h/j/a solaires)	Amplitude ( $H_p/g_o$ en cm)	phase (en degré)
Longues périodes ( $\mathcal{Y}_2^0$ )	"lunar nodal tide"	18.613 ans	2.79	188.82048
	$S_a$	365.26 jours	0.49	137.86005
	$S_{sa}$	182.621 jours	3.10	120.23846
	$M_m$	27.555 jours	3.52	110.65598
	$M_f$	13.661 jours	6.66	44.44202
Diurnes ( $\mathcal{Y}_2^1$ )	$O_1$	25.819 heures	26.22	105.67722
	$P_1$	24.066 heures	12.20	29.88078
	$S_1$	24 heures	0.29	12.25919
	$K_1$	23.934 heures	36.88	150.11923
	$\psi_1$	23.869 heures	0.29	287.97928
	$\phi_1$	23.804 heures	0.52	270.35770
Semi-diurnes ( $\mathcal{Y}_2^2$ )	$N_2$	12.658 heures	12.10	325.14050
	$M_2$	12.421 heures	63.19	75.79645
	$S_2$	12 heures	29.40	0.00
	$K_2$	11.967 heures	8.00	120.23846

TAB. 1.1: Quelques ondes sélectionnées ( $g_o$  est la gravité moyenne en surface).

## La réponse solide théorique de la Terre

La Terre en réponse à ces potentiels de marée se déforme d'une part mais aussi voit sa gravité varier significativement.



Les modèles théoriques qui calculent la réponse de marée solide de la Terre commencent à apparaître il y a presque un siècle et demi avec l'avènement de la théorie de l'élasticité. En 1862, Lord Kelvin (Sir William Thomson) réalisa le premier calcul de la déformation élastique d'une Terre homogène incompressible sous l'action d'un potentiel gravitationnel de marée (Thomson, 1862). Quelques années plus tard, Love (1911) étend le calcul théorique à une Terre homogène compressible. Il montra que la réponse de surface de la planète peut être caractérisée par un ensemble de nombres sans dimension. On les appellera plus tard les "nombres de Love". Enfin Takeuchi (1950) réalisa les premiers calculs numériques de nombres de Love pour une Terre réaliste déterminée par la sismologie.

À partir de 1960, la littérature devient très importante sur le sujet. Les modèles s'affinent et de plus en plus de paramètres sont pris en compte. Notons d'abord l'article de Alterman et al. (1959) qui présenta le système d'équations différentielles auquel obéit la planète, le fameux système des " $y_i$ " (voir le chapitre 4 pour quelques détails) qui est toujours utilisé de nos jours pour ce type de calcul. En 1981, la réponse de marée de la Terre est étendue à une planète ellipsoïdale en rotation dans une série d'articles de Wahr (Wahr, 1981a,b,c). Le modèle de Wahr suppose la planète composée de couches élastiques ellipsoïdales à l'équilibre de contraintes hydrostatique et avec un noyau externe fluide. Il ne contient pas d'atmosphère ni d'océan. L'effet de l'anélasticité a par la suite été ajouté par Wahr & Bergen (1986), Dehant (1987) et Dehant & Ducarme (1987). Ils montrent que l'anélasticité a un effet de l'ordre de 1% à 2% sur les nombres de Love en général (jusqu'à 7% pour l'onde zonale de 18,6 ans).

Le modèle de marée solide officiel actuel présenté dans les conventions IERS 2003 (International Earth Rotational System, McCarthy & Petit, 2003) s'applique au modèle de Terre sismologique PREM perturbé par l'ellipticité, l'anélasticité et l'inertie. Le modèle ne prend pas en compte les variations latérales de densité et de paramètres rhéologiques, la non hydrostaticité des précontraintes et la topographie des interfaces de discontinuité que l'on observe dans la Terre en conséquence de sa dynamique interne.

L'influence des variations latérales sur la marée solide est mal connue. Deux études intéressantes ont abordé le problème ces dernières années. Wang (1991) évalua l'impact de variations latérales, essentiellement zonales de degré 2, sur la réponse de marée de la Terre. Il conclut que l'effet de ce type de variations était trop faible pour la précision des mesures de l'époque (un maximum de 0.5 mm sur le déplacement de marée  $M_2$  et une perturbation de gravité de 30 nGal<sup>3</sup>). Dehant et al. (1999) réalisa un modèle de marée prenant en compte certains effets de la non hydrostaticité interne de la Terre. La planète est considérée elliptique, mais l'ellipticité de chaque interface est induite d'un modèle de dynamique du manteau plutôt que du calcul théorique hydrostatique de Clairaut. Cependant les variations latérales ne sont pas en elle-même prises en compte dans le modèle, ni la topographie plus courte longueur d'onde ainsi que le déviateur des précontraintes associé.

### L'observation de la marée solide

Les marées solides dans la pratique s'observent de différentes façons : les déplacements en surface, les mesures de déviation de la verticale ou encore la variation temporelle de pesanteur. La figure 1.6 présente un signal typique de marée gravimétrique mesuré pendant une trentaine de jours dans une des caves de l'Institut de Physique du Globe de Paris. On voit clairement apparaître trois grandes périodes caractéristiques : une semi-diurne, une diurne et une plus

<sup>3</sup>Unité de gravité : 1 Gal =  $10^{-2}$  m.s<sup>-2</sup>, 1  $\mu$ Gal =  $10^{-8}$  m.s<sup>-2</sup> et 1 nGal =  $10^{-11}$  m.s<sup>-2</sup>

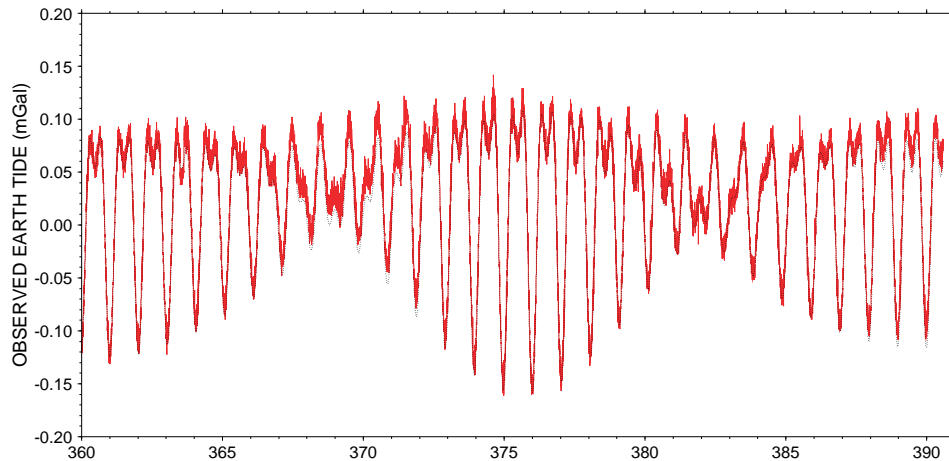


FIG. 1.5: Signal de marée gravimétrique mesuré à l'Institut de Physique du Globe de Paris pendant une trentaine de jours (l'unité de l'axe des abscisses est le jour).

longue période d'environ 13 jours. Pour fixer les idées, l'onde de marée semi-diurne  $M_2$  dont l'amplitude est la plus forte sur Terre, génère un déplacement vertical maximum d'environ 50 cm et une perturbation de gravité d'une centaine de microGal<sup>3</sup> (à l'équateur).

Comme le montre Zürn et al. (1976), la source principale de différences entre les observations et les calculs théoriques est la surcharge de marée océanique qui se surimpose à la marée solide. L'effet indirect de la marée océanique sur les déformations peut dans certains cas représenter 10 % du signal de marée observé (Ducarme, 2001) voire plus. À Brest on observe une perturbation due à la marée océanique de quelques centimètres sur le déplacement vertical de marée solide (jusqu'à 15 cm lors des grandes marées<sup>4</sup>). La réponse de cette surcharge est en général calculée et corrigée des mesures de marée au sol, connaissant les modèles de marée océanique, notamment ceux de Schwiderski (1980). Cependant le calcul ne semble pas optimal dans certaines zones géographiques car sa précision dépend de la connaissance précise des côtes et des fonds océaniques.

Enfin, une polémique est née ces dernières années sur une corrélation présentée par différents auteurs (De Becker et al., 1987; Robinson, 1989; Melchior, 1995) entre les résidus de marée gravimétrique non expliqués et les mesures de flux de chaleur locales en différents points de la planète (environ 350 stations de mesures issues de la base de données de l'ICET<sup>5</sup>). Ces auteurs prétendent mettre en évidence l'impact des hétérogénéités d'origine tectonique dans la réponse de marée gravimétrique. Cependant la corrélation est mise en doute par Rydelek et al. (1991) pour différentes raisons : l'imprécision de la calibration des gravimètres, l'incertitude des corrections de marées océaniques et la non correspondance géographique des stations de mesures de gravimétrie et de flux de chaleur. Les auteurs pensent de plus que les effets des hétérogénéités crustales sont négligeables sur la réponse de marée solide de la Terre, et donc ne sont pas à l'origine de cette corrélation. Enfin on note que la répartition des stations de mesure est particulièrement hétérogène. Plus de la moitié sont situées en Europe, une dizaine seulement dans toute l'Afrique, un quart sont en Asie (la majorité au Japon) et quelques unes en Amérique du Sud. Si l'on veut mettre en évidence l'impact de variations latérales mantel-

<sup>4</sup>Sources Muriel Llubes et Nicolas Florsch, <http://lareg.ensg.ign.fr/AGRET/NFlorsh2.html>, et Eric Calay, <http://kreiz.unice.fr/regal/ARTICLES/GeometresWeb.htm>

<sup>5</sup>International Center for Earth Tides. Voir le site [www.astro.oma.be/ICET/home.html](http://www.astro.oma.be/ICET/home.html)

liques, il faudrait probablement faire plus de mesures en Afrique et dans l’océan Pacifique, car les principales variations latérales importantes du manteau semblent se situer sous ces zones géographiques (voir la partie précédente sur la convection asthénosphérique).

### 1.2.3 Les surcharges de surface

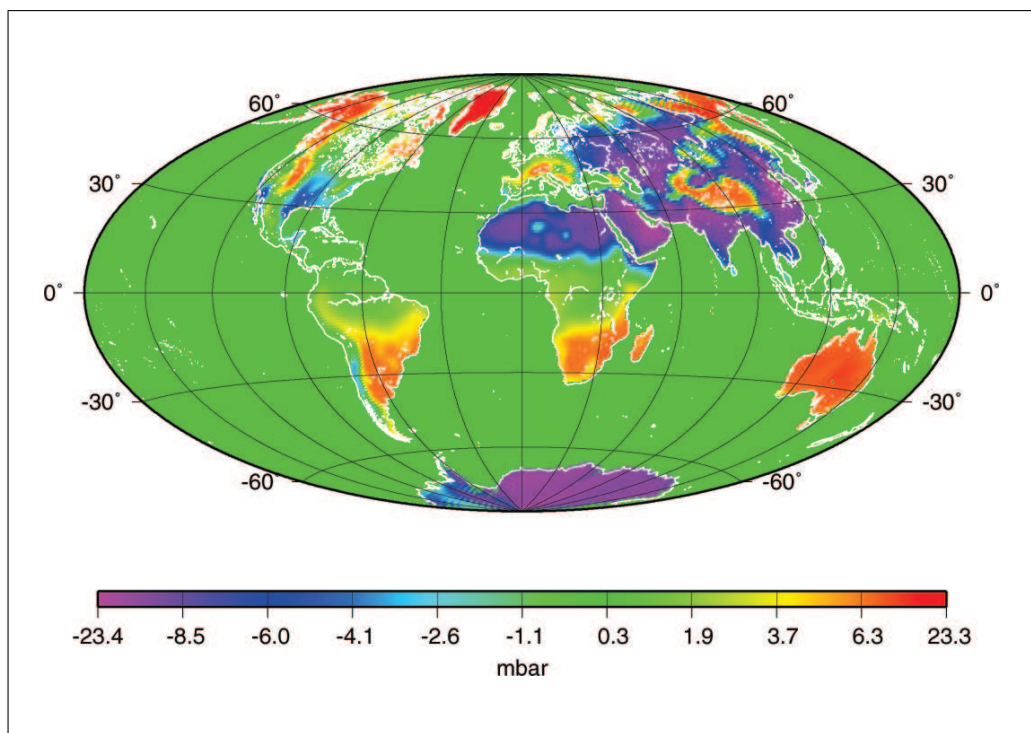


FIG. 1.6: Variations de pression atmosphérique entre les mois de janvier et de juillet de l’année 1997 mesurées à la surface de la Terre (figure issue du rapport de stage de Florence Levy, 2004). Les données proviennent des centres européens ECMWF de mesures météorologiques, par le biais de la base de données du projet ISLSCP.

#### Quelles surcharges ?

En dehors des marées et de la sismicité, les déformations de basses fréquences (sur des périodes allant de la minute à la centaine d’années) sont liées principalement aux redistributions de masses dans les enveloppes fluides.

En surface, les sources principales de déformation sont avant tout les enveloppes fluides. On distinguera l’atmosphère, les océans, les calottes polaires et l’hydrologie continentale (comprenant la neige, les réservoirs d’eau et les nappes phréatiques). Ces différents réservoirs évoluent et s’échangent de la masse, principalement sous forme d’eau, sur différentes échelles de temps caractéristiques (voir la figure 1.7). Ces redistributions globales de masses génèrent un effet de pression en surface et une variation de gravité associée qui déforment la planète dans son ensemble. La figure 1.6 par exemple présente les variations de pression atmosphérique enregistrées entre le mois de janvier et le mois de juillet 1997 en surface de la planète.

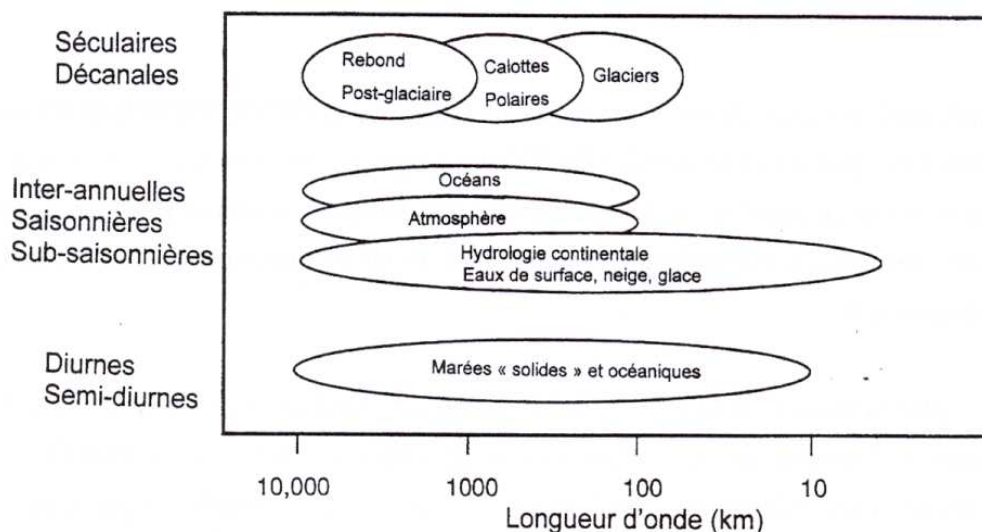


FIG. 1.7: Échelles spatio-temporelles des différents réservoirs fluides de surface et d'autres phénomènes tels que les marées et le rebond post-glaciaire (figure de Guillaume Ramillien)

L'influence des couches fluides sur la déformation de la Terre a été suggérée très tôt. Jeffreys (1916) fut le premier à calculer l'impact des eaux continentales sur les mouvements du pôle de rotation (sur l'oscillation de Chandler qui est due à la non sphéricité de la Terre). La caractérisation des déformations solides de la Terre en réponse aux surcharges de surface repose sur une théorie classique qui est, elle, plus récente. Le formalisme du calcul, définissant des fonctions de Green sur la sphère, fut développé par Longman (1962) et Farrell (1972). Les couches fluides superficielles, étant de faibles épaisseurs devant le rayon de la Terre, sont assimilées à des couches minces de masses équivalentes.

### Les surcharges et leurs impacts

L'observation de l'impact des surcharges est intimement liée à l'essor de la gravimétrie temporelle et aux lancements de missions satellitaires depuis les années 70. On notera particulièrement le lancement des satellites dédiés à la télémétrie laser ("SLR"<sup>6</sup>) tel que le satellite LAGEOS lancé en 1976. Ces satellites ont la particularité d'avoir une orbite connue avec une grande précision grâce à des visées laser effectuées du sol. Leur orbite étant due principalement à l'attraction de la Terre, on peut ainsi avoir accès au potentiel gravitationnel, et plus particulièrement aux coefficients zonaux de bas degrés du géopotentiel.

En 1983, Yoder et al. montrent que les mesures de LAGEOS permettent de mettre en évidence des variations séculaires et saisonnières (annuelles ou semi-annuelles) du coefficient  $J_2$  de la Terre (de l'ordre de  $1 \times 10^{-10}$ ). Ce coefficient qui se rapporte à la composante zonale de degré 2 du géopotentiel, caractérise l'ellipticité de la planète. Or des variations périodiques de l'aplatissement de la Terre impliquent des mouvements de masses de grande envergure des hautes latitudes vers les basses latitudes ou inversement. On notera que l'ellipticité de la planète est entre autre liée à la vitesse de sa rotation sur elle-même, des variations

<sup>6</sup>Satellite Laser Ranging

d'aplatissement vont perturber la vitesse de rotation de la Terre et donc la longueur du jour.

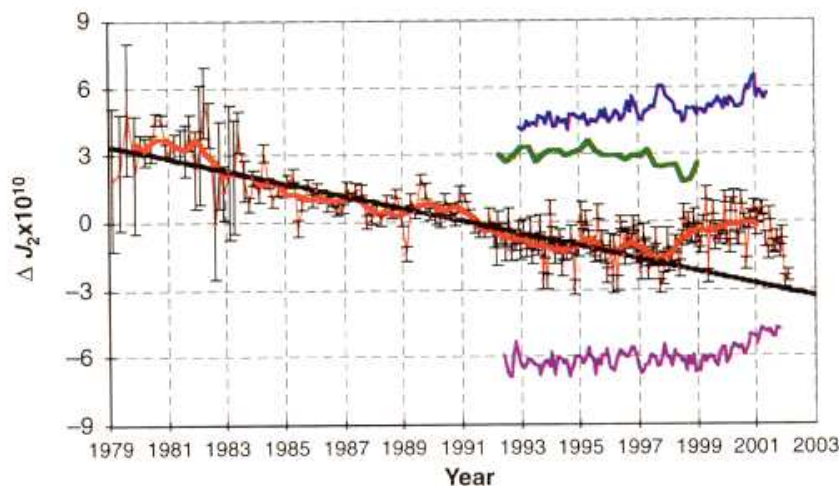


FIG. 1.8: Variations du  $J_2$  entre 1979 et 2003 (figure issue de Cox & Chao, 2002). La droite noire correspond à la variation séculaire moyenne et la courbe rouge correspond aux variations saisonnières et interannuelles.

Depuis Yoder et al. (1983) de nombreuses études se sont intéressées aux données SLR. Les différentes contributions aux variations des coefficients  $J_l$  et de la longueur du jour ont été petit à petit mises en évidence (voir la figure 1.8). Aujourd'hui, 28 ans de mesures de télémétrie laser permettent de bien séparer les périodes caractéristiques des variations du  $J_2$  (Cheng & Tapley, 2004). Celles-ci sont :

- **Composante séculaire** : composante qui correspond à une baisse moyenne constante du  $J_2$  de l'ordre de  $3 \times 10^{-11}$ . Yoder et al. (1983), Rubicam (1984), Sabadini et al. (1985) montrent que la source principale de cette décroissance est le rebond post-glaciaire qui fait suite à la dernière période de glaciation majeure au pléistocène (terminée il y a environ 6000 ans). D'autres sources moins importantes peuvent aussi jouer telles que la montée isostatique des mers liée à la fonte actuelle des calottes polaires (James & Ivins, 1997; Tamisiea et al., 2002), ou encore le stockage anthropologique des eaux continentales depuis 50 ans dont l'impact sur les  $J_l$  est estimé petit mais théoriquement non négligeable (Chao, 1995) .
- **Composante décennale** : composante principalement due à l'onde de marée de période 18,6 ans dont on ne connaît pas très bien l'amplitude (à cause de l'anélasticité du manteau qui joue fortement sur cette onde).
- **Composante interannuelle** : composante un peu moins importante qui semble présenter une signature météorologique. Chao & Au (1991), Gegout & Cazenave (1993), Cox & Chao (2002), Dickey et al. (2003) montrent notamment une corrélation du signal avec différents événements climatiques de type "El Niño" (courants océaniques tropicaux particulièrement chauds périodiques de 3 à 7 ans). L'augmentation du  $J_2$  observée entre 1997 et 2000 pourrait aussi être due à la fonte des glaces de la calotte de l'Antarctique (Dickey et al., 2002).

- **Composante saisonnière (annuelle et semi-annuelle)** : composante liée avant tout aux variations saisonnières de la masse atmosphérique (Chao et al., 1987; Chao & Au, 1991; Gegout & Cazenave, 1993). Les eaux continentales et l’océan y ont aussi une contribution importante (Johnson et al., 2001). Les variations saisonnières ont une origine essentiellement solaire. Le Soleil, en chauffant, génère des redistributions de masses entre l’atmosphère et l’hydrosphère. Ce dernier affecte aussi la gravité de la terre par l’intermédiaire des marées solaires annuelles et semi-annuelles (ondes de marées  $S_a$  et  $S_{sa}$ ).

Notons que la réponse de la Terre en surface sur ces gammes de périodes peut aussi avoir une origine profonde. Jault et al. (1988), montrent que la dynamique du noyau fluide et le couplage noyau-manteau à la CMB (“Core Mantle Boundary”) entraînent des variations décennales de la longueur du jour.

Enfin, à partir du vingt et unième siècle un nouveau type de missions satellitaires dédiées à la gravimétrie émerge. On notera particulièrement l’envoi du satellite GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) en 2002 (voir la section suivante pour plus de précisions sur les missions spatiales futures). Dans l’attente de cette mission de nombreuses études ont permis de quantifier l’impact des différentes enveloppes fluides sur les déformations globales et sur la gravité (au delà des coefficients zonaux). On notera Rabbel & Zschau (1985) et Van Dam & Wahr (1987) pour l’atmosphère, Van Dam et al. (1997) pour les océans (basé sur les mesures de hauteur d’eau de mer issues des mesures de TOPEX/POSEIDON), et enfin Wahr et al. (1998) qui généralise le calcul à chacune des enveloppes fluides. Sans rentrer trop dans le détail, on note que ces différentes couches (l’atmosphère, l’océan, les variations de hauteurs des calottes polaires et la montée des eaux, et l’hydrologie continentale) engendrent individuellement des mouvements verticaux pouvant atteindre 10 mm localement et une perturbation de gravité d’un maximum de 10  $\mu\text{Gal}$  (sans compter les surcharges de marées océaniques).

### Contribution de la dynamique interne de la Terre solide

La détermination des différentes contributions des mesures de gravimétrie temporelle s’accompagne de nombreuses modélisations de la réponse de la Terre. Or ce type de calcul s’effectue toujours supposant la Terre sphérique à symétrie radiale (identifiée la plupart du temps au modèle sismologique PREM). La structure fine de la planète est occultée car elle est *a priori* petite. Cependant l’impact exact des variations latérales internes reste totalement inconnu sur la réponse à une surcharge agissante sur la surface de la planète.

## 1.3 Enjeux futurs

Une des raisons qui motiva ce travail de thèse est le progrès réalisé ces dernières années sur la précision des mesures de gravimétrie. Avec l’essor de la gravimétrie satellitaire et le développement de la gravimétrie temporelle haute précision, il devient indispensable de développer de nouveaux modèles de gravité terrestre plus réalistes.

### 1.3.1 L'observation de la gravité

#### Missions satellitaires

Nous l'avons déjà mentionné, un nouveau type de missions satellitaires dédiées à la mesure du champ de pesanteur est apparue au début du vingt et unième siècle.

On notera d'abord le satellite CHAMP (CHALLENGING Minisatellite Payload) lancé en 2000, le satellite GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) lancé en 2002, et bientôt le satellite GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) dont le lancement est prévu pour 2007.

CHAMP est dédié à la mesure de la composante statique du champ de pesanteur et du champ magnétique. GRACE mesure la variation temporelle du champ de pesanteur (un géoïde est calculé par mois). Enfin GOCE précisera le champ statique en mesurant les gradients du champ de pesanteur<sup>7</sup>. Ce sont des satellites de basses altitudes (400 à 500 km d'altitude) par opposition aux satellites de télémétrie laser qui orbitent à une altitude plus élevée (6000 km). Le signal de gravité dépendant fortement de la distance Terre-satellite, ces derniers mesurent la gravité avec une précision spatiale bien plus forte (jusqu'au degré 65 pour CHAMP au delà du degré 100 pour GRACE). Cependant leurs altitudes leur imposent de faibles durées de vie à cause des effets atmosphériques perturbateurs (environ 5 ans).

On notera l'extrême précision attendue sur les mesures de GRACE et de GOCE (cf. figures 1.9 et 1.10) particulièrement sur les bas degrés du géopotentiel dans le cas GRACE et sur les hauts degrés dans le cas de GOCE.

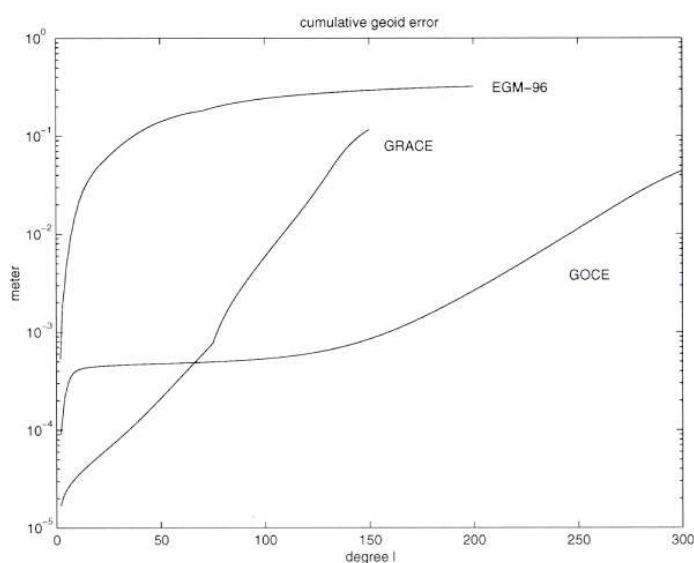


FIG. 1.9: Précision attendue sur la position du géoïde pour les missions GRACE et GOCE en fonction du degré d'harmoniques sphériques considéré (Schrama, 2003). Le spectre du modèle de géoïde EGM-96 est aussi représenté (Lemoine et al., 1998).

<sup>7</sup>Voir plus de détails sur le site du Bureau français de coordination des utilisateurs de GOCE (le bureau F.R.O.G. : French Resource Organization for GOCE) : <http://ganymede.ipgp.jussieu.fr/frog/>

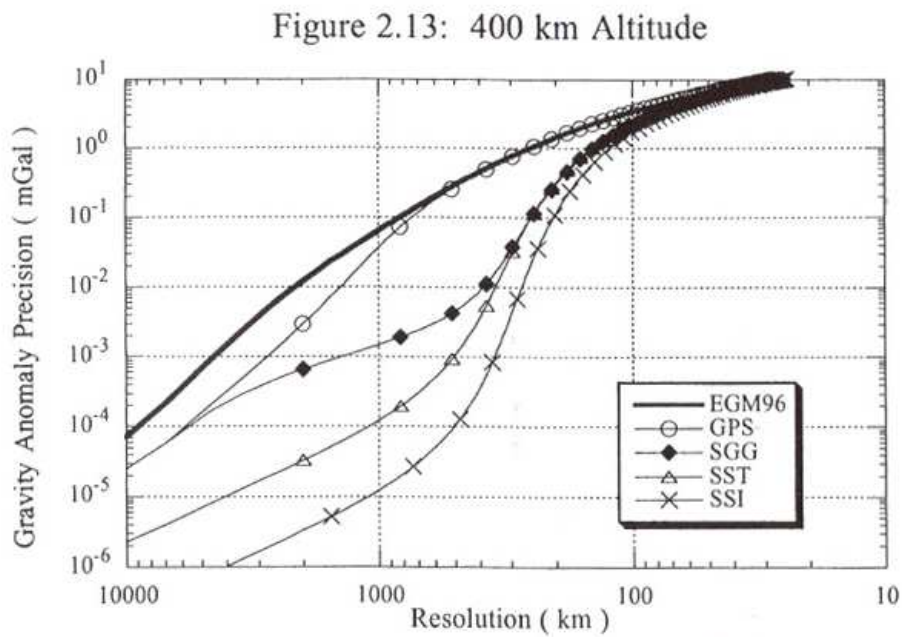


FIG. 1.10: Précision attendue sur la mesure du champ de pesanteur reportée sur la surface de la Terre pour différents types de missions satellitaires en fonction de la résolution spatiale (figure issue du livre "Satellite gravity and the geosphere", National Research Council, 1997). On distingue particulièrement les missions notées "GPS" (le satellite CHAMP), notées "SST" pour "Satellite to Satellite Tracking" (le satellite GRACE) et les missions notées "SGG" pour "Satellite Gravity Gradiometry" (le Satellite GOCE).



Actuellement, la précision des mesures de GRACE n'est pas celle initialement prévue, cependant elles s'affinent avec le temps (Tapley et al., 2004). Si GRACE atteint bien ses objectifs, on voit que la précision sur les plus bas degrés du champ sera de 0.01 mm sur la position du géoïde et 1-10 nGal sur la gravité.

La durée de vie de ces missions étant courte, les futures missions gravimétriques sont déjà en cours d'élaboration (Rummel et al., 2003). Les précisions minimales demandées pour les études de géophysique de la Terre solide sont de l'ordre de 0.001 mm sur le géoïde et du nGal pour la gravité.

### Observatoires gravimétriques

Avec l'essor des gravimètres supraconducteurs et le développement de la gravimétrie absolue, de plus en plus de mesures de gravimétrie de grandes précisions sont faites à la surface de la Terre. On notera la mise en place de réseaux d'observatoires tels que le réseau G.G.P. ("Global Geodynamic Project", voir Aldridge et al., 1991). Le réseau est composé de 20 stations réparties dans le monde, chacune munie d'un gravimètre supraconducteur dont la précision instrumentale est de 1 nGal (voir la carte 1.11).

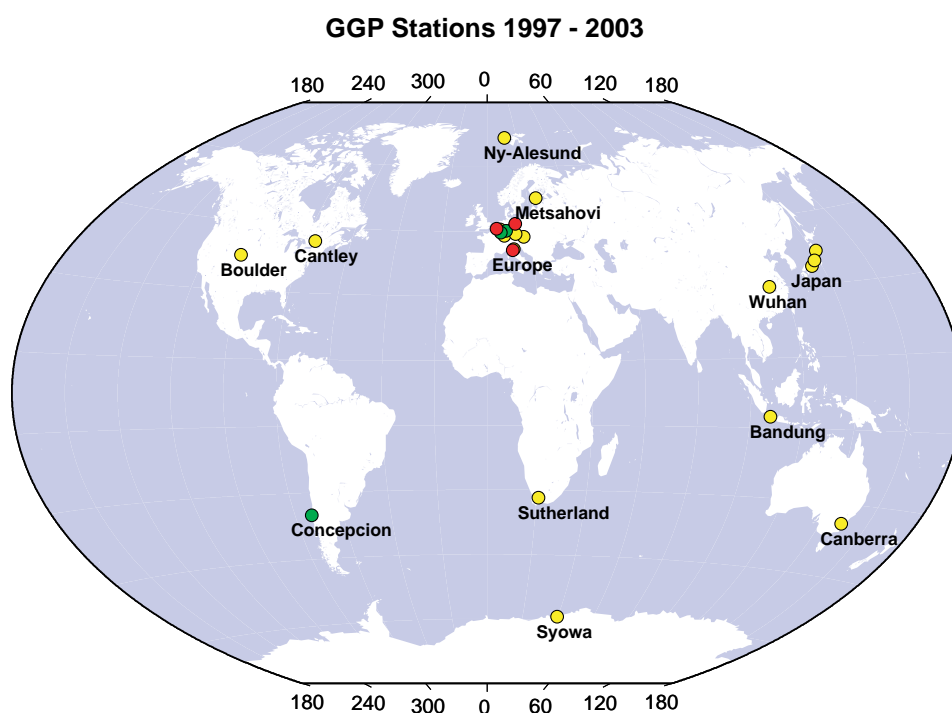


FIG. 1.11: Le réseau mondial d'observatoires gravimétriques du Global Geodynamic Project (Aldridge et al., 1991).

### 1.3.2 Développement de modèles réalistes

Une telle précision ouvre la voie à un nouveau type de gravimétrie. Les travaux de Wang (1991) suggèrent que certaines variations latérales ne sont plus négligeables dans la marée

solide ; de nouveaux modèles sont donc indispensables. Leur impact étant très mal connu, une des priorités est de le quantifier.

La marée solide étant un phénomène global, on peut s'attendre à ce qu'elle soit perturbée principalement par des variations latérales de densité et de paramètres rhéologiques de grandes longueurs d'ondes. On a vu que le manteau présente probablement deux très larges hétérogénéités de ce type : les méga-panaches sud-pacifique et sud-africain.

Les surcharges de surface, elles, ne déforment que la partie supérieure de la planète (voir chapitre 4). La réponse de la Terre aux surcharges est donc probablement plus sensible à des variations latérales plus superficielles et de plus courtes longueurs d'ondes.

Il est connu que l'inversion gravimétrique est non unique. L'avantage de la gravimétrie temporelle sur la gravimétrie statique tient au fait que le nombre de sources potentielles capables d'influencer ses variations est nettement plus restreint. Néanmoins un effort de modélisation directe des différents phénomènes est indispensable pour pouvoir bien les discerner dans le signal. Le développement de modèles plus réalistes devient par conséquent crucial. On notera particulièrement la marée solide qui est la première contribution parmi toutes à corriger, que ce soit dans les mesures temporelles ou dans les orbites des satellites.

Par ailleurs, connaître précisément l'impact des variations latérales sur les signaux de basses fréquences pourrait permettre d'apporter une information additionnelle sur la structure interne de la planète. La tomographie sismique n'apporte qu'une image partielle de la structure du manteau et de plus en plus d'études utilisant des données géophysiques conjointes se mettent en place. La contribution de la gravimétrie temporelle à la caractérisation de la structure du manteau n'a jamais jusqu'ici été envisagée.

	Ordre de grandeur des déplacements de surface	Ordre de grandeur des effets gravitationnels en surface
Effets théoriques de la marée solide	~ 50 cm (max) de déplacement vertical	~ 100 $\mu$ Gal maximum
Effets théoriques des marées océaniques	~ 15 cm maximum	~ 40 $\mu$ Gal maximum
Effets théoriques de l'atmosphère	~ 1 cm maximum	~ 10 $\mu$ Gal maximum
Effets théoriques des océans (en dehors des marées)	~ 1 cm maximum	~ 5 $\mu$ Gal maximum
Effets théoriques des eaux continentales	~ 1 cm maximum	~ 15 $\mu$ Gal maximum
Effets de l'ellipticité de la Terre sur la marée	~ 1 mm maximum	~ 200-300 nGal maximum
Effets des hétérogénéités latérales	à déterminer à la suite de ce travail de thèse	à déterminer à la suite de ce travail de thèse

TAB. 1.2: Récapitulatif des ordres de grandeurs des différentes contributions sur les déformations gravito-élastiques de la Terre.

	Précisions des mesures des déplacements de surface	Précisions des mesures des effets gravitationnels
Observations par satellites	GPS ~ 1 cm	LAGEOS ~ 10-100 nGal GRACE ~ 1-10 nGal (bas degrés)
Observations au sol	VLBI ~ 1 mm	Gravimètre supra-conducteur ~ 1 nGal

TAB. 1.3: Précision de quelques méthodes de mesure actuelles des déplacements de surface et de la gravité.



## Chapitre 2

# La gravito-élasticité

La Terre subit différentes sollicitations, principalement l'attraction du soleil et des autres planètes, qui lui imposent un mouvement d'ensemble, son orbite, et la déforment en partie. Dans la pratique, le déplacement de la planète est traité distinctement de sa déformation. Son mouvement d'ensemble est généralement déterminé en accord avec les lois de la mécanique du point, ce qui revient à définir précisément le déplacement de son centre de masse, la planète étant supposée rigide. Sa déformation, la partie qui nous intéresse ici, est alors calculée considérant la planète comme un milieu continu qui se déforme autour de son centre de masse supposé fixe.

Nous allons ici présenter les équations qui régissent le comportement gravito-élastique de la planète autour de son centre de masse. Ce système d'équations fut majoritairement établi à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle et au début du XX<sup>ème</sup> siècle, avec les travaux notamment de Lord Kelvin (Thomson, 1862) et de Love (1911). Il s'applique à tout corps en partie solide, en partie fluide, faiblement déformable, hypothèse adaptée au cas des planètes telluriques. Ce système est classiquement développé par perturbation à l'ordre 1 des lois de conservation de la mécanique appliquée à une planète à symétrie radiale. Nous avons eu besoin dans cette étude de développer le système à un ordre supérieur pour prendre en considération les variations latérales internes de densité et de paramètres rhéologiques dans le calcul. Notre étude est donc un travail à l'ordre deux.

Le traitement théorique des déformations fluides de la planète ne fait pas l'objet d'une présentation exhaustive car il ne nous servira pas dans la méthode en éléments spectraux utilisée dans ce travail (méthode présentée dans le chapitre 3). Nous le présentons cependant en partie car il est important de comprendre que la théorie générale s'attache aussi aux zones fluides telles que le noyau externe ou l'atmosphère. Les parties fluides ne nous seront pas nécessaires dans le cadre de cette thèse comme nous le montrerons dans chapitre 4.

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord des rappels sur les lois fondamentales de la mécanique, et sur la théorie des perturbations. Le système d'équations que nous aurons à résoudre est ensuite exprimé, d'abord tel qu'il est employé traditionnellement pour une planète à symétrie sphérique, puis dans le cas où la planète contient des variations latérales internes et des précontraintes non hydrostatiques. La théorie qui soutient cette approche n'est pas en elle-même nouvelle, mais son application à des problèmes de gravimétrie et de géodésie l'est. Cette méthode demande quelques développements mathématiques sur lesquels nous nous étendrons un peu, notamment la formulation variationnelle du système d'équations.

Le traitement des équations est inspiré du livre de référence de Dahlen & Tromp (1998)

dont nous utiliserons souvent les notations (voir l'annexe A.1 pour plus de précisions sur les notations). Nous nous appuyerons aussi sur les travaux de Chaljub (2000), de Valette (1987), et de Wang (1991).

## 2.1 Rappels de mécanique des milieux continus

### 2.1.1 Descriptions lagrangiennes et eulériennes

#### La position

En géophysique la Terre est considérée comme un continuum qui se déforme. Deux approches sont possibles pour décrire la déformation d'un milieu continu : l'approche lagrangienne, dans laquelle on s'attache à décrire le mouvement de chaque particule du milieu individuellement selon les principes cinématiques classiques de la mécanique du point ; et l'approche eulérienne qui consiste à fixer un repère (dit eulérien) indépendant du milieu dans lequel les mouvements de toutes les particules sont pris en compte.

On considère un domaine de  $\mathbb{R}^3$  que l'on note dans sa configuration initiale  $\Omega$ . La position cartésienne de chacune des particules élémentaires contenues dans ce domaine sera notée  $\vec{x}$ . Sous l'action de forces externes, le domaine se déforme et évolue. Nous le noterons  $\Omega^t$  dans sa configuration à l'instant  $t$ . Chaque particule, initialement en  $\vec{x}$ , se déplace au cours du temps selon un vecteur déplacement  $\vec{u}(\vec{x}, t)$ , sa nouvelle position est  $\vec{r}$  dans le repère eulérien, et toujours  $\vec{x}$  dans le repère lagrangien qui se déplace avec la particule. À l'instant  $t$  :

$$\vec{r}(\vec{x}, t) = \vec{x} + \vec{u}(\vec{x}, t) \quad (2.1)$$

Et à  $t = 0$ , les positions coïncident pour les deux descriptions :  $\vec{r}(\vec{x}, 0) = \vec{x}, \forall \vec{x} \in \Omega$ .

#### Variables

Soit  $q$  une variable dépendante de la position. On notera  $q^E$  l'expression de cette variable dans le repère eulérien et  $q^L$  l'expression de cette variable dans le repère lagrangien. On aura naturellement :

$$q^E(\vec{r}, t) = q^L(\vec{x}, t), \quad \forall t \quad (2.2)$$

### 2.1.2 Contraintes et déformations

#### Notion de déformation

La mesure de la déformation est une évaluation des variations des distances dans le milieu continu, entre les instants  $t = 0$  et  $t > 0$ . La caractérisation de la déformation du milieu revient à chercher l'application liant la distance élémentaire initiale  $d\vec{x}$  séparant deux points consécutifs, à l'écart des normes  $\|d\vec{r}\|^2 - \|d\vec{x}\|^2$  au temps  $t$ .

Dans le cadre des petites déformations, on peut montrer que l'ensemble des déformations est bien caractérisé par le tenseur dit de déformation finie :

$$\epsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{u} + (\vec{\nabla}\vec{u})^T) \quad (2.3)$$

$\vec{u}$  étant le déplacement en tout point  $\vec{x}$ ,  $\vec{\nabla}$  l'opérateur gradient. Notons que  $\vec{u}$  est un vecteur,  $\vec{\nabla}\vec{u}$  est donc un tenseur d'ordre 2<sup>1</sup>. L'exposant "T" se rapporte au tenseur transposé ( $\epsilon_{ij}^T = \epsilon_{ji}$  par exemple).

### Le tenseur des contraintes

Dans un milieu continu, chaque élément de volume exerce une force de traction sur les éléments l'environnant, on parle de forces internes du milieu ou forces de contraintes. Ce sont des forces qui agissent sur les surfaces des éléments. D'après le théorème de Cauchy, la relation entre la force de contrainte appliquée sur une surface  $S^t$  et la normale  $\vec{n}^t$  de cette surface est linéaire. Il existe donc un champ tensoriel de second ordre  $\bar{\mathbf{T}}$ , que l'on nomme tenseur de Cauchy, tel que la force qui s'exerce en tout point  $\vec{r}$  de la surface soit :

$$\vec{f}_s^E(\vec{r}, t) = S^t(\vec{r}) \vec{n}^t(\vec{r}) \cdot \bar{\mathbf{T}}^E(\vec{r}, t) \quad (2.4)$$

$\bar{\mathbf{T}}^E$  et  $\bar{\mathbf{T}}^L$  sont les descriptions eulériennes et lagrangiennes du tenseur de Cauchy. C'est un tenseur symétrique dans les deux descriptions, et comme tous les tenseurs de contraintes, il peut être décomposé en une partie diagonale (plus exactement sphérique car les termes diagonaux sont égaux) et une partie déviatorique de trace nulle. La partie diagonale se rapporte à la pression locale du milieu ( $p^E$  pour le cas eulérien), et la partie déviatorique aux forces de cisaillement locales (tenseur déviateur  $\bar{\mathcal{T}}^E$ ) :

$$\bar{\mathbf{T}}^E = -p^E \bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathcal{T}}^E \quad (\bar{\mathbf{I}} \text{ le tenseur identité}) \quad (2.5)$$

Un autre tenseur de contraintes moins usité mais indispensable à prendre en considération dans ce travail est le premier tenseur de Piola-Kirchhoff  $\bar{\mathbf{T}}^{PK}$ . Il est défini tel que la force appliquée sur la surface  $S^t$ , à l'instant  $t$ , soit aussi :

$$\vec{f}_s^E(\vec{r}, t) = S^t \vec{n}^t \cdot \bar{\mathbf{T}}^E = S^0(\vec{x}) \vec{n}(\vec{x}) \cdot \bar{\mathbf{T}}^{PK}(\vec{r}, t) \quad (2.6)$$

$S^0 \vec{n}$  étant la "surface orientée" telle qu'elle était à  $t = 0$ . Le premier tenseur de Piola-Kirchhoff est un tenseur non symétrique, hybride entre les repères lagrangien et eulérien.

### Rhéologie

Les matériaux ne réagissent pas identiquement sous l'action d'une contrainte. La loi rhéologique détermine cette réaction en liant le tenseur des contraintes au tenseur de déformation du milieu.

Dans le cas d'un milieu élastique, soumis à de petites déformations, la réponse en contraintes est supposée linéaire au tenseur de déformation finie, on note :

$$\bar{\mathbf{T}}^L = \bar{\mathbf{c}} : \vec{\nabla}\vec{u} \quad (2.7)$$

$\bar{\mathbf{c}}$  est le tenseur élastique d'ordre 4 caractéristique du milieu (voir les annexes pour les notations). Dans cette représentation-ci, on suppose que tout l'état de contrainte est due à la déformation du milieu, il n'y a pas de précontrainte.

Dans ce travail  $\bar{\mathbf{c}}$  sera simplifié à un milieu élastique isotrope, suivant la loi de Hooke :

$$\bar{\mathbf{T}}^L = \lambda(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\bar{\mathbf{I}} + \mu(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{\nabla}\vec{u}^T) \quad (2.8)$$

---

<sup>1</sup>on note  $(\vec{\nabla}\vec{u})_{ij} = \partial_i u_j$ ,  $u_j$  étant les composantes du vecteur  $\vec{u}$  selon le repère que l'on considère

Les composantes du tenseur  $\bar{\mathbf{c}}$  se réduisent à deux paramètres indépendants,  $\lambda$  et  $\mu$ , les paramètres de Lamé ( $\mu$  est aussi appelé paramètre de rigidité). Mais par simplicité d'écriture, et à des fins de généralisation, nous garderons l'expression rhéologique selon le tenseur  $\bar{\mathbf{c}}$  tout au long du traitement des équations.

### 2.1.3 La gravité

D'après la théorie de Newton de la Gravitation Universelle, toute masse génère un champ de gravité  $\vec{g}^E$  orientée vers elle. La force qui en découle étant conservative, le champ de gravité dérive d'un potentiel scalaire  $\phi^E$ . Dans ce travail, nous utiliserons la convention de signe :

$$\vec{g}^E = -\vec{\nabla}\phi^E \quad (2.9)$$

Compte tenu des propriétés du potentiel de gravité dans  $\mathbb{R}^3$ , le potentiel obéit à l'équation de Poisson en tout point  $\vec{r} \in \Omega^t$  :

$$\Delta\phi^E(\vec{r}, t) = 4\pi G\rho^E(\vec{r}, t) \quad (2.10)$$

$\rho^E(\vec{r}, t)$  une distribution de masse volumique du milieu, et  $G$  la constante de gravitation.

Notons que  $\Delta\phi^E = 0$  à l'extérieur du corps (sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}^t$ ), le potentiel  $\phi^E$  admet un prolongement harmonique à l'extérieur du volume.

Le potentiel et la gravité doivent être continus sur  $\mathbb{R}^3$ , et particulièrement à travers les interfaces de discontinuités en densité, on note<sup>2</sup> :

$$[\phi^E]_-^+ = 0 \text{ et } [\vec{n}^t \cdot \vec{g}^E]_-^+ = 0 \text{ sur les interfaces de discontinuité en } \rho^E.$$

$\vec{n}^t$  étant la normale sortante de l'interface de discontinuité à l'instant  $t$ .

### 2.1.4 Lois de conservation

#### Théorème de transport de Reynolds

Soit  $\omega^t$  un élément de volume de  $\Omega^t$  à un instant  $t$  qui se déplace avec le matériel. Sa surface, de normale  $\vec{n}^t$  orientée vers l'extérieur, est notée  $\partial\omega^t$ .

Soit une quantité physique  $q^E$  définie en tout point  $\vec{r}$  de  $\Omega^t$  et à l'instant  $t$ . La variation globale de  $q^E$  dans  $\omega^t$  au cours du mouvement sera égale à la somme des variations locales de  $q^E$  en chaque point de  $\omega^t$ , additionnée du flux de  $q^E$  traversant la surface en mouvement de l'élément :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega^t} q^E dV = \int_{\omega^t} \frac{\partial}{\partial t} q^E dV + \int_{\partial\omega^t} (\vec{n}^t \cdot \vec{v}^E) q^E dS$$

$\vec{v}^E$  est la vitesse eulérienne des particules,  $\vec{v}^E = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ .

Appliquant le théorème de la divergence<sup>3</sup>, l'équation précédente :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega^t} q^E dV = \int_{\omega^t} \left( \frac{\partial}{\partial t} q^E + \vec{\nabla} \cdot (q^E \vec{v}^E) \right) dV$$

<sup>2</sup>voir les notations en annexe A.1 : On note  $[q]_-^+$  le saut de la variable  $q$  à travers une interface de normale  $\vec{n}$  orientée vers l'extérieur. Plus précisément  $[q(\vec{x})]_-^+ = q^+(\vec{x}) - q^-(\vec{x})$ ,  $q^+$  et  $q^-$  étant respectivement les valeurs de  $q$  de chaque coté de l'interface au point  $\vec{x}$  ("+" pour la zone située du coté positif de la normale  $\vec{n}$  et "-" pour l'autre).

<sup>3</sup>Théorème de la divergence ou d'Ostrogradzky  $\int_{\partial\omega} \vec{n} \cdot \vec{q} dS = \int_{\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{q} dV$



### La conservation de masse

Quelles que soient la déformation et l'évolution du milieu que nous étudions, la masse globale de chaque élément de volume est conservée au cours du temps :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega^t} \rho^E dV = 0 \quad (2.11)$$

Compte tenu de la relation de transport, et sachant que la relation doit être valable pour tout  $\omega^t$ , cela revient à une égalité presque partout<sup>(4)</sup> dans  $\Omega^t$  :

$$\frac{\partial \rho^E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho^E \vec{v}^E) = 0 \quad (2.12)$$

On suppose que  $\rho^E$  et  $\vec{v}^E$ , la masse volumique et la vitesse locale du milieu, sont des fonctions suffisamment régulières.

### La conservation de la quantité de mouvement

Cette loi de conservation est une généralisation de la deuxième loi de Newton, la relation fondamentale de la dynamique : "toute variation au cours du temps de la quantité de mouvement d'un objet est égale à la somme des forces auquel il est soumis".

On distinguera parmi les différentes forces en action :

- des forces "internes" de surface :  
les tractions  $\vec{n}^t \cdot \bar{\mathbf{T}}^E$  (par unité de surface) qui agissent sur la surface des éléments  $\omega^t$
- des forces "internes" de volume :  
principalement l'attraction gravitationnelle  $-\rho^E \vec{\nabla} \phi^E$  (par unité de volume) qui agit en chaque point des  $\omega^t$
- les forces "externes" :  
Les autres forces  $\vec{f}^E$  (par unité de volume) et notamment les forces d'origine externe à  $\Omega^t$ . On les pose ici en tant que forces volumiques, mais elles pourraient aussi être surfaciques.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée sur un élément  $\omega^t$  de  $\Omega^t$  est :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega^t} \rho^E \vec{v}^E dV = \int_{\partial \omega^t} \vec{n}^t \cdot \bar{\mathbf{T}}^E dS - \int_{\omega^t} \rho^E \vec{\nabla} \phi^E dV + \int_{\omega^t} \vec{f}^E dV \quad (2.13)$$

C'est à dire presque partout dans  $\Omega^t$ , compte tenu de la conservation de la masse et du principe de transport :

$$\rho^E \left( \frac{\partial \vec{v}^E}{\partial t} + \vec{v}^E \cdot \vec{\nabla} \vec{v}^E \right) = \vec{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{T}}^E - \rho^E \vec{\nabla} \phi^E + \vec{f}^E \quad (2.14)$$

---

<sup>4</sup>partout sauf dans les ensembles de mesures nulles

### Conditions aux limites

Les lois de conservation doivent s'accompagner de relations de continuités sur chaque interface interne séparant des matériaux distincts (c'est à dire dont les paramètres rhéologiques diffèrent de chaque coté de l'interface) :

- En surface, les tractions sont égales à la pression externe  $p_a$  (si elle est nulle on parle de condition de surface libre) :

$$\vec{n}^t \cdot \bar{\mathbf{T}}^E = \vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}^{PK} = -p_a \vec{n}^t$$

- Conditions cinématiques :

- sur les interfaces solidaires liant deux solides élastiques :

$$[\vec{u}]_{-}^{+} = 0$$

- sur les interfaces glissantes (entre solide et fluide non visqueux) :

$$[\vec{n} \cdot \vec{u}]_{-}^{+} = 0$$

- Conditions dynamiques : les tractions appliquées sur toutes interfaces doivent être continues (à l'exception d'une surcharge interne excitatrice), sachant la relation 2.6 :

$$[\vec{n}^t \cdot \bar{\mathbf{T}}^E]_{-}^{+} = 0 \text{ ou encore } [\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}^{PK}]_{-}^{+} = 0$$

## 2.2 La théorie des perturbations

### 2.2.1 Principe

Nous allons rappeler quelques bases sur la théorie des perturbations, théorie très utilisée dans de nombreux domaines de la physique. L'intérêt de la méthode, pour un problème donné, est de simplifier les équations en séparant et dégageant, lorsque cela est possible, les différents ordres de grandeurs caractéristiques du problème.

Cela n'est possible que dans le cadre de petites perturbations. Les variables caractéristiques du système physique ne doivent varier que très peu par rapport à leurs valeurs moyennes.

On définit un état moyen du système que l'on étudie : le système de référence. Soit  $q$  une variable quelconque de l'espace et du temps,  $q_0$  sa valeur dans la configuration de référence. L'état de référence est considéré comme un état initial  $q^E(\vec{r}, t = 0) = q^L(\vec{x}, t = 0) = q_0(\vec{x})$ . Le développement aux perturbations consiste à décomposer notre variable en une série du type :

$$\begin{aligned} q^E(\vec{r}, t) &= q_0(\vec{r}) + q_1^E(\vec{r}, t) + q_2^E(\vec{r}, t) + \dots \\ q^L(\vec{x}, t) &= q_0(\vec{x}) + q_1^L(\vec{x}, t) + q_2^L(\vec{x}, t) + \dots \end{aligned}$$

Les  $q_1$  sont les perturbations d'ordre 1 de  $q$ , les  $q_2$  celles d'ordre 2, etc..., chaque terme ayant un poids dans le développement d'autant plus petit que son ordre est grand. La série doit être convergente, elle revient à un développement de Taylor au voisinage de  $t = 0$ , les perturbations  $q_i$  étant égales à :

$$q_i(\vec{x}, t) = \frac{t^i}{i!} \frac{\partial^i q}{\partial t^i}(\vec{x}, 0)$$

Il est donc indispensable que  $q$  ne varie que peu avec le temps. On notera que l'échelle de temps du développement est virtuelle dans la mesure où la configuration initiale de référence de la Terre est une configuration elle-même virtuelle (la Terre n'est pas réellement supposée avoir présenté cette configuration). Il faut bien distinguer cette échelle de l'échelle des temps physiques sur laquelle les perturbations se rapportent une fois le développement réalisé.

### Variables lagrangiennes et eulériennes au premier ordre

Nous détaillons le formalisme pour l'ordre 1 car c'est celui utilisé en général. D'autre part les simplifications que l'on opère à l'ordre 1 sont généralisables aux ordres supérieurs.

À l'ordre 1, les perturbations lagrangiennes et eulériennes s'expriment assez simplement les unes par rapport aux autres en un point donné. Suivant 2.2, nous avons la relation :

$$q_0(\vec{x}) + q_1^L(\vec{x}, t) = q_0(\vec{r}) + q_1^E(\vec{r}, t)$$

Sachant que  $\vec{r} = \vec{x} + \vec{u}$ , à l'aide d'un développement limité en  $\vec{x}$  à l'ordre 1 (et réciproquement en  $\vec{r}$ ), nous aurons :

$$q_1^L(\vec{x}, t) \simeq q_1^E(\vec{x}, t) + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} q_0(\vec{x}) \tag{2.15}$$

$$q_1^E(\vec{r}, t) \simeq q_1^L(\vec{r}, t) - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} q_0(\vec{r}) \tag{2.16}$$

#### 2.2.2 Résolution d'équations par méthode perturbative

Soit une équation aux dérivées partielles définie avec un opérateur différentiel  $\mathbf{A}$ . L'exemple qui suit illustre l'emploi que nous ferons de la théorie des perturbations. L'équation (eulérienne) que nous voulons résoudre est  $\mathbf{A}q(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)$ , la variable  $q$  étant ici l'inconnue à déterminer et  $f$  un second membre connu. L'équation après développement perturbatif de chacune de ses composantes devient en  $(\vec{r}, t)$  :

$$(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots)(q_0 + q_1 + q_2 + \dots) = f_0 + f_1 + f_2 + \dots \tag{2.17}$$

L'opérateur différentiel est lui même perturbé, c'est à dire que l'on peut définir des opérateurs approchés, dont les applications auront des ordres de grandeurs caractéristiques différents. Nous allons pouvoir calculer pas à pas une solution approchée de notre équation. On identifie les termes ordre à ordre (par unicité du développement en série de Taylor) :

$$\begin{aligned} \text{ordre 0} \quad \mathbf{A}_0 q_0(\vec{x}) &= f_0(\vec{x}) \\ \text{ordre 1} \quad \mathbf{A}_0 q_1(\vec{x}, t) &= f_1(\vec{x}, t) - \mathbf{A}_1 q_0(\vec{x}) \\ \text{ordre 2} \quad \mathbf{A}_0 q_2(\vec{x}, t) &= f_2(\vec{x}, t) - \mathbf{A}_2 q_0(\vec{x}) - \mathbf{A}_1 q_1(\vec{x}, t) \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

Partant de la première équation d'ordre 0, on détermine  $q_0$ . Avec la deuxième équation d'ordre 1, on détermine  $q_1$  connaissant  $q_0$ , et ainsi de suite...

Par la répartition ordre à ordre, l'équation, initialement appliquée en tout point  $\vec{r}$  de  $\Omega^t$ , revient à s'appliquer en tout point  $\vec{x}$  de  $\Omega$ , configuration spatiale qui a l'avantage d'être bien connue et indépendante du temps (voir l'annexe B.1 pour la démonstration). Les équations ordre à ordre sont donc lagrangiennes. Enfin, la méthode se réduit à une succession de résolutions dans lesquelles on inverse toujours le même opérateur  $\mathbf{A}_0$ . Celui-ci n'est qu'une représentation approchée de  $\mathbf{A}$ . Si par hasard  $\mathbf{A}$  est un opérateur difficile à "inverser", il nous suffira de trouver un opérateur approché  $\mathbf{A}_0$  dont les propriétés mathématiques sont plus arrangeantes d'emploi (la linéarisation d'une équation est un exemple de cette opération).

### 2.2.3 Notre utilisation de la théorie des perturbations

Différents phénomènes géophysiques sont étudiés par méthodes perturbatives. On distinguera pour notre étude deux grands groupes :

- **La réponse élastique d'une planète sous l'action d'une force externe.** La Terre est soumise à différentes sollicitations "externes", l'attraction luni-solaire, les surcharges de surface (l'océan ou l'atmosphère) ou encore les séismes. La réponse de la Terre à ces sollicitations est classiquement calculée à l'ordre 1, la planète de référence étant sphérique ou ellipsoïdale, à l'équilibre hydrostatique.
- **La déformation visqueuse de la planète due à la modification de sa structure interne et de sa forme globale.** Prendre en compte la dynamique interne et la convection de la planète revient notamment à lui ajouter des variations latérales de densité et de rhéologie interne, ainsi qu'une topographie dynamique associée sur les interfaces. Ajouter ces aspects perturbe l'équilibre mécanique et gravitationnel de la planète par rapport à sa configuration virtuelle sphérique à l'équilibre hydrostatique. Dans la pratique l'impact de ces modifications internes peut être calculé par une méthode aux perturbations. Celles-ci sont en général supposées être d'ordre 1, voire plus dans certains cas (l'impact de l'ellipticité sur la gravité par exemple est développé au delà du premier ordre par l'intermédiaire des  $J_2, J_4, \dots$ )

Notre but ne sera pas de recalculer les perturbations de ces ensembles de phénomènes à un ordre supérieur, mais plutôt de coupler ces deux groupes, et d'en déterminer la perturbation additionnelle qui sera elle d'un ordre supérieur. Nous allons par exemple déterminer quel est l'impact de variations latérales de densité sur la réponse de marée lunaire de la Terre (réponse en déformation et en gravité). Les variations latérales, tout comme l'attraction de la Lune, génèrent des perturbations d'ordre 1 de déformation et de gravité sur la planète. La perturbation additionnelle due à la prise en compte consécutive de ces deux aspects sera donc *a priori* d'ordre 2, mais l'amplitude de cette perturbation sera intermédiaire aux amplitudes des perturbations d'ordre 2 que génèreraient chacun de ces phénomènes pris indépendamment.

Nous allons résoudre notre problème en quatre étapes que l'on associe à quatre états, la variable à déterminer étant toujours imagée par  $q$ .

#### État 0 (ordre 0)

D'abord, nous définissons un état de référence, une Terre à symétrie radiale et à l'équilibre de précontraintes hydrostatique. Les paramètres physiques ( $q$ ) de la planète obéissent à l'équation d'ordre 0 (figure 2.1).

#### Etat 1 (ordre 1)

Si on applique une force externe  $f_1$  additionnelle, mais petite, sur la planète,  $q$  va varier d'une valeur  $q_1$ . On définira le système d'équations de la gravito-élasticité appliqué au premier ordre (voir la figure 2.2).

#### Etat 0' (ordre 1)

En troisième étape, on modifie l'état de référence. On calcule la perturbation au premier ordre de  $q$  due à l'ajout des variations latérales et des précontraintes non hydrostatiques au

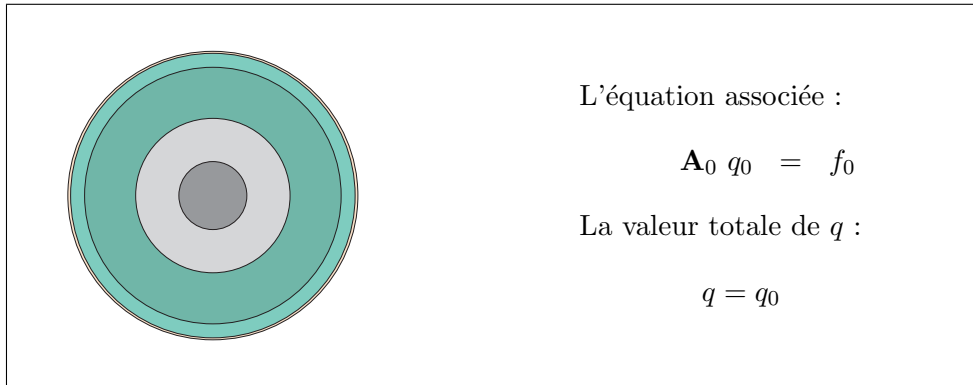


FIG. 2.1: État 0 : Terre de référence à symétrie radiale et à l'équilibre de précontraintes hydrostatique. Les couches internes de la planète représentées ici sont arbitraires

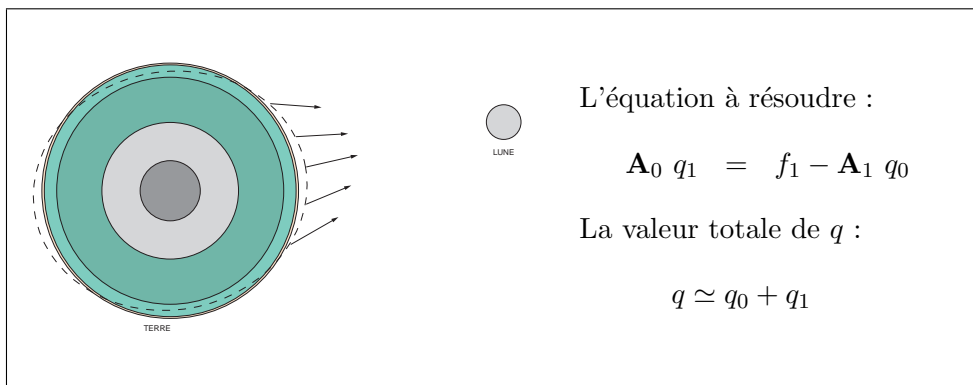


FIG. 2.2: État 1 : Application d'une force externe (force d'attraction de la Lune ici) sur la Terre de référence

modèle de référence de départ. On note ici les perturbations d'ordre 1 :  $\delta f_0$ ,  $\delta q_0$  et  $\delta \mathbf{A}_0$  (pour les distinguer des  $f_1$ ,  $q_1$  et  $\mathbf{A}_1$  de l'état 1). Cet état perturbé définira notre nouvel état de référence dans lequel la variable  $q$  a pour valeur  $q_0 + \delta q_0$  (voir la figure 2.3).

### Etat 1' (ordre 2)

Appliquant la force externe sur notre nouvel état de référence 0', la présence consécutive des perturbations  $\delta f_0$ ,  $\delta q_0$ ,  $\delta \mathbf{A}_0$  et  $q_1$ ,  $\mathbf{A}_1$ ,  $f_1$  provoque l'émergence de perturbations additionnelles  $\delta q_1$ ,  $\delta \mathbf{A}_1$  et  $\delta f_1$ . Ce sont des perturbations d'ordre 2 dues au couplage entre les deux relations précédentes d'ordre 1. L'état est noté 1' et l'équation au deuxième ordre à résoudre est développée dans la figure 2.4.

Dans les équations qui suivront  $q_1$  correspond au déplacement  $\vec{u}$ ,  $q_0$  est nul, et  $\delta q_1$  est noté  $\delta \vec{u}$ . L'opérateur  $\mathbf{A}_0$  est l'opérateur de la gravito-élasticité que nous noterons  $\mathbf{A}$ , tandis que  $\delta \mathbf{A}_0$  sera noté  $\delta \mathbf{A}$ .

Ce travail de thèse a pour but de résoudre la dernière étape, l'état 1', les solutions des étapes intermédiaires étant supposées déjà connues.

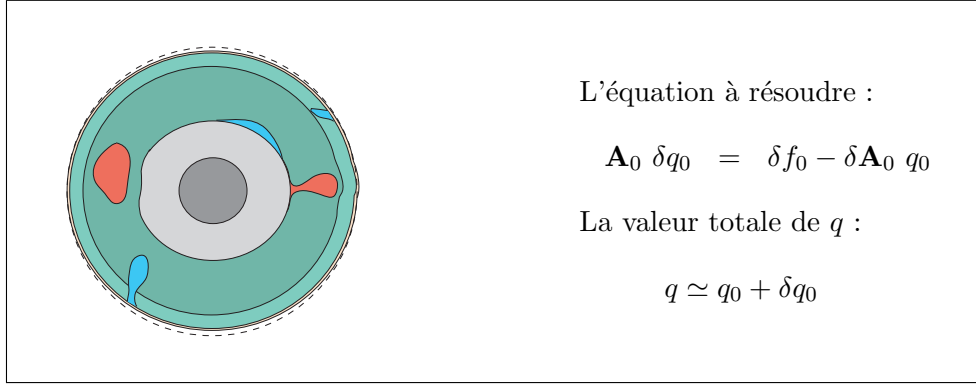


FIG. 2.3: État 0' : Nouvelle Terre de référence exprimée comme une perturbation de l'état 0 (dont les pointillés représentent l'enveloppe)

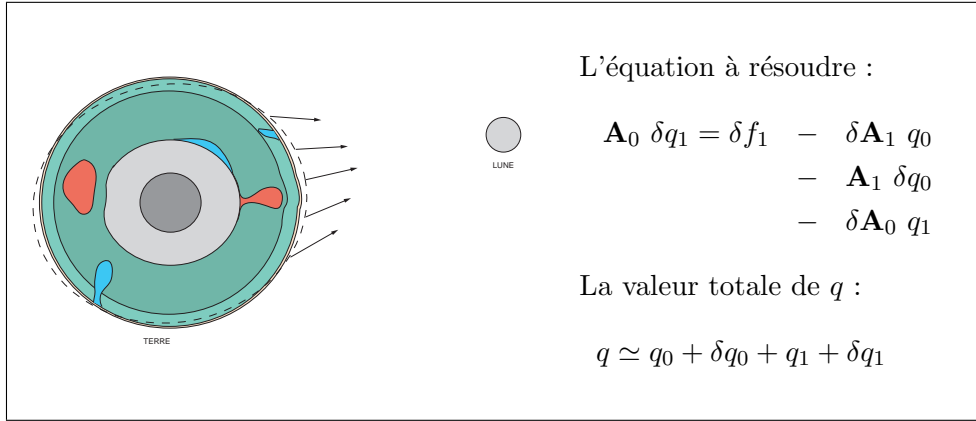


FIG. 2.4: État 1' : Application d'une force externe (force d'attraction de la Lune ici) sur la nouvelle Terre de référence

## 2.3 La gravito-élasticité

Le système d'équations dit de la gravito-élasticité est basé sur une représentation au premier ordre des équations de la mécanique élastique. Ce système est développé pour une Terre à symétrie radiale, à l'équilibre de précontraintes hydrostatiques. Nous ne prendrons pas ici en compte la rotation. Le repère cartésien eulérien est centré sur le centre de masse de la planète. Celle-ci étant sphérique et à symétrie radiale, le repère est géocentrique.

### 2.3.1 Système de référence (État 0)

#### Notations topologiques

On note toujours  $\Omega$ , l'ensemble<sup>(5)</sup> caractérisant la Terre de référence, et sa frontière  $\partial\Omega$ .

Nous choisissons une Terre de référence sphérique présentant une symétrie radiale, à l'image du modèle de Terre P.R.E.M. (Dziewonski & Anderson, 1981) présenté dans la figure 2.5.

<sup>5</sup>ensemble ouvert, borné et connexe de  $\mathbb{R}^3$

La Terre est composée de matériaux différents dont les paramètres intrinsèques (densité et coefficients élastiques) sont supposés continus par morceaux. On distinguera des zones solides et des zones fluides, et on notera  $\Omega_S$  et  $\Omega_F$  les ensembles contenant respectivement toutes les couches solides et toutes les couches fluides (les paramètres dans chaque couche étant continus).

$\Sigma$  est l'ensemble des interfaces de discontinuités internes de  $\Omega$  (voir la figure 2.5),  $\Sigma_{SS}$  l'ensemble des interfaces séparant deux zones solides (interfaces solide-solide) et  $\Sigma_{SF}$  l'ensemble des interfaces séparant une zone solide d'une zone fluide (interfaces solide-fluide). Enfin on note  $\Sigma_\rho$  l'ensemble des interfaces de discontinuités de densité. On a  $\Sigma = \Sigma_{SF} \cup \Sigma_{SS} \cup \Sigma_\rho$ , sachant que la majorité des interfaces de  $\Sigma_\rho$  sont aussi dans  $\Sigma_{SF}$  ou dans  $\Sigma_{SS}$ .

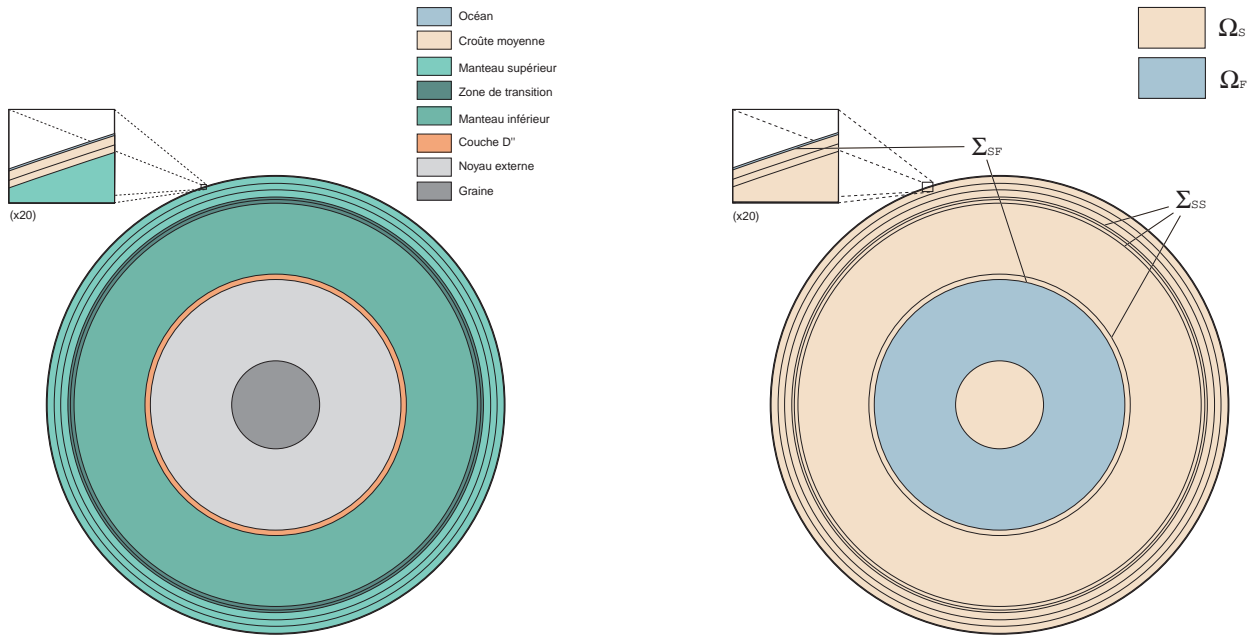


FIG. 2.5: Représentation schématique du milieu de référence identifié ici au model PREM. La figure de gauche présente la structure interne de PREM, la figure de droite présente les ensembles que nous utiliserons par la suite.

### Relation d'équilibre

Cette configuration de Terre représentera notre Terre de référence, c'est à dire la structure virtuelle initiale de la Terre à  $t = 0$ . La planète est auto-gravitante sans rotation, ses paramètres physiques obéissent localement aux équations du mouvement 2.14 et de Poisson 2.10 en tout point  $\vec{x}$  de  $\Omega$  :

$$\vec{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{T}}_o - \rho_o \vec{\nabla} \phi_o = 0 \quad (2.18)$$

$$\Delta \phi_o = 4\pi G \rho_o \quad (2.19)$$

$\bar{\mathbf{T}}_o$  le tenseur des précontraintes<sup>(6)</sup>

$\phi_o$  le potentiel de gravité (la gravité  $\vec{g}_o = -\vec{\nabla} \phi_o$ )

<sup>6</sup>Dans la configuration de référence, le tenseur de Cauchy et le tenseur de Piola-Kirchhoff coïncident

$\rho_o$  la masse volumique

Cette représentation de la Terre étant notre configuration de Terre initiale, les référentiels lagrangiens et eulériens n'entrent pas en jeu. L'équation d'équilibre doit satisfaire aux continuités (voir paragraphe 2.1.4) :

$$[\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_o]_{-}^{+} = 0 \text{ sur } \Sigma, \text{ et } \vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_o = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

$$[\phi_o]_{-}^{+} = 0 \text{ et } [\vec{n} \cdot \vec{g}_o]_{-}^{+} = 0 \text{ sur } \Sigma_\rho \cup \partial\Omega.$$

### L'équilibre hydrostatique

L'état de précontrainte est supposé hydrostatique, les seules forces de tractions qui jouent à l'intérieur de la planète sont les forces de pression liées au poids des roches situés immédiatement au dessus (selon le rayon  $r$ ), comme si la planète était composée uniquement de fluides parfaits (non visqueux). Le tenseur des précontraintes est sphérique  $\bar{\mathbf{T}}_o = -p_o \bar{\mathbf{I}}$  et l'équation d'équilibre se simplifie :

$$\vec{\nabla} p_o = -\rho_o \vec{\nabla} \phi_o \quad (2.20)$$

Prenant le rotationnel de l'équation, on déduit que  $\vec{\nabla} \rho_o \wedge \vec{\nabla} \phi_o = \vec{0}$  ainsi que  $\vec{\nabla} p_o \wedge \vec{\nabla} \phi_o = \vec{0}$ , ce qui réduit le champ des configurations possibles de Terre. Les isosurfaces de densité, de pression et de potentiel doivent obligatoirement être confondues.

Nous avons choisi une Terre de référence sphérique, les surfaces internes de même densité, de même pression et de même potentiel sont donc elles aussi sphériques. Les seules variations des paramètres de référence admissibles sont radiales :  $\phi_o(\vec{x}) = \phi_o(r)$ ,  $p_o(\vec{x}) = p_o(r)$  et  $\rho_o(\vec{x}) = \rho_o(r)$  ( $r$  étant ici la variable radiale du repère sphérique), ce qui est le cas pour les modèles de référence sismologiques en général tel que P.R.E.M..

### 2.3.2 Approximation à de petits déplacements (État 1)

On applique maintenant une force d'excitation externe  $\vec{f}^E$ , la Terre se déforme et voit sa gravité changée. Dans le cadre de l'approximation de petits déplacement  $\|\vec{u}\| \ll 1$ , sa configuration à l'instant  $t$  est très proche de l'état de référence. On définit les perturbations de ses paramètres en tout point :

$$\begin{aligned} \rho_o^E(\vec{r}, t) &= \rho_o(\vec{r}) + \rho_1^E(\vec{r}, t) \\ \bar{\mathbf{T}}^E(\vec{r}, t) &= \bar{\mathbf{T}}_o(\vec{r}) + \bar{\mathbf{T}}_1^E(\vec{r}, t) \\ \phi^E(\vec{r}, t) &= \phi_o(\vec{r}) + \phi_1^E(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

La planète obéit à la relation de la dynamique en tout point  $\vec{r}$  de  $\Omega^t$  :

$$\begin{aligned} (\rho_o + \rho_1^E) \left( \frac{\partial \vec{v}^E}{\partial t} + \vec{v}^E \cdot \vec{\nabla} \vec{v}^E \right) &= \vec{\nabla} \cdot (\bar{\mathbf{T}}_o + \bar{\mathbf{T}}_1^E) \\ &\quad - (\rho_o + \rho_1^E) \vec{\nabla} (\phi_o + \phi_1^E) + \vec{f}^E \end{aligned} \quad (2.21)$$

et à l'équation de Poisson en tout point  $\vec{r}$  de  $\Omega^t$  :

$$\Delta(\phi_o + \phi_1^E) = 4\pi G(\rho_o + \rho_1^E) \quad (2.22)$$



Connaissant les relations 2.18 et 2.19, et tronquant à l'ordre 1, le système se simplifie en tout point  $\vec{x}$  de  $\Omega^{(7)}$  :

$$\rho_o \partial_{tt} \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^E + \rho_o \vec{\nabla} \phi_1^E + \rho_1^E \vec{\nabla} \phi_o = \vec{f}^E \quad (2.23)$$

$$\Delta \phi_1^E = 4\pi G \rho_1^E \quad (2.24)$$

### Opérateur de la gravito-élasticité

En intégrant l'équation de la conservation de la masse 2.12 par rapport au temps, nous pouvons définir :

$$\rho_1^E = -\vec{\nabla} \cdot (\rho_o \vec{u})$$

Et d'après 2.16 et 2.20 nous avons :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_1^E &= \bar{\mathbf{T}}_1^L - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \bar{\mathbf{T}}_o \\ &= \bar{\mathbf{T}}_1^L - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p_o \bar{\mathbf{I}} \\ &= \bar{\mathbf{T}}_1^L - \vec{u} \cdot \vec{g}_o \bar{\mathbf{I}} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Séparant le problème spatial du problème temporel, on note  $\mathbf{A}$  l'opérateur différentiel de la gravito-élasticité. Le problème de la gravito-élasticité s'écrit donc :

Trouver  $\vec{u}$  en tout point  $\vec{x} \in \Omega$  et tout  $t \in [0, T]$  solution de l'équation

$$\rho_o \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \mathbf{A} \vec{u} = \vec{f}^E \quad (2.26)$$

avec  $\mathbf{A}$  l'opérateur défini :

$$\mathbf{A} \vec{u} = -\vec{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L(\vec{u}) - \vec{\nabla}(\rho_o \vec{u} \cdot \vec{g}_o) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_o \vec{u}) \vec{g}_o + \rho_o \vec{\nabla} \phi_1^E(\vec{u}) \quad (2.27)$$

et sachant que  $\bar{\mathbf{T}}_1^L$  et  $\phi_1^E$  obéissent aux relations :

$$\bar{\mathbf{T}}_1^L(\vec{u}) = \bar{\mathbf{c}} : \vec{\nabla} \vec{u} \quad (2.28)$$

$$\Delta \phi_1^E(\vec{u}) = -4\pi G \vec{\nabla} \cdot (\rho_o \vec{u}) \quad (2.29)$$

L'équation 2.29 est aussi nommée équation de la redistribution des masses, elle caractérise la perturbation de potentiel de gravité engendrée par les déformations internes. Mais le problème est dégénéré si on n'ajoute pas de conditions aux limites.

### Conditions aux limites

On peut montrer (voir B.2.2) que dans le cas de précontraintes hydrostatiques, le tenseur de Piola-Kirchhoff peut être remplacé dans les conditions de continuités par le tenseur de Cauchy lagrangien. Connaissant et soustrayant les relations de continuité du modèle de référence, les conditions aux limites cinématiques et dynamiques sont :

<sup>7</sup>L'équation appliquée en tout point de  $\Omega^t$  est équivalente à être appliquée en tout point de  $\Omega$ , voir annexe B.1

– Condition de surface sur  $\partial\Omega$  ( $p_a$  la pression externe en surface) :

$$\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L = -p_a \vec{n} \quad (2.30)$$

– Aux interfaces solide-solide  $\Sigma_{SS}$  :

$$[\vec{u}]_{-}^{+} = 0 \quad (2.31)$$

$$[\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L]_{-}^{+} = 0 \quad (2.32)$$

– Aux interfaces solide-fluide  $\Sigma_{SF}$  :

$$[\vec{n} \cdot \vec{u}]_{-}^{+} = 0 \quad (2.33)$$

$$[\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L]_{-}^{+} = 0 \quad (2.34)$$

Il peut exister des pressions internes aux interfaces, par exemple à la CMB ("Core Mantle Boundary"), mais nous n'aurons pas besoin de les considérer dans le cadre de ce travail. Pour le potentiel et la gravité les conditions sont un peu plus compliquées. Les conditions sont les mêmes que dans le paragraphe 2.1.3 sur les interfaces  $\Sigma_{\rho}^t$  déformée au temps  $t$  :

$$[\phi_1^E(\vec{r}, t)]_{-}^{+} = 0 \quad (2.35)$$

$$[\vec{n}^t \cdot \vec{\nabla} \phi_1^E(\vec{r}, t)]_{-}^{+} = 0 \quad (2.36)$$

On peut montrer, qu'au premier ordre, sur les interfaces de référence  $\Sigma_{\rho}$ , cela revient à :

$$[\phi_1^E(\vec{x}, t)]_{-}^{+} = 0 \quad (2.37)$$

$$[\vec{n} \cdot \vec{\xi}(\vec{x}, t)]_{-}^{+} = 0 \quad (2.38)$$

avec le paramètre  $\vec{\xi} = \vec{\nabla} \phi_1^E + 4\pi G \rho \vec{u}$  (Dahlen & Tromp, 1998; Love, 1911).

### La conservation du centre de masse

Le système d'équations s'applique à une planète dont le centre de masse est fixe et confondu avec le centre du repère eulérien géocentrique. Cette condition de conservation du centre de masse impose quelques restrictions sur les solutions du système de la gravito-élasticité. Certains déplacements notamment ne sont pas admissibles.

Si le centre de masse de la planète est confondu avec le centre du repère, la condition de conservation de la position du centre de masse à chaque instant  $t \geq 0$  est (Greff-Lefftz & Legros, 1997) :

$$\int_{\Omega^t} \rho^E(\vec{r}, t) \vec{r} dV^t = 0 \quad (2.39)$$

Cette relation en utilisant la théorie des perturbations est équivalente à :

$$\int_{\Omega} \rho_o \vec{u}(\vec{x}, t) dV = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (2.40)$$

On peut montrer, comme le stipule le théorème de Mac Cullagh (Munk & MacDonald, 1960), que le déplacement et le potentiel ne peuvent pas présenter de degré 1 dans leurs spectres d'harmoniques sphériques car sinon la planète subirait une translation rigide (voir annexe B.4 pour plus de détails). Dans le cas des forces de marée, cela se traduit par le fait que le potentiel de marée ne peut présenter de coefficient de degré 1.

Pour le cas des surcharges de surface, la condition de conservation du centre de masse est différente car une partie de la masse du système se situe dans la couche superficielle forçante (de masse volumique équivalente  $\sigma_a$ ). À  $t = 0$ , cette masse n'intervient pas dans le système ce qui change la condition de conservation du centre de masse :

$$\int_{\Omega} \rho_o \vec{u} \, dV = - \int_{\partial\Omega} \sigma_a \vec{x} \, dS \quad (2.41)$$

On peut montrer que des sollicitations de degré 1 sont alors possibles tant que la somme des forces globales qui agissent sur la planète est nulle. Dans le cas des surcharges, les déformations dues aux pressions de surface et les déformations engendrées par l'attraction de la masse de la couche superficielle se compensent au centre de la planète même pour le degré 1. Cependant le système de la gravito-élasticité dans le cas d'une surcharge de degré 1 est dégénéré (Farrell, 1972) et une nouvelle condition aux limites sur le potentiel s'impose. Notons  $\phi_{lm}$  les coefficients de degré  $l$  et d'ordre  $m$  du développement en harmoniques sphériques du potentiel  $\phi_1^E$  et  $V_{lm}$  ceux du potentiel externe de surcharge. Alors la nouvelle condition aux limites en surface pour le degré 1 s'écrit (voir l'annexe B.4) :

$$\begin{cases} \phi_{1,-1} &= -V_{1,-1} \\ \phi_{10} &= -V_{10} \\ \phi_{11} &= -V_{11} \end{cases} \quad \text{en } r = a, \forall t > 0 \quad (2.42)$$

### 2.3.3 Formulation variationnelle du système

L'équation globale que nous avons à résoudre  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{A} \vec{u} = \frac{1}{\rho} \vec{f}$  est une équation aux dérivées partielles linéaires d'ordre 2 en temps, une équation d'onde. Nous avons donc à résoudre un problème d'évolution classique à l'ordre 2. La faisabilité de cette opération dépendra principalement des caractéristiques et des propriétés de  $\mathbf{A}$  qui, dans le cas de la gravito-élasticité, sont bien connues (Valette, 1986, 1987).

Dans cette partie, nous présentons cette équation sous sa forme faible (dite aussi formulation variationnelle). Les formulations variationnelles permettent une démonstration plus aisée de l'existence et de l'unicité des solutions du problème. Elles sont en outre indispensables à l'approximation numérique que nous présenterons au chapitre 3.

À tout opérateur  $\mathbf{A}$  défini sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  nous pouvons associer une forme bilinéaire  $a$  (une application bilinéaire qui à deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  définis sur un espace vectoriel  $E$ , renvoie un scalaire de  $\mathbb{R}$ ).

$$E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \quad (2.43)$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto a(\vec{u}, \vec{v}) = (\mathbf{A} \vec{u}, \vec{v}) \quad (2.44)$$

$E$  étant muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  de norme associée  $\|\cdot\|$ .  $\vec{v}$  ici ne correspond pas à la vitesse, c'est une variable physique qui présente les mêmes caractéristiques générales que  $\vec{u}$  (on la nommera aussi fonction test déplacement).

Le problème d'évolution associé à la formulation variationnelle de l'équation 2.26 prendra la forme :

$$\frac{d^2}{dt^2} (\vec{u}(t), \vec{v}) + a(\vec{u}(t), \vec{v}) = (\vec{f}(t), \vec{v}) \quad (2.45)$$

Il consistera à déterminer  $\vec{u} \in E$  solution du système pour tout  $\vec{v} \in E$ .

La construction d'une formulation variationnelle demande quelques attentions. S'il est souvent facile de montrer qu'une solution de l'équation de départ, comprise dans  $E$ , est aussi solution de la forme faible, la réciproque n'est pas toujours évidente. L'espace des solutions possibles de la forme faible est plus étendu par définition que celui de la "formulation forte" de l'équation. La forme faible impose notamment souvent à la fonction inconnue d'être dérivable à un ordre inférieur que ne le demande l'équation de départ. Pour que la solution soit unique et corresponde à celle de l'équation à résoudre, il faudra que la forme bilinéaire  $a$  présente quelques propriétés. On peut montrer que si  $a$  est continue, coercive<sup>8</sup> et symétrique<sup>9</sup> sur  $E \times E$ , alors le problème variationnel ci-dessus présente une solution unique  $\vec{u} \in E, \forall \vec{v} \in E$  (Lax & Milgram, 1954, voir par exemple Raviart & Thomas, 1998).

Nous présentons dans cette partie l'expression de la formulation variationnelle de la gravito-élasticité pour une Terre solide uniquement, et quelques mots sur son principe de construction. Il nous faudra pour cela définir deux formes bilinéaires intermédiaires, une pour la partie élastique de l'opérateur et une autre pour le laplacien de l'équation de Poisson. Nous négligeons ici la partie fluide pour alléger l'écriture du problème, et parce que, nous l'avons précisé plus haut, nous n'aurons pas besoin de cette partie dans la suite de ce travail.

L'idée ici n'est pas de redéfinir les propriétés de l'opérateur de la gravito-élasticité et la validité de la formulation variationnelle qui l'accompagne. Les conditions de coercivité de la forme bilinéaire globale (dans l'espace de Sobolev<sup>10</sup>  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ ) et l'unicité du problème qui nous intéresse furent établies par Valette (1987). Nous nous contenterons ici de mettre en évidence la symétrie de la forme bilinéaire globale et de donner quelques précisions sur les espaces  $E$  pour lesquelles les formulations variationnelles sont adaptées.

Le principe de construction des formes faibles est classiquement de multiplier les équations de départ par des fonctions tests et de les intégrer sur tout le volume de travail. En plus d'être dérivables, nous demandons donc à nos inconnues d'être intégrables<sup>11</sup> sous différents aspects. Les espaces vectoriels de travail seront donc typiquement des espaces de distributions (Schwartz, 1965). Les deux espaces appropriés ici sont :

$$\mathcal{H} = \{ \vec{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega); [\vec{u}]_-^+ = 0 \text{ sur } \Sigma_{SS} \} \quad (2.46)$$

$$\mathcal{W} = \{ \phi \in W^1(\mathbb{R}^3); [\phi]_-^+ = 0 \text{ sur } \Sigma_\rho \} \quad (2.47)$$

$\mathcal{H}$  est l'espace des vecteurs  $\vec{u}$  appartenant à l'espace de Sobolev  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  tel que  $\vec{u}$  vérifie les conditions de continuités 2.31 sur le déplacement.  $\mathcal{W}$  est l'espace des fonctions  $\phi$  appartenant à l'espace de Beppo-Levi  $W^1(\mathbb{R}^3)$  tel que  $\phi$  vérifie les conditions de continuités 2.37 sur le potentiel de gravité. Les espaces  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  et  $W^1(\mathbb{R}^3)$  sont définis en annexe B.5, ils caractérisent les propriétés d'intégrations et de dérivations des fonctions. Les conditions pour que  $\vec{u}$  et  $\phi$  obéissent aux formulations faibles se réduisent simplement à des conditions de dérivations et

<sup>8</sup>Une forme bilinéaire coercive est définie :  $\exists \alpha > 0$  tel que  $\forall \vec{v} \in E, a(\vec{v}, \vec{v}) \geq \alpha \|\vec{v}\|^2$

<sup>9</sup> $a(\vec{u}, \vec{v}) = a(\vec{v}, \vec{u})$

<sup>10</sup>voir l'annexe B.5 pour la définition des espaces vectoriels

<sup>11</sup>d'intégrales finies sur le volume de travail

à une condition de continuité, toutes les autres conditions aux limites classiques de la gravito-élasticité seront implicitement imposées dans les formulations variationnelles elles-mêmes.

### L'équation du mouvement dans le solide

On suppose ici que tous les termes de l'équation 2.26 sont des fonctions de carrés intégrables sur  $\Omega$  (des fonctions de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ ), on peut alors multiplier l'équation 2.26 par une fonction test  $\vec{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  et intégrer sur  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{u} \cdot \vec{v} \, dV + \int_{\Omega} \mathbf{A} \vec{u} \cdot \vec{v} \, dV = \int_{\Omega} \vec{f}^E \cdot \vec{v} \, dV \quad (2.48)$$

Après quelques manipulations, on peut montrer (Valette, 1987; Chaljub, 2000) que dans un solide élastique aux précontraintes hydrostatiques :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{A} \vec{u} \cdot \vec{v} \, dV &= \int_{\Omega} \vec{\nabla} \vec{u} : \bar{\mathbf{c}} : \vec{\nabla} \vec{v} \, dV \\ &+ \int_{\Omega} \rho \, \text{Sym} \{ (\vec{v} \cdot \vec{g}) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{g}) \} \, dV \\ &+ \int_{\Omega} \rho \vec{\nabla} \phi_1^E \cdot \vec{v} \, dV \end{aligned} \quad (2.49)$$

avec  $\text{Sym}\{f(u, v)\} = \frac{1}{2} (f(u, v) + f(v, u))$ .

Pour obtenir cette expression, on a utilisé entre autres la formule de Green (voir l'annexe B.6) sur le terme relatif aux contraintes. Si  $\vec{v} \in \mathcal{H}$  (notamment si  $\vec{v}$  est bien continue à travers  $\Sigma_{SS}$ ), la formule de Green fait apparaître des intégrales de surface qui, connaissant les relations de continuité 2.30 et 2.32, sont nulles (exemple ici où  $p_a = 0$ ) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L) \cdot \vec{v} \, dV &= - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{T}}_1^L : \vec{\nabla} \vec{v} \, dV + \int_{\partial\Omega} (\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L) \cdot \vec{v} \, dS - \int_{\Sigma_{SS}} [\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L]_+^+ \cdot \vec{v} \, dS \\ &= - \int_{\Omega} \vec{\nabla} \vec{u} : \bar{\mathbf{c}} : \vec{\nabla} \vec{v} \, dV \end{aligned} \quad (2.50)$$

Les conditions de continuités en tractions sont implicitement prises en compte dans la formulation, cela à condition que  $\vec{v}$  soit bien continu sur les interfaces (voir annexe B.6).

On note  $(\vec{u}, \vec{v})_{dm} = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} \, dm$  le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$  associé à la mesure  $dm$  (la mesure de masse  $dm = \rho_o dV$ ). La formulation faible de l'équation du mouvement peut se réécrire formellement :

$$(\ddot{\vec{u}}, \vec{v})_{dm} + a(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{\nabla} \phi, \vec{v})_{dm} = (\vec{f}^E, \vec{v})_{dV} \quad (2.51)$$

$a(\vec{u}, \vec{v})$  est une forme bilinéaire symétrique de  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  dans  $\mathbb{R}$ .

### Équation de la redistribution des masses

Calculer les variations de gravité de la planète revient à résoudre sur tout l'espace le système : (on note  $\phi = \phi_1^E$ )

$$\begin{cases} \Delta \phi(\vec{u}) = -4\pi G \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) & \text{sur } \Omega \\ \Delta \phi(\vec{u}) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \end{cases} \quad (2.52)$$

connaissant les conditions de continuités 2.37 et 2.38.

Multipliant l'équation par une fonction test  $\psi \in \mathcal{W}$ , intégrant sur tout l'espace et appliquant la formule de Green, le système d'équations ci-dessus est équivalent à la formulation variationnelle suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi \, dV - \int_{\partial\Omega \cup \Sigma_\rho} \vec{n} \cdot \left[ \vec{\nabla} \phi + 4\pi G \rho_o \vec{u} \right]_{-}^{+} \psi \, dS = -4\pi G \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \psi \, dV \quad (2.53)$$

C'est à dire, connaissant la condition de continuité 2.38 sur  $\partial\Omega \cup \Sigma_\rho$  :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi \, dV = -4\pi G \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \psi \, dV \quad (2.54)$$

La formulation revient donc encore à :

$$b(\phi, \psi) = -4\pi G (\vec{u}, \vec{\nabla} \psi)_{dm} \quad (2.55)$$

On peut montrer que  $b$  est une forme bilinéaire symétrique coercive, continue de  $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour un  $\vec{u} \in L^2(\Omega)$  donné, la forme faible ci-dessus présente donc une solution unique  $\phi \in \mathcal{W}$ ,  $\forall \psi \in \mathcal{W}$ .

### Le système variationnel global et la symétrie du problème

Les deux équations sous formes faibles sont :

$$(\ddot{\vec{u}}, \vec{v})_{dm} + a(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{\nabla} \phi, \vec{v})_{dm} = (\vec{f}^E, \vec{v})_{dV} \quad (2.56)$$

$$b(\phi, \psi) + 4\pi G (\vec{u}, \vec{\nabla} \psi)_{dm} = 0 \quad (2.57)$$

Grace à la formulation variationnelle de l'équation de redistribution des masses 2.57, on peut associer à tout vecteur déplacement  $\vec{u} \in \mathcal{H}$ , un potentiel de gravité  $\phi(\vec{u}) \in \mathcal{W}$ . À  $\vec{v}$  on associe donc un potentiel  $\phi(\vec{v})$ , et on a la relation :

$$(\vec{v}, \vec{\nabla} \phi(\vec{u}))_{dm} = -\frac{1}{4\pi G} b(\phi(\vec{u}), \phi(\vec{v})) \quad (2.58)$$

La formulation variationnelle de l'équation du mouvement 2.56 peut donc aussi s'écrire :

$$(\ddot{\vec{u}}, \vec{v})_{dm} + a(\vec{u}, \vec{v}) - \frac{1}{4\pi G} b(\phi(\vec{u}), \phi(\vec{v})) = (\vec{f}^E, \vec{v})_{dV} \quad (2.59)$$

Ce qui revient au problème formel :

$$(\ddot{\vec{u}}, \vec{v})_{dm} + \tilde{a}(\vec{u}, \vec{v}) = l_1(\vec{v}) \quad (2.60)$$

$a$  et  $b$  étant symétriques, la forme bilinéaire  $\tilde{a}$  l'est donc aussi.

### Conclusion

Nous disposons d'une formulation variationnelle équivalente au système d'équations aux dérivées partielles (équations 2.26 et 2.29) bien adaptée à la résolution numérique en éléments finis.

## 2.4 Perturbation au premier ordre de la gravito-élasticité

Nous allons maintenant développer le système d'équations à un ordre supérieur en ajoutant les variations latérales de densité et de paramètres rhéologiques jusqu'ici négligées dans la planète. L'état de précontrainte ne peut plus en conséquence être simplement hydrostatique, et la forme globale de la planète est légèrement asphérique.

Le système est développé par perturbations au deuxième ordre de l'état de référence 0. Comme le montre l'exemple du paragraphe 2.2.2, les équations seront les mêmes qu'à l'ordre 1, mais avec un second membre comportant plus de termes (de même pour les conditions de continuités).

### 2.4.1 Perturbation du système de référence (État 0')

#### Notations

La planète avec variations latérales comporte toujours des zones solides et des zones fluides continues par morceaux en densité et en paramètres rhéologiques. Elle comporte aussi des interfaces de discontinuités séparant toutes les portions où les paramètres sont continus.

Nous noterons  $\Omega'$ , l'ensemble<sup>(12)</sup> de  $\mathbb{R}^3$  représentant la planète dans le nouvel état de référence,  $\partial\Omega'$  sa frontière.  $\Omega'_S$ ,  $\Omega'_F$ ,  $\Sigma'_{SS}$ ,  $\Sigma'_{SF}$  et  $\Sigma'_\rho$  sont les mêmes ensembles que ceux définis dans l'état 0 mais ici dans le nouvel état de référence (voir la figure 2.6). À nouveau nous avons  $\Sigma' = \Sigma'_{SF} \cup \Sigma'_{SS} \cup \Sigma'_\rho$ , sachant que la majorité des interfaces de  $\Sigma'_\rho$  sont dans  $\Sigma'_{SF}$  ou dans  $\Sigma'_{SS}$ .

Les interfaces de continuités ne sont plus sphériques, elles présentent une topographie  $\delta d$ , la verticale étant orientée selon le vecteur unitaire sortant  $\vec{n}$  ( $\vec{e}_r$  dans notre cas).

#### Le système

Les variations latérales de densité et de paramètres rhéologiques, la non hydrostaticité des précontraintes et les topographies aux interfaces sont introduites dans notre nouvelle planète de référence. L'écart entre ce modèle et celui de départ sphérique est petit devant les grandeurs du problème. On peut définir les variations des paramètres intrinsèques de la planète comme des perturbations d'ordre 1. Les variables intrinsèques du nouvel état de référence sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \text{les précontraintes} \quad \bar{\mathbf{T}}_o + \delta\bar{\mathbf{T}}_o &= -(p_o + \delta p_o)\bar{\mathbf{I}} + \delta\bar{\mathcal{T}}_o \\ \text{la gravité} \quad \vec{g}_o + \delta\vec{g}_o &= -\vec{\nabla}\phi_o - \vec{\nabla}\delta\phi_o \\ \text{la masse volumique} \quad \rho_o + \delta\rho_o & \end{aligned}$$

et  $\delta\bar{\mathcal{T}}_o$  est le tenseur déviatorique

Prenant en compte les relations 2.18 et 2.19, le système vérifie les équations d'équilibre d'ordre 1 :

$$\vec{\nabla}\delta p_o - \vec{\nabla} \cdot \delta\bar{\mathcal{T}}_o = \rho_o\delta\vec{g}_o + \delta\rho_o\vec{g}_o \quad (2.61)$$

$$\Delta\delta\phi_o = -4\pi G\delta\rho_o \quad (2.62)$$

<sup>12</sup>ensemble ouvert, borné et connexe de  $\mathbb{R}^3$

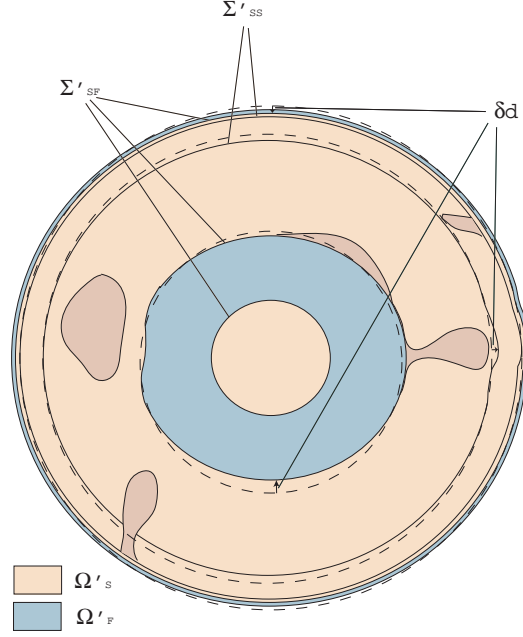


FIG. 2.6: Représentation schématique du milieu de référence perturbé. Le nombre de couches a été réduit ici par rapport à la figure 2.5 pour faciliter la lisibilité du schéma.

La planète comporte des variations latérales qui sont issues de sa dynamique interne. Le tenseur des contraintes ci-dessus n'est donc pas un tenseur élastique car la dynamique interne est principalement visqueuse. Le système d'équations devra avoir été résolu au préalable. Les informations nécessaires à la confection de ce modèle de référence perturbé pourront être issues de différentes sources géophysiques : la tomographie sismique par exemple ou encore les modèles de convection interne.

### Conditions aux limites

Le calcul est ici défini au premier ordre de perturbation, les conditions de continuités sont donc similaires à celle de l'état 1 :

$$\vec{n} \cdot \delta \vec{\mathbf{T}}_o = 0 \quad \text{En surface} \quad (2.63)$$

$$[\vec{n} \cdot \delta \vec{\mathbf{T}}_o]_{\pm}^+ = 0 \quad \text{Sur les interfaces } \Sigma_{SS} \cup \Sigma_{SF} \quad (2.64)$$

$$[\delta \phi_o]_{\pm}^+ = 0 \quad \text{Sur les interfaces } \Sigma_{\rho} \quad (2.65)$$

$$[\partial_n \delta \phi_o + 4\pi G \rho_o \delta d]_{\pm}^+ = 0 \quad \text{Sur les interfaces } \Sigma_{\rho} \quad (2.66)$$



### 2.4.2 Perturbation de la gravito-élasticité (État 1')

Appliquant la force externe sur ce nouvel état de référence, les variables de la gravito-élasticité sont à nouveau perturbées d'un ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1^E \rightarrow \rho_1^E + \delta\rho_1^E \\ \vec{u} \rightarrow \vec{u} + \delta\vec{u} \\ \bar{\mathbf{T}}_1^L \rightarrow \bar{\mathbf{T}}_1^L + \delta\bar{\mathbf{T}}_1^L \\ \phi_1^E \rightarrow \phi_1^E + \delta\phi_1^E \\ \vec{\xi} \rightarrow \vec{\xi} + \delta\vec{\xi} \\ \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \delta\mathbf{A} \\ \bar{\mathbf{c}} \rightarrow \bar{\mathbf{c}} + \delta\bar{\mathbf{c}} \end{array} \right.$$

L'équation du mouvement s'exprime en tout point de  $\Omega'$  :

$$\begin{aligned} (\rho_o + \delta\rho_o) \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{u} + \delta\vec{u}) - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\mathbf{T}}_1^E + \delta\bar{\mathbf{T}}_1^E) + (\rho_o + \delta\rho_o) \vec{\nabla} (\phi_1^E + \delta\phi_1^E) \\ + (\rho_1^E + \delta\rho_1^E) \vec{\nabla} (\phi_o + \delta\phi_o) = \vec{f}^E + \delta\vec{f}^E \end{aligned} \quad (2.67)$$

L'équation de Poisson en tout point de  $\Omega'$  :

$$\Delta(\phi_1^E + \delta\phi_1^E) = 4\pi G(\rho_1^E + \delta\rho_1^E) \quad (2.68)$$

Compte tenu des relations 2.26 et 2.29, en suivant le même type de raisonnement que pour la gravito-élasticité classique, le système précédent est équivalent au premier ordre (au deuxième globalement) en tout point de  $\Omega$  et pour tout  $t$ , à :

$$\rho_o \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \delta\bar{\mathbf{T}}_1^L - \vec{\nabla} (\rho_o \delta\vec{u} \cdot \vec{g}_o) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_o \delta\vec{u}) \vec{g}_o + \rho_o \vec{\nabla} \delta\phi_1^E = \vec{f}_1 \quad (2.69)$$

$$\Delta \delta\phi_1^E + 4\pi G \vec{\nabla} \cdot (\rho_o \delta\vec{u}) = f_2 \quad (2.70)$$

avec comme seconds membres :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{f}_1 = \delta\vec{f}^E - \delta\rho_o \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{u} + \vec{\nabla} (\vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \delta\bar{\mathbf{T}}_o) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \delta\bar{\mathbf{T}}_o) \\ \quad - \vec{\nabla} (\delta\rho_o \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi_o) + \vec{\nabla} \cdot (\delta\rho_o \vec{u}) \vec{\nabla} \phi_o \\ \quad - \vec{\nabla} (\rho_o \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \delta\phi_o) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_o \vec{u}) \vec{\nabla} \delta\phi_o \\ \quad - \delta\rho_o \vec{\nabla} \phi_1^E(\vec{u}) \\ f_2 = -4\pi G \vec{\nabla} \cdot (\delta\rho_o \vec{u}) \end{array} \right. \quad (2.71)$$

$\delta\bar{\mathbf{T}}_1^L$  est le tenseur de Cauchy lagrangien perturbé, on le reliera aux déplacements connaissant le tenseur élastique perturbé  $\delta\bar{\mathbf{c}}$ . Au premier ordre :  $\delta\bar{\mathbf{T}}_1^L = \bar{\mathbf{c}} : \vec{\nabla} \delta\vec{u} + \delta\bar{\mathbf{c}} : \vec{\nabla} \vec{u}$

On voit que le système à résoudre est sensiblement le même que celui non perturbé en dehors des seconds membres.

En utilisant les notations avec opérateur, le problème revient à :

Trouver  $\delta\vec{u}$  en tout point  $\vec{x} \in \Omega$  et tout  $t \in [0, T]$  solution de l'équation

$$\rho_o \frac{\partial^2 \delta\vec{u}}{\partial t^2} + \mathbf{A} \delta\vec{u} = \vec{f}_3 \quad (2.72)$$

avec  $\mathbf{A}$  l'opérateur défini :

$$\mathbf{A} \delta\vec{u} = -\vec{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L(\delta\vec{u}) - \vec{\nabla}(\rho_o \delta\vec{u} \cdot \vec{g}_o) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_o \delta\vec{u}) \vec{g}_o + \rho_o \vec{\nabla} \phi_1^E(\delta\vec{u}) \quad (2.73)$$

et sachant que  $\bar{\mathbf{T}}_1^L$  et  $\phi_1^E$  obéissent aux relations :

$$\bar{\mathbf{T}}_1^L(\delta\vec{u}) = \bar{\mathbf{c}} : \vec{\nabla} \delta\vec{u} \quad (2.74)$$

$$\Delta \phi_1^E(\delta\vec{u}) = -4\pi G \vec{\nabla} \cdot (\rho_o \delta\vec{u}) \quad (2.75)$$

et le second membre

$$\begin{aligned} \vec{f}_3 = & \delta \vec{f}^E - \delta \rho_o \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}(\vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \delta \bar{\mathbf{T}}_o) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \delta \bar{\mathbf{T}}_o)) \\ & - \vec{\nabla}(\delta \rho_o \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi_o) + \vec{\nabla} \cdot (\delta \rho_o \vec{u}) \vec{\nabla} \phi_o \\ & - \vec{\nabla}(\rho_o \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \delta \phi_o) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_o \vec{u}) \vec{\nabla} \delta \phi_o \\ & - \delta \rho_o \vec{\nabla} \phi_1^E(\vec{u}) - \rho_o \vec{\nabla} \delta \tilde{\phi} - \delta \bar{\mathbf{c}} : \vec{\nabla} \vec{u} \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\Delta \delta \tilde{\phi} = -4\pi G \vec{\nabla} \cdot (\delta \rho_o \vec{u}) \quad (2.77)$$

dans cette notation on distingue deux termes dans  $\delta \phi_1^E = \phi_1^E(\delta\vec{u}) + \delta \tilde{\phi}$

Dans la pratique, on s'intéressera plutôt aux équations 2.69 et 2.70 plutôt qu'à la notation avec opérateur car les conditions aux limites se rapportent entre autres à  $\delta \bar{\mathbf{T}}_1^L$  et  $\delta \phi_1^E$  qui ne sont plus exprimées dans l'équation 2.72. Les solutions de l'état 0, de l'état 0' et de l'état 1 ont été déterminées au préalable, les second membres sont donc connus.

### Conditions aux limites

En dehors des conditions dynamiques, les conditions de continuités sont globalement les mêmes, mais appliquées aux interfaces de  $\Sigma'$ . L'intérêt de la théorie des perturbations est d'effectuer tous les calculs sur le milieu de référence de départ, nous allons donc projeter les conditions de continuités sur les interfaces de  $\Sigma$ . Le coeur du système à résoudre sera ainsi exactement le même que dans l'état 1. Cependant si les variables concernées sont continues sur  $\Sigma'$ , elle apparaîtront discontinues sur les  $\Sigma$  et sur  $\partial\Omega$ . On notera :

– Sur  $\partial\Omega$ , la condition de surface :

$$\vec{n} \cdot \delta \bar{\mathbf{T}}_1^L = \vec{B}_{\partial\Omega} \quad (2.78)$$

– sur  $\Sigma_{SS}$  :

$$[\delta\vec{u}]_{\pm}^+ = \vec{B}_u \quad (2.79)$$

$$[\vec{n} \cdot \delta \bar{\mathbf{T}}_1^L]_{\pm}^+ = \vec{B}_T \quad (2.80)$$

– Conditions de gravité sur les  $\Sigma_\rho$  :

$$[\delta\phi_1^E]_-^+ = B_\phi \quad (2.81)$$

$$[\vec{n} \cdot \delta\vec{\xi}]_-^+ = B_\xi \quad (2.82)$$

Le détail du calcul des  $B_q$  est présenté en annexe (voir les annexes B.3), nous nous contenterons ici de leurs expressions finales :

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\partial\Omega} &= -\delta p_a \vec{n} + p_a \vec{\nabla}^\Sigma \delta d - \delta d \partial_n (\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L) + \vec{\nabla}^\Sigma \delta d \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L + (\delta \bar{\mathbf{T}}_o + \delta d \partial_n \bar{\mathbf{T}}_o) \cdot \vec{\nabla}^\Sigma \vec{u} \cdot \vec{n} \\ \vec{B}_u &= -\delta d [\partial_n \vec{u}]_-^+ \\ \vec{B}_{\mathbf{T}} &= -\delta d [\partial_n (\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L)]_-^+ + \vec{\nabla}^\Sigma \delta d \cdot [\bar{\mathbf{T}}_1^L]_-^+ + [\delta \bar{\mathbf{T}}_o + \delta d \partial_n \bar{\mathbf{T}}_o]_-^+ \cdot \vec{\nabla}^\Sigma \vec{u} \cdot \vec{n} \\ B_\phi &= -\delta d [\partial_n \phi_1^E]_-^+ \\ B_\xi &= -\delta d [\partial_n \xi_n]_-^+ + \vec{\nabla}^\Sigma \delta d \cdot [\vec{\xi}]_-^+ \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\text{avec } \vec{\xi} = \vec{\nabla} \phi_1^E + 4\pi G \rho_o \vec{u} \quad (2.84)$$

$$\text{et } \delta \vec{\xi} = \vec{\nabla} \delta \phi_1^E + 4\pi G (\rho_o \delta \vec{u} + \delta \rho_o \vec{u}) \quad (2.85)$$

À l'image des seconds membres des équations 2.69 et 2.70, les  $B_q$  ne dépendent que des solutions des états 0, 0' et 1, ils sont donc connus.

La complexité des conditions dynamiques et de la condition de surface libre, tient au fait que le tenseur de Cauchy lagrangien n'est pas le plus naturel à employer ici. Dans le cas général où l'état de précontraintes n'est pas hydrostatique, la continuité des tractions se rapporte au tenseur de Piola-Kirchhoff. Nous avons utilisé ici les relations qui unissent  $\delta \bar{\mathbf{T}}_1^{PK}$  à  $\delta \bar{\mathbf{T}}_1^L$  pour reporter les conditions au tenseur de Cauchy (voir les annexes B.3).

### 2.4.3 Formulation variationnelle du système

À l'image de la section 2.3.3, nous allons définir la formulation variationnelle de ce nouveau système d'équation à l'ordre 2. Les formes faibles seront presque les mêmes que celles de la gravito-élasticité non perturbée, encore une fois seuls les seconds membres des formulations seront différents.

Les espaces de travail appropriés à notre étude sont ici toujours  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{W}$ . Cependant, il nous faudra opérer un changement de variable pour que les formulations appliquées à  $\delta \vec{u}$  et  $\delta \phi_1^E$  aient les mêmes propriétés que celles appliquées à  $\vec{u}$  et  $\phi_1^E$ .

#### Changement de variable

Les formulations variationnelles sont valables sur les espaces  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{W}$ . Or ces deux espaces s'attachent à des fonctions continues sur  $\Sigma$ , ce qui n'est plus le cas ici. Les deux variables perturbées  $\delta \vec{u}$  et  $\delta \phi_1^E$  étant continues à travers  $\Sigma'$ , elles n'apparaissent plus continues à travers les interfaces de  $\Sigma$  (relations 2.79 et 2.81).

On définit  $\delta \vec{\omega} = \delta \vec{u} + \delta d \partial_n \vec{u}$  et  $\delta \Phi = \delta \phi_1^E + \delta d \partial_n \phi_1^E$  en tout point de  $\Omega$  (ici  $\delta d$  ne désigne plus seulement la topographie mais aussi le déplacement radial entre deux interfaces de l'état

0'). Ces nouvelles variables vérifient les conditions de continuités aux interfaces :

$$[\delta\vec{\omega}]_-^+ = 0 \text{ sur } \Sigma_{SS} \text{ et } [\delta\Phi]_-^+ = 0 \text{ sur } \Sigma_\rho.$$

Nous développerons les formes faibles d'abord pour  $\delta\vec{u}$  et pour  $\delta\phi_1^E$ , puis nous appliquerons les changement de variables.

### Équation du mouvement perturbée

On multiplie l'équation 2.69 par une fonction test  $\vec{v} \in \mathcal{H}$  puis on intègre sur tout le volume de travail  $\Omega$ . Si on applique la relation de Green sur le terme relatif aux contraintes, et si l'on tient compte des relations de continuités 2.78 et 2.80, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \delta\bar{\mathbf{T}}_1^L) \cdot \vec{v} \, dV &= - \int_{\Omega} \delta\bar{\mathbf{T}}_1^L : \vec{\nabla}\vec{v} \, dV + \int_{\partial\Omega} (\vec{n} \cdot \delta\bar{\mathbf{T}}_1^L) \cdot \vec{v} \, dS - \int_{\Sigma} [\vec{n} \cdot \delta\bar{\mathbf{T}}_1^L] \cdot \vec{v} \, dS \\ &= - \int_{\Omega} \vec{\nabla}\delta\vec{u} : \bar{\mathbf{c}} : \vec{\nabla}\vec{v} \, dV - \int_{\Omega} \vec{\nabla}\vec{u} : \bar{\delta}\mathbf{c} : \vec{\nabla}\vec{v} \, dV \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \vec{B}_{\partial\Omega} \cdot \vec{v} \, dS - \int_{\Sigma} \vec{B}_{\mathbf{T}} \cdot \vec{v} \, dS \end{aligned} \quad (2.86)$$

(le tenseur de Cauchy lagrangien perturbé étant égal à  $\delta\bar{\mathbf{T}}_1^L = \bar{\mathbf{c}} : \vec{\nabla}\delta\vec{u} + \bar{\delta}\mathbf{c} : \vec{\nabla}\vec{u}$ )

En développant le système, la forme faible de l'équation du mouvement perturbée peut s'écrire simplement :

$$(\delta\ddot{\vec{u}}, \vec{v})_{dm} + a(\delta\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{\nabla}\delta\phi_1^E, \vec{v})_{dm} = h(\vec{v}) \quad (2.87)$$

$a$  étant la forme bilinéaire de la gravito-élasticité non perturbée, et  $h$  une forme linéaire de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathbb{R}$  définie :

$$h(\vec{v}) = - (\ddot{\vec{u}}, \vec{v})_{dm} + \int_{\Omega} \vec{\nabla}\vec{u} : \bar{\delta}\mathbf{c} : \vec{\nabla}\vec{v} \, dV - \int_{\Omega} \delta\vec{f}_1 \cdot \vec{v} \, dV - \int_{\partial\Omega} \vec{B}_{\partial\Omega} \cdot \vec{v} \, dS + \int_{\Sigma} \vec{B}_{\mathbf{T}} \cdot \vec{v} \, dS \quad (2.88)$$

Ce système variationnel est formellement le même que celui sans perturbation, seul le second membre est différent. Il nous faudra calculer précisément  $h(\vec{v})$  qui contient nettement plus de termes que précédemment.

Cependant  $\delta\vec{u}$  n'appartient pas à  $\mathcal{H}$  car  $\delta\vec{u}$  n'est pas continu à travers les interfaces  $\Sigma_{SS}$ . On opère donc le changement de variable évoqué ci-dessus, la forme faible devient :

$$(\delta\ddot{\vec{\omega}}, \vec{v})_{dm} + a(\delta\vec{\omega}, \vec{v}) + (\vec{\nabla}\delta\Phi, \vec{v})_{dm} = \tilde{h}(\vec{v}) \quad (2.89)$$

avec  $\tilde{h}(\vec{v}) = h(\vec{v}) + a(\delta d \partial_n \vec{u}, \vec{v}) + (\delta d \partial_n \ddot{\vec{u}}, \vec{v})_{dm} + (\vec{\nabla}(\delta d \partial_n \phi_1^E), \vec{v})_{dm}$

Le problème est ainsi bien posé. Pour tout  $\delta\Phi$ , il existe un unique  $\delta\vec{\omega} \in \mathcal{H}$ , tel que la relation 2.89 soit vérifiée pour tout  $\vec{v} \in \mathcal{H}$ .

### Redistribution des masses perturbée

On multiplie l'équation 2.70 par une fonction test  $\psi \in \mathcal{W}$  et on intègre sur tout le volume. En tenant compte des relations de continuité 2.82 et en appliquant la relation de Green, la forme faible de la redistribution des masses perturbée est :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \delta \phi_1^E \cdot \vec{\nabla} \psi \, dV = -4\pi G \int_{\Omega} (\rho \delta \vec{u} + \delta \rho_o \vec{u}) \cdot \vec{\nabla} \psi \, dV - \int_{\partial\Omega \cup \Sigma_\rho} B_\xi \psi \, dS \quad (2.90)$$

C'est à dire :

$$b(\delta \phi_1^E, \psi) + 4\pi G (\delta \vec{u}, \vec{\nabla} \psi)_{dm} = k(\psi) \quad (2.91)$$

avec  $k$  une forme linéaire de  $\mathcal{W}$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$k(\psi) = -4\pi G \int_{\Omega} \delta \rho_o \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \psi \, dV - \int_{\partial\Omega \cup \Sigma} B_\xi \psi \, dS \quad (2.92)$$

À l'image de la formulation variationnelle de l'équation perturbée du mouvement, cette formulation ci est quasiment identique à son homologue de la gravito-élasticité non perturbée. Cependant  $\delta \phi_1^E$  n'est pas continu sur les  $\Sigma_\rho$ , la fonction ne peut appartenir à  $\mathcal{W}$ .

On opère le changement de variable évoqué plus haut :

$$b(\delta \Phi, \psi) + 4\pi G (\delta \vec{\omega}, \vec{\nabla} \psi)_{dm} = \tilde{k}(\psi) \quad (2.93)$$

avec  $\tilde{k}$  une forme linéaire de  $\mathcal{W}$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\tilde{k}(\psi) = k(\psi) + b(\delta d \partial_n \phi_1^E, \psi) + 4\pi G (\delta d \partial_n \vec{u}, \vec{\nabla} \psi)_{dm} \quad (2.94)$$

Le problème ainsi exprimé est bien posé. Pour tout  $\delta \vec{\omega}$ , il existe un unique  $\delta \Phi \in \mathcal{W}$  tel que la relation 2.93 soit vérifiée pour tout  $\psi \in \mathcal{W}$ .

### Système variationnel global et symétrie du problème

Les deux formes faibles à résoudre sont :

$$(\delta \vec{\omega}, \vec{v})_{dm} + a(\delta \vec{\omega}, \vec{v}) + (\vec{\nabla} \delta \Phi, \vec{v})_{dm} = \tilde{h}(\vec{v}) \quad (2.95)$$

$$b(\delta \Phi, \psi) + 4\pi G (\delta \vec{\omega}, \vec{\nabla} \psi)_{dm} = \tilde{k}(\psi) \quad (2.96)$$

Définissons le potentiel perturbé associé au vecteur  $\vec{v}$  :  $\delta \Phi(\vec{v})$ . Si l'on "somme" alors les deux équations, le système global se simplifie :

$$(\delta \vec{\omega}, \vec{v})_{dm} + \tilde{a}(\delta \vec{\omega}, \vec{v}) = l_2(\vec{v}) \quad (2.97)$$

avec  $l_2(\vec{v}) = \tilde{h}(\vec{v}) + \tilde{k}(\delta \Phi(\vec{v}))$  et

$$\tilde{a}(\delta \vec{\omega}, \vec{v}) = a(\delta \vec{\omega}, \vec{v}) - \frac{1}{4\pi G} b(\delta \Phi(\delta \vec{\omega}), \delta \Phi(\vec{v})) + (\vec{\nabla} \delta \Phi(\delta \vec{\omega}), \vec{v})_{dm} + (\delta \vec{\omega}, \vec{\nabla} \delta \Phi(\vec{v}))_{dm} \quad (2.98)$$

Malgré la présence d'un second membre dans l'équation de redistribution des masses, on voit que la forme bilinéaire globale  $\tilde{a}$  est bien toujours symétrique.

### Conclusion

Nous disposons d'un ensemble d'équations bien adapté, comme nous le verrons, aux méthodes d'éléments finis. La formulation perturbée du système de la gravito-élasticité nous permet de considérer une Terre de configuration quelconque et non sphérique. Le cœur du système à résoudre est formellement le même que celui pour une Terre sphérique à symétrie radiale.



## Chapitre 3

# Résolution numérique

Dans le chapitre précédent, nous avons établi le système d'équations aux dérivées partielles qui décrit le comportement mécanique et gravitationnel d'une planète auto-gravitante. Ce système d'équations peut s'appliquer à tout type de planète tellurique quelle que soit sa forme et sa structure interne. Dans ce chapitre, nous allons décrire la méthode que nous avons choisie pour résoudre ce système d'équations, à savoir la méthode des "éléments spectraux".

Le problème de la gravito-élasticité est depuis plus d'un siècle classiquement résolu par méthodes modales. Les variables caractéristiques sont développées sur des bases d'harmoniques sphériques. Classiquement la méthode revient à résoudre un système différentiel appliqué à un ensemble de variable, les " $y_i$ ", qui ne dépendent que du rayon (Alterman et al., 1959). Nous préciserons cette approche dans le chapitre 4, lorsqu'il s'agira de valider notre méthode par comparaison avec les travaux antérieurs. Les méthodes modales ont l'avantage de déterminer une solution du problème définie à peu de chose près dans tout l'espace. Cependant la validité et l'efficacité de ce type d'approche dépendent fortement de la structure et de la configuration interne de la planète. La présence de variations latérales de densité et de paramètres élastiques dans un corps céleste génère des couplages entre les modes de déformations de ce corps. La prise en compte des variations latérales alourdit par conséquent considérablement le calcul lorsque l'on utilise ce type de méthode. Cela explique le peu d'études à ce jour qui les ont prises en considération dans la Terre (voir le chapitre 1).

La méthode que nous allons utiliser ici est numérique et n'est pas soumise à ces limitations. Comme toute méthode numérique elle s'associe à un maillage de la planète. Ce n'est pas la configuration des paramètres physiques internes qui joueront sur son efficacité, mais des aspects plus techniques comme la structure et la densité des points du maillage. La méthode est donc particulièrement bien adaptée à prendre en considération les aspects physiques jusqu'ici négligés dans les travaux antérieurs, à savoir les variations latérales, la topographie des interfaces et la non hydrostaticité de l'état de précontrainte. La méthode est de plus aisément parallélisable.

Le modèle que nous avons développé est une adaptation et une extension du modèle réalisé par Emmanuel Chaljub (2000) au cours de sa thèse pour les problèmes qui nous intéressent ici. Chaljub modélisa la propagation d'ondes sismiques en géométrie sphérique. Le modèle réalisé résout l'équation de l'élastodynamique en éléments spectraux sur un maillage spécifique nommé la "sphère cubique". Nous basant notamment sur les travaux théoriques récents de Chaljub & Valette (2004), nous avons introduit le couplage entre déformation et gravité. Ce couplage est négligeable pour des déformations de périodes inférieures à la seconde, or nous

nous intéressons dans ce travail à des déformations dont les périodes d'occurrences sont au delà de l'heure. Nous avons de plus modifié le coeur de la résolution numérique car à ces fréquences, la réaction inertielle de la planète est très faible. Chaljub (2000) résout l'équation en dynamique en utilisant un schéma aux différences finies explicite qui est instable à nos fréquences de travail. Nous avons dans un premier temps résolu le système en statique en négligeant le terme inertiel de l'équation du mouvement. Cependant nous présenterons aussi dans ce chapitre les approches envisageables pour prendre en compte le terme temporel.

Les grandes modifications apportées au modèle d'origine de Chaljub (2000) sont :

- Ajout de l'équation de redistribution des masses. La résolution numérique de cette équation est basée sur l'approche de Chaljub & Valette (2004), dans laquelle on modélise la contribution externe du potentiel de gravité par un opérateur "DtN".
- Résolution statique du système d'équation par une méthode de gradients conjugués couplés.
- Perturbation du système au premier ordre afin de prendre en compte les variations latérales, les précontraintes non hydrostatiques et la topographie induite dans la planète.

Le dernier point, comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, ne change pas le coeur de la méthode numérique, seulement les seconds membres des équations. L'implémentation n'en reste pas moins complexe car les seconds membres sont particulièrement importants et prennent en compte des termes d'interfaces qui n'étaient pas prévus initialement.

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord un rappel sur la méthode des éléments spectraux. Nous présenterons rapidement la grille sphérique de la "sphère cubique" et son principe de construction. Enfin, l'application de la méthode à notre problème est présentée ainsi que la technique d'inversion finale du système linéaire associé.

## 3.1 La méthode des éléments spectraux

### 3.1.1 L'approximation de Galerkin

Nous allons ici présenter rapidement le principe général des méthodes d'éléments finis, aussi appelées méthodes de Galerkin car elles se basent sur les principes de l'approximation de Galerkin.

Lorsque le problème à résoudre est continu, le point de départ de toute méthode numérique est de réduire l'ensemble de travail à un ensemble de points discret que l'on nomme maillage. Nous avons noté précédemment  $\Omega$  l'ensemble continu de  $\mathbb{R}^3$  représentant la planète que nous voulons modéliser. Nous noterons  $\vec{x}_n$  les  $N$  points formant l'ensemble  $\Omega_h \subset \Omega$  qui caractérise le maillage de la planète, c'est à dire la grille de points sur laquelle nous résoudrons le système d'équations.

Nous définirons sur ce maillage une représentation mathématique approchée des opérateurs de dérivation des équations. On pourra ainsi définir les formulations variationnelles approchées des équations de la gravito-élasticité appliquées sur l'ensemble  $\Omega_h$ .

À titre d'exemple supposons que la forme faible de l'équation que nous avons à résoudre soit simplement :

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = l(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{H} \quad (3.1)$$



et sa solution  $\vec{u} \in \mathcal{H}$ .

Le problème approché associé sera ici de trouver la solution approchée  $\vec{u}_h \in \mathcal{H}_h^1$  définie sur  $\Omega_h$  telle que,  $\forall \vec{v}_h \in \mathcal{H}_h$  :

$$a(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = l(\vec{v}_h) \tag{3.2}$$

$\mathcal{H}_h$  est l'espace de fonction approché de  $\mathcal{H}$ , qui est associé à  $\Omega_h$ . On peut montrer que déterminer  $\mathcal{H}_h$  revient à chercher un sous-ensemble de dimension finie de  $\mathcal{H}$ . La dimension de  $\mathcal{H}_h$  sera  $N$ , le nombre de points de  $\Omega_h$ . Le problème présentera alors une solution unique pour les mêmes conditions que le problème continu (voir par exemple Raviart & Thomas, 1998).

Soit  $\{\vec{\varphi}_i\}_{1 \leq i \leq N}$  une base de fonctions de  $\mathcal{H}_h$ . Les vecteurs  $\vec{u}_h$  et  $\vec{v}_h$  de  $\mathcal{H}_h$  se décomposent donc de façon unique :

$$\vec{u}_h(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N u_i \vec{\varphi}_i(\vec{x}) \quad \text{et} \quad \vec{v}_h(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N v_j \vec{\varphi}_j(\vec{x}) \tag{3.3}$$

Les coefficients  $u_i$  et  $v_j$  étant réels.  $a$  et  $l$  étant respectivement des formes bilinéaires et linéaires, si on exprime les vecteurs sur ces bases, la formulation variationnelle revient à :

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N u_i v_j a(\vec{\varphi}_i, \vec{\varphi}_j) = \sum_{j=1}^N v_j l(\vec{\varphi}_j) \tag{3.4}$$

Or, nous cherchons une solution valable pour toute fonction test  $v_j$ . En particulier, pour tout  $j$  :

$$\sum_{i=1}^N a(\vec{\varphi}_i, \vec{\varphi}_j) u_i = l(\vec{\varphi}_j) \tag{3.5}$$

Le système à résoudre est donc un système linéaire. On note  $\mathbf{M}$  la matrice carrée associée à la forme bilinéaire  $a$  dont les composantes sont  $\mathbf{M}_{ij} = a(\vec{\varphi}_i, \vec{\varphi}_j)$ . On note  $U$  le vecteur de  $\mathcal{H}_h$  dont chaque composante est  $u_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), et  $F$  le vecteur de  $\mathcal{H}_h$  de composantes  $l(\vec{\varphi}_j)$  ( $j = 1, \dots, N$ ), le système à résoudre est alors simplement :

$$\mathbf{M} U = F \tag{3.6}$$

Si la forme bilinéaire  $a$  est de plus symétrique et coercive (ce qui est le cas pour  $\tilde{a}$  dans le chapitre précédent), la matrice  $\mathbf{M}$  est alors symétrique et définie positive. La matrice est en conséquence inversible et bien adaptée aux méthodes classiques de résolution de systèmes linéaires tels que le gradient conjugué.

Il nous faudra définir un maillage de points de  $\Omega$ , identifier une base de fonctions de  $\mathcal{H}_h$ . Alors on trouvera une fonction  $\vec{u}_h$  approchée de notre problème. Il s'agira ensuite d'évaluer l'erreur de la méthode numérique  $\|\vec{u} - \vec{u}_h\|$ . Elle dépend principalement de la méthode d'inversion employée et naturellement de la densité du maillage.

---

<sup>1</sup>Nous ajouterons classiquement un indice  $h$  à tous les ensembles, variables et espaces de fonctions relevant de l'approximation numérique

### La gravito-élasticité

Le problème approché de la gravito-élasticité est : déterminer sur  $\Omega_h$  un déplacement  $\vec{u}_h \in \mathcal{H}_h$  (approximation de  $\vec{u}$  ou de  $\delta\vec{\omega}$ ) et un potentiel de gravité associé  $\phi_h \in \mathcal{W}_h$  (approximation de  $\phi_1^E$  ou  $\delta\Phi$ ), sachant que :

$$(\ddot{\vec{u}}_h, \vec{v}_h)_{dm} + a(\vec{u}_h, \vec{v}_h) + (\vec{\nabla}\phi_h, \vec{v}_h)_{dm} = \tilde{h}(\vec{v}_h) \quad (3.7)$$

$$b(\phi_h, \psi_h) + 4\pi G(\vec{u}_h, \vec{\nabla}\psi_h)_{dm} = \tilde{k}(\psi_h) \quad (3.8)$$

Connaissant des bases de fonctions sur les espaces  $\mathcal{H}_h$  et  $\mathcal{W}_h$ , le problème se simplifie :

$$\mathbf{M} A + \mathbf{K} U + \mathbf{L}^T \Phi = F_1 \quad (3.9)$$

$$\mathbf{L} U + \mathbf{N} \Phi = F_2 \quad (3.10)$$

$A$ ,  $U$  et  $\Phi$  sont respectivement les vecteur accélération, déplacement et potentiel de gravité, de dimensions  $3N$ ,  $3N$  et  $N$  (l'accélération et le déplacement étant des vecteurs de dimension 3 à l'origine). Leurs composantes sont respectivement :

$$A_n^i = \partial_{tt} u_h^i(\vec{x}_n) \quad (3.11)$$

$$U_n^i = u_h^i(\vec{x}_n) \quad (3.12)$$

$$\Phi_n = \phi_h(\vec{x}_n) \quad (3.13)$$

$n$  allant de 1 à  $N$ , et  $i$  de 1 à 3 (les trois dimensions de l'espace).

Enfin, on note  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{N}$  les matrices :

- $\mathbf{M}$  la matrice de masse (matrice diagonale)
- $\mathbf{K}$  la matrice de rigidité (matrice symétrique)
- $\mathbf{L}$  la matrice de couplage entre les deux équations
- $\mathbf{N}$  la matrice du Laplacien de l'équation de Poisson (matrice symétrique)

### 3.1.2 Les éléments spectraux

#### Les éléments finis

La particularité des méthodes d'éléments finis tient à la décomposition du maillage en sous-domaines de géométrie donnée : les "éléments". L'ensemble de points  $\Omega_h$  est décomposé en un nombre  $\mathcal{E}$  d'éléments  $\Omega_h^e$ ,  $e = 1, \dots, \mathcal{E}$  (la phase de décomposition est nommée "triangulation"). Il nous suffit alors de définir une base de fonctions nodales sur un élément de référence, et on effectue l'approximation de Galerkin localement d'éléments à éléments en utilisant cette unique base de fonctions pour tous les éléments. On reconstruit ensuite la solution globale sur  $\Omega_h = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{E}} \Omega_h^e$ , connaissant la position respective de chaque élément. Il faut noter qu'un certain nombre de points du maillage dans chaque élément (ceux aux bords) sont communs à plusieurs éléments, il sera nécessaire de bien considérer leurs contributions respectives pour raccrocher la formulation locale à la formulation globale du problème de Galerkin. C'est la phase classique dite "d'assemblage".

Après avoir triangulé  $\Omega_h$  en éléments, deux points principaux sont à définir :

- les fonctions nodales (la base de fonctions) de chaque éléments de référence

- une règle d’intégration numérique (somme discrète) pour approcher les formes bilinéaires

La méthode des éléments spectraux que nous avons utilisée dans ce travail est une méthode d’éléments finis qui se détache des méthodes classiques de par sa règle d’intégration numérique particulièrement performante. Elle s’appuie sur les propriétés d’interpolation des points dit de "Gauss-Lobatto-Legendre" (points GLL). Ces derniers sont généralement associés à l’interpolation de Legendre et aux méthodes de collocations spectrales, d’où l’appellation : "éléments spectraux" (Quarteroni et al., 2000).

**Base de fonctions nodales**

La méthode des éléments spectraux est spécialement adaptée à des éléments volumiques de formes hexaédriques et des éléments surfaciques quadrangulaires (voir Chaljub, 2000). L’élément de référence de volume est choisi cubique, noté  $\Lambda^3 \in \mathbb{R}^3$ , et l’élément de référence de surface est carré, noté  $\Lambda^2$ ,  $\Lambda$  étant ici l’intervalle fermé  $[-1, 1]$  (voir la figure 3.1).

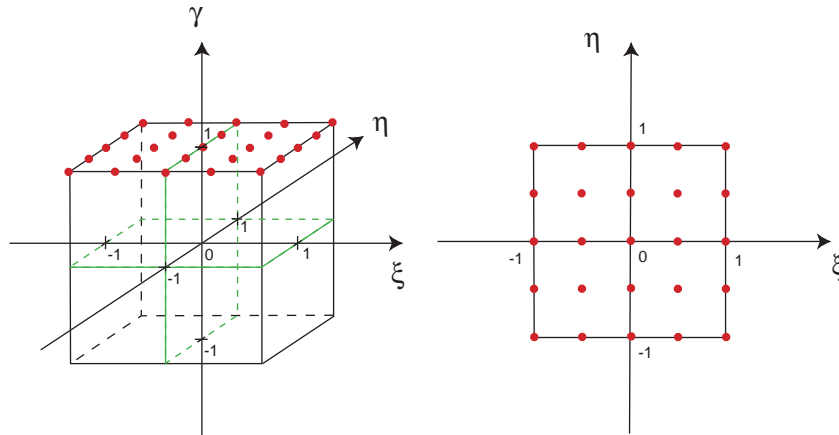


FIG. 3.1: Les éléments de référence volumiques  $\Lambda^3$  et surfaciques  $\Lambda^2$ . Les points rouges représentent les points du maillage qui sont compris dans les éléments. Leur position et leur nombre sont dans ce schéma arbitraires. L’élément cubique comprend aussi des points internes mais par soucis de lisibilité, seul ceux du plan supérieur sont représentés sur le schéma.

Le volume (la Terre dans notre cas) est décomposé en hexaèdres déformés  $\Omega_h^e$ . Nous avons vu qu’il nous faudra tenir compte des interfaces de discontinuités et de la surface de la planète ; ces ensembles seront eux divisés en quadrangles déformés  $\Sigma_h^e$ . Tous ces éléments sont construits connaissant les transformations exactes qui permettent de passer des éléments de référence aux éléments déformés  $\Omega_h^e = \mathcal{F}^e(\Lambda^3)$  et  $\Sigma_h^e = \mathcal{S}^e(\Lambda^2)$ .

Suivant les notations de Chaljub (2000), nous notons dans l’élément de référence volumique  $\Lambda^3$  les coordonnées cartésiennes  $\vec{\xi} = (\xi, \eta, \gamma)$ . Sur  $\Omega_h = \bigcup_e \Omega_h^e$  les coordonnées cartésiennes sont toujours notées  $\vec{x} = (x, y, z)$ . À tout point  $\vec{x}$  compris dans l’élément  $\Omega_h^e$  nous pourrons donc associer des points  $\vec{\xi}$  de l’élément de référence connaissant la transformation analytique  $\mathcal{F}^e$  tel que  $\vec{x} = \mathcal{F}^e(\vec{\xi})$ .

Dans l’élément de référence surfacique, on note les coordonnées  $(\xi, \eta)$ . Les points compris à la fois dans un élément de volume et dans une élément de surface ont deux jeux de coordonnées

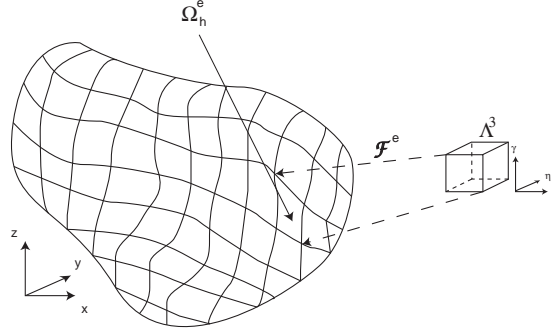


FIG. 3.2: Représentation simplifiée d'un maillage 3D. L'élément  $\Omega_h^e$  du volume global s'associe à l'élément de référence cubique  $\Lambda^3$  connaissant la transformation  $\mathcal{F}^e$ .

selon que l'on est dans le repère surfacique ou volumique. La transformation qui permet de passer de l'un à l'autre est à définir. L'approche la plus simple reste celle de trianguler le volume de manière à ce que tous les points d'un élément de volume qui appartiennent à un élément de surface donné aient par exemple la même coordonnée  $\gamma$ . On choisit alors le repère de l'élément de surface de sorte à ce que les positions  $(\xi, \eta)$  de ces points soient confondues dans les repères volumique et surfacique. C'est la méthode qui sera utilisée dans le maillage de la sphère cubique que nous utiliserons.

Les transformations  $\mathcal{F}^e$  et  $\mathcal{S}^e$  sont définies dans la pratique avec la construction du maillage.

Dans la méthode des éléments spectraux, les espaces vectoriels approchés sont des espaces de polynômes, ici à 2 et 3 dimensions. L'approximation des fonctions s'assimile donc classiquement à une interpolation polynomiale sur les points du maillage. Les fonctions nodales définies sur  $\Lambda^3$  et  $\Lambda^2$  seront ici les polynômes de Lagrange.

À une dimension selon la coordonnée  $\xi \in \Lambda$ , on définit  $\{\xi_i\}_{1 \leq i \leq I}$  les  $I$  points du maillage de  $\Lambda$ . On note les polynômes de Lagrange définis sur  $\Lambda$ , et associés aux points  $\xi_i$  :

$$\mathbb{P}_i(\xi) = \prod_{k=1; k \neq i}^I \frac{\xi - \xi_k}{\xi_i - \xi_k} \quad (3.14)$$

Si l'on restreint le polynôme aux points du maillage de  $\Lambda$ , alors  $\mathbb{P}_i(\xi_j) = \delta_{ij}$ . Les polynômes s'assimilent donc simplement à des diracs sur l'ensemble de travail discret, et une fonction  $q$  polynomiale sur  $\Lambda$  se décomposera sur cette base :

$$q(\xi) = \sum_{i=1}^I \alpha_i \mathbb{P}_i(\xi) \quad \text{avec} \quad \alpha_i = q(\xi_i) \quad (3.15)$$

L'interpolation polynomiale est exacte sur les points du maillage.

Sur l'élément déformé  $\Omega_h^e$  :  $q(\vec{x}) = q(\mathcal{F}^e(\vec{\xi})) = q \circ \mathcal{F}^e(\vec{\xi})$ . Pour simplifier l'écriture on note  $q \circ \mathcal{F}^e(\vec{\xi}) = q^e(\vec{\xi})$ . La décomposition de  $q$  sur le maillage 1D de l'élément  $e$  est donc :

$$q(x) = \sum_{i=1}^I q \circ \mathcal{F}^e(\xi_i) \mathbb{P}_i(\xi) = \sum_{i=1}^I q^e(\xi_i) \mathbb{P}_i(\xi) \quad (3.16)$$

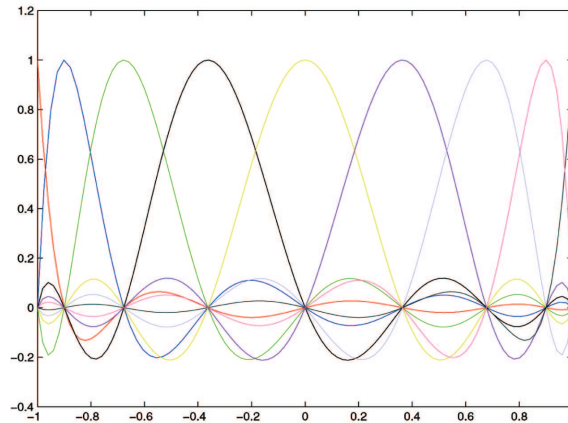


FIG. 3.3: Les 9 polynômes de Lagrange associés au 9 points de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) sur  $\Lambda = [-1, 1]$ . Les points GLL correspondent aux points de coïncidence des polynômes sur l'axe des abscisses (voir la paragraphe "Intégration numérique").

À trois dimensions, les points du maillage de l'élément de référence  $\Lambda^3$  sont notés  $(\xi_i, \eta_j, \gamma_k)$  avec  $i = 1 \dots I$ ,  $j = 1 \dots J$  et  $k = 1 \dots K$ . On décompose la variable  $q$  sur l'élément  $\Omega_h^e$  :

$$\text{sur } e : \quad q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K q^e(\xi_i, \eta_j, \gamma_k) \mathbb{P}_i(\xi) \mathbb{P}_j(\eta) \mathbb{P}_k(\gamma) \quad (3.17)$$

### Intégration numérique

On définit les points de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) comme les  $n$  points où le polynôme de Legendre de degré  $n$  (à bien distinguer des polynômes de Lagrange ci dessus) s'annulent sur  $\Lambda = [-1, 1]$ . On associe à ces points une règle d'intégration numérique :

$$\int_{\Lambda} q(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^N \omega_i q(\xi_i) \quad (3.18)$$

Avec  $\omega_i$  les poids d'intégration définis à partir du polynôme de Lagrange de degré  $i$ ,  $\mathbb{P}_i$  :

$$\omega_i = \int_{\Lambda} \mathbb{P}_i(\xi) d\xi \quad (3.19)$$

La figure 3.4 présente un groupement d'éléments cubiques avec les différents points GLL qu'ils contiennent. Ils constitueront ensemble le maillage du domaine de travail. L'intérêt de ces points est à rapporter aux performances de l'intégration numérique auxquels ils s'associent. On peut montrer que pour un nombre de points GLL donné  $l$  (selon une dimension), la somme discrète ci-dessus intègre parfaitement des fonctions polynômiales dont le degré est inférieur à  $2l+1$ . Typiquement, nous choisirons 9 points GLL sur une dimension de l'élément de référence ; on peut intégrer ainsi parfaitement toutes fonctions polynômiales de degré inférieur à 19 (à titre d'exemple cela interpole avec précision 3 longueurs d'ondes d'un signal périodique 1D).

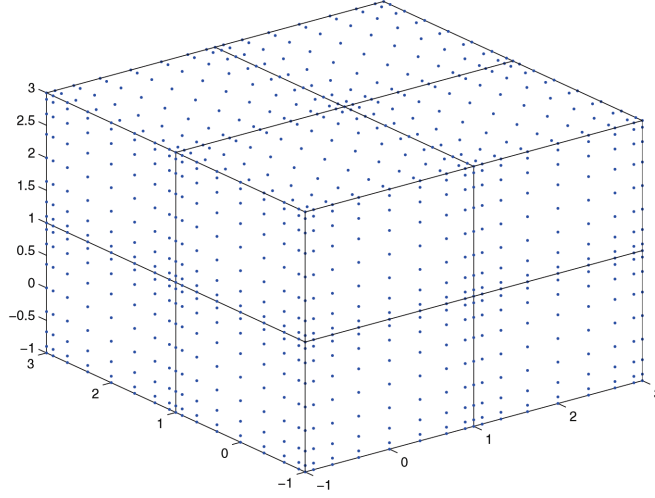


FIG. 3.4: Huit éléments cubiques et leurs points GLL

### Approximation des formes faibles

Soit  $\mathcal{N}$  le nombre de points GLL dans chaque direction de l'espace dans un élément de référence. Ce nombre peut varier d'un élément à un autre, toutefois par souci de lisibilité, nous considérerons qu'il est le même partout (ce qui sera finalement souvent le cas en pratique). En utilisant la règle d'intégration numérique ci-dessus, on définit une approximation discrète des formes faibles. Notons  $\mathcal{J}_V^e$  le jacobien de la transformation  $\mathcal{F}^e$  et  $\mathcal{J}_S^e$  le jacobien de la transformation  $\mathcal{S}^e$ .

Supposons que la forme faible à discrétiser soit simplement le produit scalaire dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  nous l'approcherons par :

$$\int_{\Omega} \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) dV = \sum_{e=1}^{\mathcal{E}} \int_{\Lambda^3} \vec{u}^e(\vec{\xi}) \cdot \vec{v}^e(\vec{\xi}) |\mathcal{J}_V^e| d\vec{\xi} \quad (3.20)$$

$$\approx \sum_{e=1}^{\mathcal{E}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \omega_i \omega_j \omega_k \left( \sum_{l=1}^3 u_{ijk}^{e,l} v_{ijk}^{e,l} \right) |\mathcal{J}_V^e|_{ijk} \quad (3.21)$$

Notant  $u_{ijk}^{e,l} = u^{e,l}(\xi_i, \eta_j, \gamma_k)$ , c'est à dire la composante  $l$  du déplacement au point  $(\xi_i, \eta_j, \gamma_k)$  de l'élément  $e$ .

considérons maintenant le cas d'une surface comportant  $\mathcal{E}_s$  éléments surfaciques. On suppose que les points de ces éléments ont comme coordonnée  $\gamma = \gamma_R$  dans l'élément de référence volumique. Si la forme faible est simplement le produit scalaire dans  $\mathbf{L}^2(\partial\Omega)$ , alors son approximation sur la base des éléments spectraux sera :

$$\int_{\partial\Omega} \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) dS = \sum_{e=1}^{\mathcal{E}_s} \int_{\Lambda^2} \vec{u}^e(\xi, \eta) \cdot \vec{v}^e(\xi, \eta) |\mathcal{J}_S^e| d\xi d\eta \quad (3.22)$$

$$\approx \sum_{e=1}^{\mathcal{E}_s} \sum_{p=1}^{\mathcal{N}} \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} \omega_p \omega_q \sum_{l=1}^3 u_{pqr}^{e,l} v_{pqr}^{e,l} |\mathcal{J}_S^e|_{pq} \delta_{rR}$$

Lorsque l'on exprime les champs de vecteurs sur les bases des espaces vectoriels approchés ( $\mathcal{W}_h$  et  $\mathcal{H}_h$ ), les formulations variationnelles se simplifient en formulation matricielle. Dans l'exemple se rapportant à l'intégrale volumique ci-dessus :

$$\int_{\Omega} \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) dV \approx \mathbf{v} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{u} = \sum_{e=1}^{\mathcal{E}} \mathbf{v}^e \cdot \mathbf{M}^e \cdot \mathbf{u}^e \quad (3.23)$$

En identifiant les termes de 3.22 et 3.23 correspondants :

$$\mathbf{v}^e \cdot \mathbf{M}^e \cdot \mathbf{u}^e = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \sum_{l=1}^3 v_{ijk}^{el} \omega_i \omega_j \omega_k |\mathcal{J}_V^e|_{ijk} u_{ijk}^{el} \quad (3.24)$$

Les formulations seront valables pour toutes fonctions test  $v_{ijk}^{el}$ , la partie qu'il nous faudra expliciter est donc :

$$(\mathbf{M}^e \cdot \mathbf{u}^e)_{ijk}^l = \sum_{t=1}^{\mathcal{N}} \sum_{u=1}^{\mathcal{N}} \sum_{v=1}^{\mathcal{N}} \sum_{h=1}^3 \mathbf{M}_{ijktuv}^{e, lh} u_{tuv}^{eh} = \omega_i \omega_j \omega_k |\mathcal{J}_V^e|_{ijk} u_{ijk}^{el} \quad (3.25)$$

On voit que  $\mathbf{M}^e$  est une matrice diagonale, dans cet exemple-ci :

$$\mathbf{M}_{ijktuv}^{e, lh} = \omega_i \omega_j \omega_k |\mathcal{J}_V^e|_{ijk} \delta_{lh} \delta_{it} \delta_{ju} \delta_{kv} \quad (3.26)$$

Notons que  $\mathbf{M}^e$  est une matrice élémentaire. La construction de la matrice globale nécessitera une phase dite d'assemblage car un certain nombre de points du maillage de chaque élément sont confondus dans le maillage global (les points sur les bords) :

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}_{e=1}^{\mathcal{E}} \{\mathbf{M}^e\} \quad (3.27)$$

On peut montrer qu'il suffit de sommer les contributions de chaque composante des matrices élémentaires qui correspondent à un même point du maillage pour avoir la valeur de la composante de la matrice globale.

En cas de dérivation des champs de vecteurs  $\vec{u}$  et/ou  $\vec{v}$ , la matrice ne sera plus simplement diagonale. Pour approximer les dérivées, on se base sur l'interpolation de Lagrange 3.17. Dans l'élément  $e$ , la dérivée approchée de la variable  $q$  selon  $x$  sera par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x}(\vec{x}) &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial q^e}{\partial \xi}(\vec{\xi}) + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial q^e}{\partial \eta}(\vec{\xi}) + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial q^e}{\partial \gamma}(\vec{\xi}) \\ &\approx \frac{\partial \xi}{\partial x} \sum_{t=1}^{\mathcal{N}} \sum_{u=1}^{\mathcal{N}} \sum_{v=1}^{\mathcal{N}} q^e(\xi_t, \eta_u, \gamma_v) \dot{\mathbb{P}}_t(\xi) \mathbb{P}_u(\eta) \mathbb{P}_v(\gamma) \\ &+ \frac{\partial \eta}{\partial x} \sum_{t=1}^{\mathcal{N}} \sum_{u=1}^{\mathcal{N}} \sum_{v=1}^{\mathcal{N}} q^e(\xi_t, \eta_u, \gamma_v) \mathbb{P}_t(\xi) \dot{\mathbb{P}}_u(\eta) \mathbb{P}_v(\gamma) \\ &+ \frac{\partial \gamma}{\partial x} \sum_{t=1}^{\mathcal{N}} \sum_{u=1}^{\mathcal{N}} \sum_{v=1}^{\mathcal{N}} q^e(\xi_t, \eta_u, \gamma_v) \mathbb{P}_t(\xi) \mathbb{P}_u(\eta) \dot{\mathbb{P}}_v(\gamma) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\quad (3.29)$$

On note  $\tilde{\partial}_x q^e$  cette dérivée approchée. En un point donné  $(\xi_i, \eta_j, \gamma_k)$  du maillage de l'élément  $e$ , sachant que  $\mathbb{P}_i(\xi_j) = \delta_{ij}$ , elle prend la forme :

$$\tilde{\partial}_x q^e(\xi_i, \eta_j, \gamma_k) = \partial_x \xi_{ijk} \sum_{t=1}^{\mathcal{N}} q_{tjk}^e D_{ti} + \partial_x \eta_{ijk} \sum_{t=1}^{\mathcal{N}} q_{itk}^e D_{tj} + \partial_x \gamma_{ijk} \sum_{t=1}^{\mathcal{N}} q_{ijt}^e D_{tk} \quad (3.30)$$

avec  $D_{ti}$  la valeur de  $\dot{\mathbb{P}}_t(\xi)$  au point  $\xi_i$ .

À l'aide de ces approximations, nous sommes à même de construire chacune des matrices des formulations variationnelles ( $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{L}$ ). Nous présentons à titre d'exemple la construction et l'expression de la matrice  $\mathbf{N}$  relative au laplacien de l'équation de redistribution des masses dans l'annexe C.1.

## 3.2 Le maillage : la sphère cubique

Il nous faut définir un maillage de la sphère, et caractériser les transformations  $\mathcal{F}^e$  et  $\mathcal{S}^e$  qui permettent de passer d'un cube ou d'un carré de référence à chaque élément de ce maillage. Nous ne présenterons pas ici ces transformations. Le principe de construction de ce maillage 3D fut établi par Emmanuel Chaljub, nous avons, au cours ce travail utilisé le mailleur qu'il réalisa durant sa thèse. Nous invitons le lecteur à consulter Chaljub (2000) pour avoir tous les détails sur la formulation mathématique de la construction de la sphère cubique. Nous ne présenterons ici que le principe général de cette construction.

### 3.2.1 Construction

La construction du maillage se base sur une transformation proposée par Ronchi et al. (1996). Elle permet de construire un maillage de sphère particulièrement bien adapté à la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles. L'idée est de diviser la surface d'une sphère en six régions qui sont obtenues par projection des six cotés d'un cube inscrit dans cette sphère (voir les figures 3.5 et 3.6).

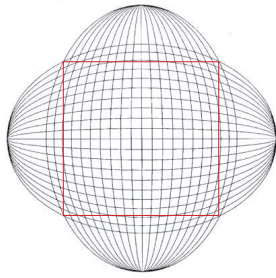


FIG. 3.5: La transformation de Ronchi et al. (1996) : déformation d'une surface carrée de façon à ce que son quadrillage s'aligne avec les grands cercles d'une sphère.

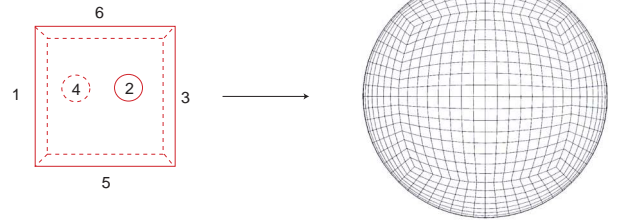


FIG. 3.6: La transformation de Ronchi et al. (1996) appliquée aux six faces d'un cube.

L'extension de ce maillage sur la troisième dimension (selon l'axe radiale) a été proposée par Chaljub (2000).



Considérant une succession de cubes de même centre, il nous est alors possible de construire une série de sphères imbriquées sur lesquelles on définira un maillage latéral. Seul le cube le plus central ne sera pas déformé.

La figure 3.7 présente schématiquement la construction de la sphère cubique 3D en trois étapes selon une coupe transversale traversant 4 des six régions latérales (passant par leurs centres). Les quatre régions (ainsi que les deux autres dans les plans perpendiculaires) sont accolées au cube central, déformées de manière à s'accoler aussi latéralement, puis on applique la transformation de Ronchi et al. (1996).

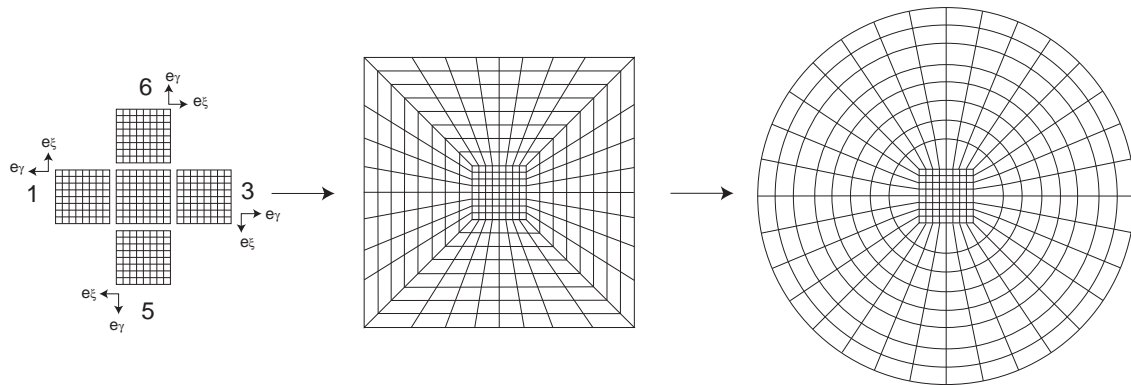


FIG. 3.7: Schéma de construction de la sphère cubique selon une coupe transversale

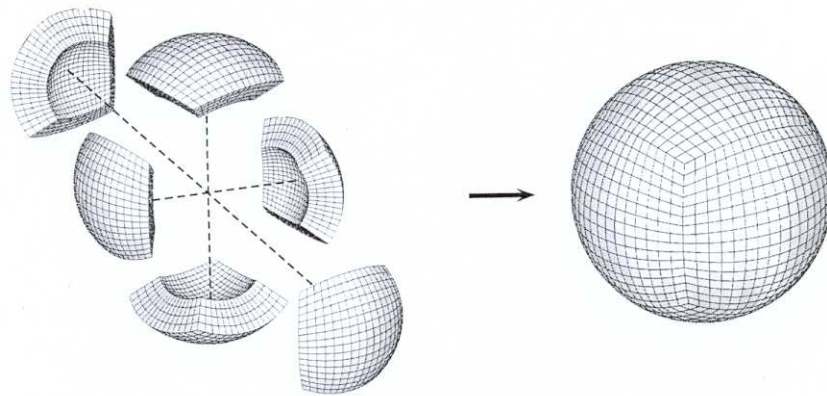


FIG. 3.8: Construction de la sphère cubique en trois dimensions, regroupement des six régions externes (figure de Capdeville, 2000)

On voit qu'en dehors du cube central et de la première série d'éléments l'encadrant, les éléments sont organisés en couronne sphérique. Or, dans chacune des régions latérales, l'axe  $\vec{e}_\gamma$  du cube de référence est orienté vers l'extérieur par rapport au cube central, ce qui implique que dans les éléments déformés de ces couronnes, l'axe  $\vec{e}_\gamma$  s'assimile à l'axe radial. De fait, les points situés sur des interfaces sphériques localisées entre ces couronnes auront une position à  $\gamma$  constant (en l'occurrence  $\gamma = -1$  ou  $1$ ). Cela facilite comme nous l'avons vu plus haut le raccord des intégrales numériques de volume et de surface.

Le détail des transformations est présenté par Chaljub (2000) (ou encore en combinant les

articles Ronchi et al., 1996 et Chaljub et al., 2003). On détermine ainsi les transformations  $\mathcal{F}^e$  et  $\mathcal{S}^e$  en chaque point de chaque élément, ainsi que les jacobiens volumique et surfacique,  $\mathcal{J}_V^e$  et  $\mathcal{J}_S^e$ , qui s'y rattachent. On détermine aussi les dérivées  $\partial \xi^i / \partial \vec{x}$ . Nous possédons alors tous les éléments nécessaires à construire les matrices du système linéaire que nous aurons ensuite à résoudre.

Le maillage ainsi développé est facilement constructible en concordance avec un modèle de Terre réaliste sphérique tel que, par exemple, les modèles sismologiques de type SNREI ("Spherical Non Rotating Earth Isotropic"). Les équations que nous utilisons sont appliquées à une Terre de référence sphérique à symétrie radiale ; le maillage de la sphère cubique est donc particulièrement bien adapté pour le représenter. Les interfaces des couronnes sont identifiées aux interfaces de discontinuités de densité et de paramètres élastiques, et la triangulation élémentaire qui s'ensuit est adaptée à la précision nécessaire entre chaque couche (voir le Chapitre 4 pour l'exemple du modèle de Terre P.R.E.M.).

### 3.2.2 Le problème du déraffinement en profondeur

En se déplaçant vers les profondeurs, la taille des éléments diminue mais leur nombre reste latéralement le même sur chaque région. Si l'on veut avoir une répartition élémentaire très dense en surface, il faudra avoir d'autant plus d'éléments dans le cube central. Or celui-ci représente une portion de volume petite devant celui de la Terre. L'échantillonnage de la planète est donc non homogène en allant en profondeur, ce qui se traduira par une perte de temps de calcul.

Différentes méthodes ont été envisagées pour pallier ce problème dans les travaux antérieurs utilisant les méthodes en éléments spectraux (voir l'annexe C.4). Dans le travail présent, nous n'avons pas entrepris de déraffiner le maillage car le maillage conforme est déjà utilisable pour un grand nombre d'applications ne demandant pas une discrétisation trop forte en surface. Cependant il faudra se pencher prochainement sur ce problème afin de pouvoir affiner les modèles de Terre en surface.

## 3.3 Résolution numérique de la réponse gravito-élastostatique de la Terre

### 3.3.1 Modèle de départ : la réponse sismique élastodynamique de la Terre

Le modèle de départ fut développé par Emmanuel Chaljub durant sa thèse. Nous l'avons repris en collaboration avec Jean-Pierre Vilotte et le Département de Modélisation Physique et Numérique de l'IPGP.

Ce modèle numérique calcule la réponse élastodynamique à un séisme d'une planète sphérique avec une configuration de référence en équilibre hydrostatique. La planète peut comporter des zones solides élastiques et des zones fluides isentropiques (suivant les relations d'Adams-Williamson). Le modèle (tel qu'il était en 2000) se place dans le cadre de l'approximation dite de Cowling qui consiste à négliger la redistribution des masses et la perturbation de gravité associée.

Nous avons changé et ajouté durant cette thèse :

1. La force externe n'est pas un séisme mais l'attraction d'un corps extérieur (pour la marée par exemple) ou une surcharge en surface (surcharges atmosphériques ou océaniques par

exemple).

2. Le couplage avec la gravité a été ajouté. Il se traduit par l'ajout de l'équation de redistribution des masses.
3. Le système est actuellement résolu en statique (le terme inertiel est négligé) alors qu'il était à l'origine résolu en dynamique. La méthode de résolution est donc différente.
4. Le système peut être perturbé au premier ordre ce qui nous permet de prendre en considération les variations latérales internes de la planète, les topographies aux interfaces et la non-hydrostaticité des précontraintes.
5. L'implémentation d'origine du fluide n'est plus valide ici pour le mode de résolution statique. Nous ne l'avons pas réimplémenté pour l'instant car nous ne nous intéressons ici qu'aux variations latérales du manteau, la contribution du noyau s'annule donc en majorité lorsque l'on perturbe le système. Le fluide est pour l'instant modélisé comme un solide élastique dont la rigidité tend vers zéro.

### 3.3.2 Solution numérique de l'équation de redistribution des masses

La formulation variationnelle de l'équation de redistribution des masses a été présentée dans le chapitre précédent. Rappelons le problème à résoudre numériquement :

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= -4\pi G \vec{\nabla} \cdot (\rho_o \vec{u}) & \text{sur } \Omega \\ \Delta\phi &= 0 & \text{sur } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

avec comme conditions de continuités sur les interfaces de discontinuités de densité :  $[\phi]_{-}^{+} = 0$  et  $[\partial_n \phi + 4\pi G \rho_o \vec{u} \cdot \vec{n}]_{-}^{+} = 0$ .

Sous forme faible, le problème s'exprime : trouver  $\phi \in \mathcal{W}$  vérifiant l'équation suivante (équation 2.57)  $\forall \psi \in \mathcal{W}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi \, dV = -4\pi G \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \psi \, dV$$

#### Le problème extérieur

Par méthode numérique, il est impossible de sommer une intégrale sur tout  $\mathbb{R}^3$ . Nous savons que  $\phi$  en tant que potentiel de gravité tend vers zéro à l'infini, il pourrait nous suffire d'intégrer le volume sur une distance suffisamment éloignée de la planète en considérant le potentiel comme négligeable au delà. Cependant cela demanderait d'avoir un maillage extérieur extrêmement grand, rendant la résolution numérique trop longue.

Nous avons choisi d'utiliser les propriétés harmoniques du potentiel pour transformer l'intégrale volumique externe en une intégrale de surface. En utilisant la formule de Green sur la partie volumique extérieure à la planète dans la formulation faible, et sachant 3.31 sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  :

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi \, dV - \int_{\partial\Omega} (\partial_n \phi^+) \psi \, dS = -4\pi G \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \psi \, dV \quad (3.32)$$

$\partial_n \phi^+$  est la dérivée normale de  $\phi$  du côté extérieur de la surface  $\partial\Omega$ .

Le problème ainsi formulé est un problème classique de Neumann qui consiste à résoudre l'équation de Poisson en fixant comme condition aux limites la valeur en surface de la dérivée de  $\phi$ . Toutefois nous ne connaissons pas ici la valeur de cette dérivée.

En suivant une approche proposée par E. Chaljub (communication personnelle, et voir Chaljub & Valette, 2004), on définit un opérateur DtN  $D$  ("Dirichlet to Neumann") qui va nous permettre de prendre en considération la forme du potentiel à l'extérieur et sa condition au limite à l'infini.

Ce type d'opérateur se nomme "DtN" car il nous permet de passer d'une condition de surface exprimée sur le potentiel (condition de Dirichlet) à une condition sur sa dérivée normale :  $\partial_n \phi = D\phi$

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi dV - \int_{\partial\Omega} (D\phi)^+ \psi dS = -4\pi G \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \psi dV \quad (3.33)$$

Sachant que  $\phi$  est harmonique à l'extérieur de  $\Omega$ , son développement en harmoniques sphériques (voir annexes A.3 pour plus de précisions sur les harmoniques sphériques  $\mathcal{Y}_l^m$ ), sera sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$  :

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \phi_{lm} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \quad (3.34)$$

La planète est sphérique dans sa configuration de référence, par conséquent  $\vec{n} = \vec{e}_r$  et  $\partial_n = \partial_r$ .

$$\partial_r \phi(r, \theta, \varphi) = - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{l+1}{a} \phi_{lm} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+2} \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \quad (3.35)$$

En exprimant les coefficients d'harmoniques sphériques par la transformée de Legendre  $\phi_{lm} = \frac{1}{a^2} \int_{\partial\Omega} \phi \mathcal{Y}_l^m dS$ , en surface  $r = a$ , l'opérateur DtN sera donc exactement :

$$D(\phi) = \partial_r \phi(a, \theta, \varphi) = - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{l+1}{a^3} \left( \int_{\partial\Omega} \phi \mathcal{Y}_l^m dS \right) \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \quad (3.36)$$

L'expression ne met plus en jeu la dérivée normale de  $\phi$  mais plutôt  $\phi$  lui-même. Le potentiel est continu a travers la surface, donc  $(D\phi)^+ = D(\phi^+) = D(\phi^-) = D\phi$  (on simplifie l'écriture par  $\phi^- = \phi$  pour plus de lisibilité).

Le problème revient à résoudre un problème variationnel avec un terme d'interface supplémentaire qui est symétrique (Chaljub & Valette, 2004) :

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi dV + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{l+1}{a} \left( \int_{\partial\Omega} \phi \mathcal{Y}_l^m dS \right) \left( \int_{\partial\Omega} \psi \mathcal{Y}_l^m dS \right) = -4\pi G \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \nabla \psi dV \quad (3.37)$$

La condition ici sur  $\partial\Omega$  intervient en réalité comme une condition aux limites artificielle ; le terme de surface se retrouverait exactement en intégrant la partie sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  de la formulation faible 3.32, connaissant la formulation analytique de  $\phi$  sur cette zone avec comme réelle condition au limite celle à l'infini  $\phi \rightarrow 0$ . À l'image des problèmes classiques en géophysique globale dans lesquelles on propage la solution d'une équation différentielle de couche en couche connaissant les conditions aux limites qui permettent de transmettre la solution, ici la solution a déjà été propagée de l'infini à la surface de la planète. Il nous suffit alors de résoudre le

problème pour le reste du domaine, à l'aide de cette information, mais, pour cette partie, nous utiliserons une méthode numérique.

Le terme de surface entre directement dans la forme bilinéaire  $b$  et n'en change pas les propriétés. Sur les bases polynomiales des éléments spectraux, la formulation se simplifie en un système linéaire :

$$\mathbf{N}\Phi = -\mathbf{L}U \quad (3.38)$$

La matrice  $\mathbf{N}$  est plus précisément une somme de deux matrices  $\mathbf{N}_1$  et  $\mathbf{N}_2$  qui correspondent aux deux intégrales de la forme faible.  $\mathbf{N}_1$  est calculée à partir de l'intégrale de volume,  $\mathbf{N}_2$  à partir de l'intégrale de surface. La formulation des matrices est présentée en annexe C.1.

### L'équation de redistribution des masses perturbé

Dans le cas perturbé, la formulation générale est la même, mais il faut ajouter quelques termes prédéfinis dans le membre de droite de l'équation (voir le chapitre précédent). L'utilisation de l'opérateur DtN nous force à en ajouter un dernier qui est sans importance quand à la méthode de résolution. Il est dû à la non sphericité de la surface. La topographie intervient dans la condition aux limites sur  $\delta\phi$  :  $\delta\phi^+ = \delta\phi^- - \delta d [\partial_n \phi]_-^+ = \delta\phi^- - 4\pi G \delta d \rho_o \vec{u} \cdot \vec{n}$ . Le terme de surface à ajouter au second membre de l'équation 2.93 sera donc :

$$-4\pi G \int_{\partial\Omega} D\{\delta d \rho_o \vec{u} \cdot \vec{n}\} \psi \, dS \quad (3.39)$$

Pour rappel, nous cherchons à déterminer  $\delta\vec{u}$  et  $\delta\phi$  dans le cas perturbé, le terme est donc bien connu.

Le système linéaire formel à résoudre, généralisé au cas perturbé sera :

$$\mathbf{N}\Phi = -\mathbf{L}U + F_2 \quad (3.40)$$

$F_2$  étant nul dans le cas non perturbé.

### 3.3.3 Le système total

Les modèles en éléments spectraux réalisés précédemment, essentiellement pour la sismologie, résolvent l'équation du mouvement dynamique à l'aide d'un algorithme itératif de type Newmark basé sur des schémas qui s'apparentent aux différences finies (Hugues, 1987, voir annexes C.3). Le schéma qu'ils utilisent est explicite ce qui le rend conditionnellement stable, dépendant du pas de temps choisi  $\Delta t$ . Pour le type de maillage utilisé ici, la condition de stabilité est généralement autour de  $\Delta t \lesssim 1s$ .

Dans notre cas, les forces extérieures appliquées à la planète ont des périodes allant de l'heure à l'année. Déterminer les solutions du système toutes les secondes serait démesurément coûteux en temps de calcul.

Un phase importante de la thèse fut de trouver une autre méthode de résolution en temps. Nous avons choisi dans ce travail de résoudre le système de la gravito-élasticité en statique, cela pour deux raisons :

1. La déformation de la Terre aux fréquences qui nous intéressent est quasi-statique. Le terme d'inertie est très faible, il est connu pour avoir un impact de l'ordre de 5% sur la

réponse de marée de la planète. Si cet effet n'est pas tout à fait négligeable sur la réponse de marée totale, il l'est probablement sur sa perturbation due aux variations latérales (compte tenu de la précision des mesures actuelles de déformation et de gravité).

2. La résolution statique consiste à résoudre un système linéaire. Il existe un schéma implicite de l'algorithme de Newmark qui est inconditionnellement stable. Ce schéma, contrairement au schéma explicite, demande de résoudre un système linéaire à chaque pas de temps qui est très proche de celui que nous résolvons. À terme nous pourrions donc incorporer la résolution statique comme phase intermédiaire d'une résolution dynamique (voir annexe C.3).

Le système linéaire à "inverser" est composé des deux relations 3.9 et 3.10 en négligeant l'accélération  $A$  en tout point.

$$\mathbf{K} U + \mathbf{L}^T \Phi = F_1 \quad (3.41)$$

$$\mathbf{L} U + \mathbf{N} \Phi = F_2 \quad (3.42)$$

La méthode que nous avons trouvée la plus rapide est celle présentée dans la figure 3.9. Le système total est résolu de façon itérative, par "inversions" successives et répétées des deux systèmes linéaires couplés, cela jusqu'à ce que la précision globale soit satisfaisante.

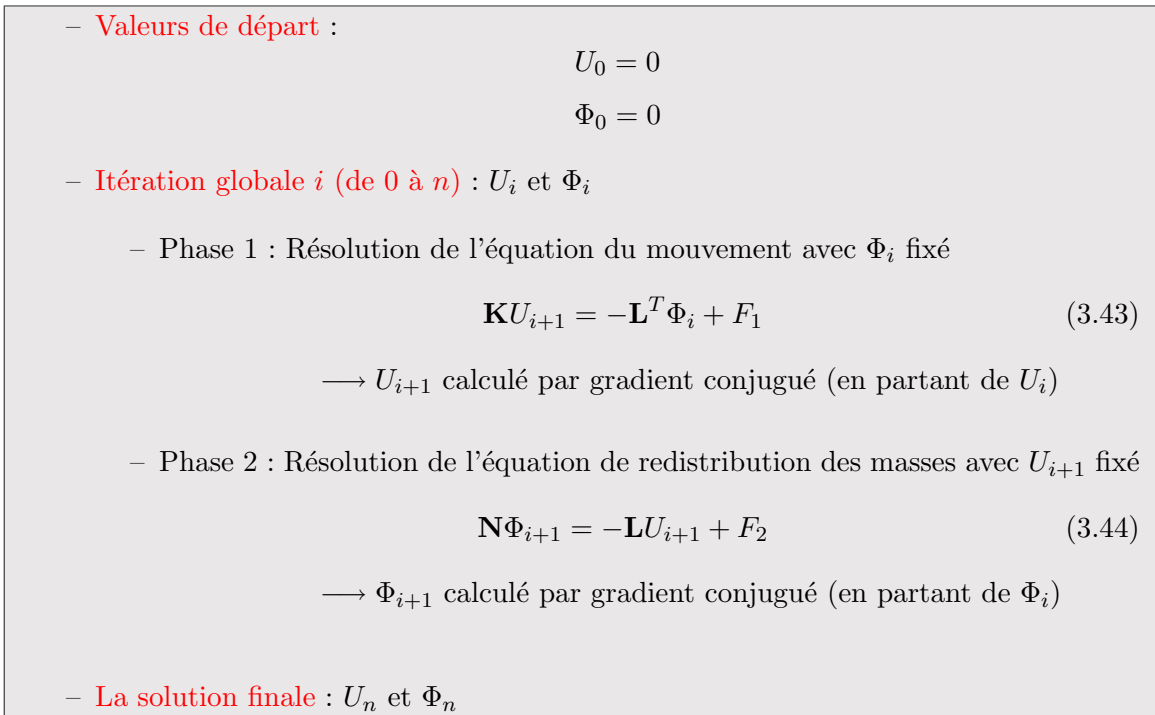


FIG. 3.9: Schéma de résolution du système linéaire global

Les phases 1 et 2 sont répétées jusqu'à convergence de la solution, et stoppées lorsque la précision convient (une fois le résidu sur chaque équation très faible). Les deux systèmes linéaires 3.43 et 3.44 sont résolus eux-mêmes de façon itérative par gradients conjugués préconditionnés. Dans le premier cas on fixe  $\Phi$  et on détermine  $U$ , dans le deuxième cas, on fixe  $U$  et on détermine  $\Phi$ . Les deux matrices à "inverser" sont  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{N}$ , deux matrices

symétriques définies positives. Les critères d'arrêts des gradients conjugués sont dynamiques, ils sont de plus en plus sévères à mesure que la convergence globale progresse. Typiquement, ils sont divisés par dix à chaque itération  $i$ . Enfin, il suffit d'une dizaine d'itérations globales pour obtenir les deux résidus des gradients conjugués de l'ordre de  $10^{-6}$ .

Ces deux matrices sont dans la pratique très grandes, la plus petite que nous avons utilisée avait une taille avoisinante de  $300000 \times 300000$ , et dans la plupart des expériences que nous avons menées, elles ont une taille de l'ordre de  $10^6 \times 10^6$  (c'est la taille minimum pour modéliser PREM notamment). On ne les exprime donc jamais dans la pratique, elles prendraient trop de place mémoire, c'est pourquoi nous avons recours à des méthodes itératives tel que le gradient conjugué. Il n'est bien sûr pas question d'inverser réellement les matrices, cela serait bien trop lourd. Le gradient conjugué est une méthode de résolution de système linéaire classique dont l'efficacité dépend principalement de la matrice à "inverser". Si la matrice est mal conditionnée le gradient risquera de converger particulièrement lentement, cela dépendra du second membre de l'équation. Pour pallier cela, on a recours en général à des préconditionneurs (une matrice que l'on multiplie en quelque sorte au système linéaire) afin de changer le conditionnement de la matrice de départ. Les matrices les mieux conditionnées sont souvent les matrices à diagonales dominantes, et les préconditionneurs les plus simples sont simplement les diagonales des matrices à "inverser".

Ici nos matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{N}$  sont globalement de type grad-grad, c'est à dire à diagonales faiblement dominantes. Un préconditionnement un peu plus complexe que la diagonale serait souhaitable pour homogénéiser le temps de résolution selon les modèles de Terre. Cependant trouver un préconditionneur n'est pas simple et demande des compromis sur le temps de résolution. Nous avons fait quelques tests avec des préconditionneurs de type EBE ("Element-By-Element", voir Daydé et al., 1997) qui se sont montrés peu convaincants, car si l'on gagne en nombre d'itérations on perd en temps de calcul entre les itérations. De plus le terme de surface de l'équation de redistribution des masses est non local à cause des transformées de Legendre. Pour chaque point du maillage de surface, il nous faut réaliser une intégration sur toute la surface. C'est un terme difficile à prendre en compte dans un préconditionneur. Nous n'avons trouvé aucun type de préconditionnement dans la littérature qui s'y prête.

Cependant le problème est à l'heure actuelle secondaire, car si le nombre d'itérations augmente quand on passe d'une Terre homogène à une Terre de type PREM, le temps de calcul du solveur reste raisonnable (globalement sur 8 processeurs de 500 Mhz : entre une demie heure pour certains maillages de Terre homogènes, et dix heures pour les plus gros maillages hétérogènes que nous avons utilisés).

### Traitement du degré 1

Lorsque la force externe est due à une surcharge de surface, la condition aux limites de surface sur le potentiel  $\phi_1^E$  (de même pour le potentiel perturbé  $\delta\phi_1^E$ ) est différente pour la composante de degré 1 de son développement en harmoniques sphériques. Nous traitons ce cas particulier séparément. Dans un premier temps toutes les contributions de la force externe qui engendreraient des déformations de degré 1 sont annulées. Nous pourrions envisager plus tard de traiter cet aspect de la réponse de la Terre avec le reste des contributions.

### Aspects techniques

Le programme est implémenté actuellement au département de Modélisation Physique et Numérique de l'Institut de Physique du Globe de Paris. Il est développé en Fortran 90 et parallélisé sur une interface MPI ("Message Passing Interface"). L'Institut dispose actuellement d'un cluster de 32 processeurs EV6 de 500 Mhz. Le programme tourne typiquement sur 8 processeurs. Le maillage est réparti en domaines, eux-même répartis sur les processeurs. Un certain nombre de phases de communications entre processeurs sont nécessaires au cours du calcul, notamment pour les phases d'assemblage des matrices.



# Chapitre 4

## Validation

Nous présentons quelques applications du modèle numérique sur des problèmes déjà connus. Le but est d'évaluer l'efficacité de la méthode, ses capacités, et ainsi de valider le programme.

Le modèle numérique s'applique à deux types de calcul. Le premier consiste à déterminer la réponse de basses fréquences de la Terre lorsqu'elle est supposée sphérique et de structure interne à symétrie radiale. Le deuxième consiste à calculer la perturbation de cette réponse lorsque l'on introduit des variations latérales de densité et de paramètres rhéologiques, un déviateur des précontraintes et des topographies aux interfaces de discontinuités. La phase de validation se décompose donc en deux étapes qui se rapportent à ces deux problèmes.

La première étape a été simple à valider car elle se rapporte à des calculs classiques en géophysique. Les sollicitations externes appliquées à la planète sont de deux types :

- un potentiel d'attraction de marée : exemple du cas de l'onde  $M2$
- les surcharges de surface

La réponse de la planète à ces phénomènes est principalement connue pour le modèle sismologique de Terre PREM sur lequel nous nous sommes particulièrement arrêtés. Nos solutions sont exprimées en termes de nombres de Love afin de les comparer aux solutions analytiques ou aux solutions numériques déjà publiées.

La deuxième étape de validation a été plus complexe car peu d'études antérieures se sont intéressées à ce genre de problématiques. Nous avons dû reporter notre attention sur un problème plus simple mais connu : l'impact de l'ellipticité sur la réponse de marée  $M2$  de la Terre. Love développa au début du vingtième siècle la solution analytique de ce problème pour une Terre homogène incompressible. Nous avons repris cette solution et nous l'avons reformulée sous forme lagrangienne afin de l'exploiter plus aisément pour déboguer et valider le code. Wang (1994) avait lui-même suivi cette démarche durant son travail sur les marées et il montra que le calcul de Love comportait quelques erreurs. Nous avons suivi cette même approche et reconstruit la solution de Love, puis nous l'avons étendue aux réponses géodésiques de la Terre telles que la perturbation du champ de gravité (et du facteur gravimétrique associé), la déviation de la verticale par rapport à l'axe de la rotation de la Terre et la déflexion de la verticale par rapport à la croûte terrestre (l'article correspondant est présenté en annexe D.1).

En première partie, nous présentons les différents modèles de Terre utilisés pour ce travail et leur expression par le maillage de la sphère cubique, principalement pour le modèle P.R.E.M. de Dziewonski & Anderson (1981). Nous exposons ensuite quelques résultats que nous obtenons pour les modèles sphériques et leur validation. Enfin, nous validons la résolution du système de la gravito-élasticité perturbée en comparaison notre solution à la solution analytique de l'impact de l'ellipticité sur la réponse de marée  $M_2$  de la Terre.

## 4.1 Extension du maillage à des modèles de Terre

Nous avons utilisé différents types de représentation de la Terre plus ou moins réalistes au cours de ce travail : des modèles homogènes incompressibles, des modèles homogènes compressibles, des modèles homogènes par couches (compressibles ou incompressibles), ou encore des modèles beaucoup plus réalistes tels que le modèle P.R.E.M. (voir la figure 1.1).

Pour les modèles homogènes, nous avons utilisé un maillage lâche, comportant en tout 448 éléments (4 couches d'éléments, superposées du cube central vers l'extérieur, voir la figure 4.1). Comme nous le verrons ce maillage est suffisamment fin pour les expériences que nous avons menées ici. La zone centrale comporte plus d'éléments car les fonctions solutions tendent rapidement vers zéro en s'approchant du centre de la planète. Le maillage nécessite une plus grande densité de points au centre afin de bien échantillonner les fonctions et les paramètres entrant dans le calcul.

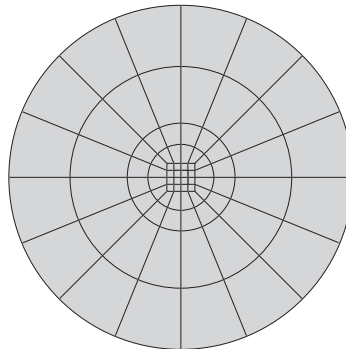


FIG. 4.1: Une coupe transversale de la triangulation élémentaire de la Terre homogène

Le modèle PREM présente de nombreuses interfaces de discontinuités physiques internes. Le maillage de la sphère cubique, présenté dans le chapitre précédent, est bien adapté pour échantillonner ce type de Terre de référence à symétrie radiale. Chaque interface de discontinuité physique est confondue avec une limite de couronne du maillage. Le nombre d'éléments minimum est en conséquence plus important que pour le cas homogène. La figure 4.2 présente une coupe transversale d'un maillage élémentaire de PREM qui contient au total 1408 éléments, dont 96 éléments en surface et 64 dans le cube central. Cette triangulation est la moins précise que nous avons utilisées pour PREM. Elle permet toutefois l'expression de fonctions décomposables en harmoniques sphériques jusqu'au degré environ 40, ce qui est suffisant pour beaucoup d'expériences que nous avons menées notamment en ce qui concerne la marée, dont les degrés essentiels sont le 2 et le 3. Le maillage global, si l'on compte les points GLL (voir la section 3.1.2 dans le chapitre précédent), comporte alors tout de même 1 026 432 points.

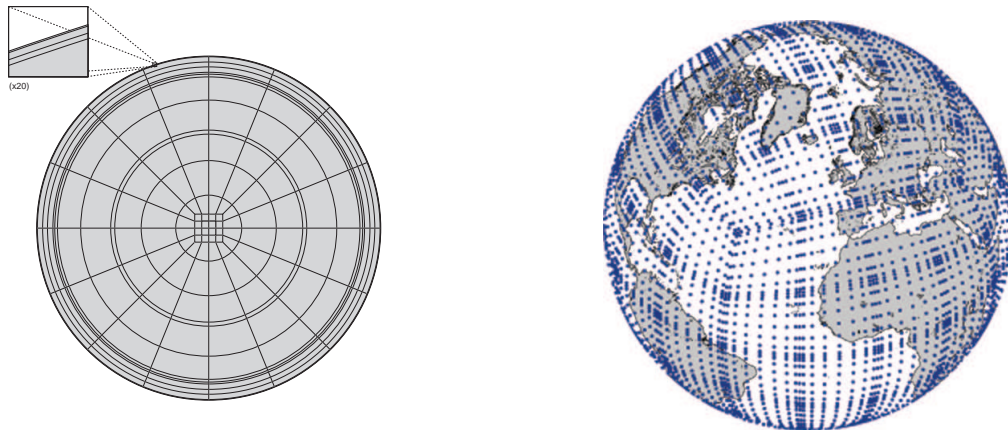


FIG. 4.2: Représentation d'un maillage du modèle de Terre PREM comportant 1408 éléments. La figure de gauche présente la répartition élémentaire interne du modèle selon une coupe transversale (coupe selon le plan de longitude nulle). La figure de droite présente les points de surface du maillage surimposés à une représentation de la Terre avec les continents.

Le modèle PREM possède deux couches fluides, l'océan et le noyau externe. Nous n'avons pas pris en compte la couche océanique comme cela se fait en général en géophysique car l'océan est considéré comme une couche forçante externe. Le modèle numérique que nous avons réalisé n'est pas encore adapté à prendre en compte les fluides, le noyau externe est donc pour l'instant modélisé comme un solide élastique dont la rigidité tend vers zéro. Nous verrons que cela n'a qu'un très faible impact pour ce qui nous intéresse ici.

## 4.2 La gravito-élasticité classique (État 1)

### 4.2.1 Nombres de Love

La méthode la plus classique pour résoudre le système de la gravito-élasticité est modale. Les fonctions et les paramètres du problème sont décomposés sur des bases d'harmoniques sphériques, le système à résoudre se simplifie en un système différentiel d'ordre 1 ne dépendant que de la position radiale  $r$ .

Les variables décomposées dans la pratique sont le déplacement, les tractions radiales, le potentiel et la variable  $\xi$  qui, rappelons le, se rapporte à la gravité (voir le chapitre 2 pour les

notations). On a, en tout point  $(r, \theta, \varphi)$  :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l y_{1l}(r) \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \vec{e}_r + r y_{3l}(r) \vec{\nabla}^{\Sigma} \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) - y_{7l}(r) \vec{r} \wedge \vec{\nabla}^{\Sigma} \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \\ \vec{e}_r \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l y_{2l}(r) \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \vec{e}_r + r y_{4l}(r) \vec{\nabla}^{\Sigma} \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) - y_{8l}(r) \vec{r} \wedge \vec{\nabla}^{\Sigma} \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \\ -(\phi_1^E + V) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l y_{5l}(r) \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \\ \vec{e}_r \cdot (\xi + \vec{\nabla} V) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l y_{6l}(r) \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi)\end{aligned}$$

La convention de signe classiquement employée pour le potentiel de gravité dans le système des "y<sub>i</sub>" est opposée à celle que nous avons employée jusqu'ici, comme le montre la relation 4.1. Les potentiels d'attraction gravitationnelle sont négatifs dans notre approche, contrairement à ce qui est classiquement défini en géodésie.  $V$  est le potentiel volumique extérieur dont est dérivée la force externe,  $\vec{f}^E = -\rho_o \vec{\nabla} V$ . On le décompose :

$$V = - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l V_{lm} \left(\frac{r}{a}\right)^l \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \quad (4.1)$$

Les équations de la gravito-élasticité (équations 2.26 et 2.29) peuvent alors se mettre sous la forme d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 en  $r$ . Pour chaque couple  $(l, m)$ , on a à résoudre le système des "y<sub>i</sub>" :

$$\frac{d}{dr} y_i(r) = A_{ij}(r) y_j(r) \quad \text{pour} \quad (i, j) = 1..8 \quad (4.2)$$

Notons que dans le cas présenté ci-dessus les  $y_i$  ne dépendent que du degré  $l$ . La symétrie sphérique de la Terre de référence impose une dégénérescence de la solution selon l'ordre  $m$ .

Augustus E.H. Love, au début du vingtième siècle, montra que la réponse de la planète à un potentiel volumique externe peut-être exprimée simplement en surface par un ensemble de nombres sans dimensions, appelés ultérieurement nombres de Love (Love, 1911). Ces nombres lient linéairement le potentiel externe et les différentes quantités qui caractérisent la réponse de la planète.

On note  $h_l$  et  $k_l$  les nombres de Love, et  $l_l$  le nombre de Shida tels que :

$$y_{1l}(a) = h_l \frac{V_{lm}}{g_o} \quad (4.3)$$

$$y_{3l}(a) = l_l \frac{V_{lm}}{g_o} \quad (4.4)$$

$$y_{5l}(a) = (1 + k_l) V_{lm} \quad (4.5)$$

$h_l$  caractérise le déplacement normal à la surface de la Terre, et  $l_l$  le déplacement tangentiel ( $g_o$  est la norme de la gravité moyenne de surface).  $k_l$  est le nombre de Love qui caractérise la perturbation de potentiel de gravité en surface.

Ces quantités nous permettront de comparer nos solutions avec les solutions modales. La méthode en éléments spectraux ne détermine pas les nombres de Love explicitement, mais il est possible de les calculer indirectement à partir des solutions numériques, en appliquant des transformées de Legendre discrètes sur les points de surface du maillage.

### 4.2.2 La marée solide

La première source externe qui nous intéresse est l'attraction de marée. Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 1, la marée est due principalement à l'attraction de la Lune et du Soleil. Cette attraction est caractérisée par un potentiel d'attraction  $V$  qui se décompose en différentes ondes de périodes différentes. On distingue principalement les ondes semi-diurnes, diurnes et longues périodes.

La marée est décrite principalement avec les coefficients de degrés 2 et 3 du développement en harmoniques sphériques de  $V$ . Nous avons choisi de nous intéresser à l'onde de marée lunaire semi-diurne  $M_2$  afin de valider notre calcul. Cette dernière est la plus importante en amplitude sur la Terre, elle présente une période  $T_{M_2} = 12h27$ .

Le potentiel de l'onde  $M_2$  s'écrit (voir les notations sur les harmoniques sphériques) :

$$V(\vec{x}, t) = -V_{22} \left( \frac{r}{a} \right)^2 (Y_{22}^c(\theta, \varphi) \cos(\omega_2 t) - Y_{22}^s(\theta, \varphi) \sin(\omega_2 t)) \quad (4.6)$$

avec  $\omega_2 = 2\pi/T_{M_2}$  et  $V_{22} = \frac{M_L G a^2}{4R_L^3}$  ( $M_L$  est la masse de la Lune et  $R_L$  est la distance moyenne entre le centre de masse de la Lune et le centre de masse de la Terre)

On applique arbitrairement la force de marée à un instant  $t$  donné. On résout le système à l'aide du programme en éléments spectraux, on obtient ainsi le déplacement et le potentiel sur un ensemble de points discrets de la planète à l'instant  $t$ . De cette solution arbitraire on peut alors extraire les nombres de Love qui eux sont indépendants de l'amplitude du potentiel externe (par décomposition en harmoniques sphériques de la solution numérique à l'aide de la transformée de Legendre discrète décrite dans l'annexe C.1). Le tableau 4.1 présente nos résultats comparés à ceux antérieurs pour un modèle de Terre homogène incompressible, un modèle de Terre homogène compressible et pour PREM.

### Cas d'une Terre homogène

L'intérêt de valider nos solutions avec un modèle homogène tient au fait que nous disposons d'une solution analytique à laquelle comparer nos résultats. On peut donc directement mettre en évidence la précision du modèle numérique.

Dans le cas d'une Terre incompressible, les  $y_i(r)$  ont des solutions simples (des sommes de puissances de  $r$ ). Connaissant la masse volumique  $\rho_o$  et la rigidité  $\mu$ , on peut alors déterminer les nombres de Love de degré 2 :

$$h_2 = \frac{5}{2} \frac{1}{1 + \bar{\mu}}, \quad l_2 = \frac{3}{4} \frac{1}{1 + \bar{\mu}}, \quad k_2 = \frac{3}{2} \frac{1}{1 + \bar{\mu}} \quad (4.7)$$

avec  $\bar{\mu} = \frac{19}{2} \frac{\mu}{\rho_o g_o a}$ ,  $g_o = \frac{4}{3} \pi G \rho_o a$  la gravité de surface et  $a$  le rayon de la planète.

Le cas compressible est un peu plus complexe car les solutions correspondent à des sommes de fonctions de Bessel (Love, 1911). Les solutions compressibles présentées dans le tableau 4.1 sont issues d'un calcul réalisé par Marianne Greff sur Maple.

	$h_2$	$l_2$	$k_2$
<i>Terre homogène incompressible</i>			
Solution analytique	0.600860	0.180258	0.360516
Solution en éléments spectraux	0.600954	0.180224	0.360525
Erreur relative	0.015%	0.019 %	0.002%
<i>Terre homogène compressible</i>			
Solution analytique	0.62972	0.16966	0.36309
Solution en éléments spectraux	0.62987	0.16970	0.36318
Erreur relative	0.02%	0.02%	0.02%
<i>P.R.E.M.</i>			
Solution antérieure	0.603	0.084	0.298
Solution en éléments spectraux	0.600	0.084	0.296
Écart absolu	0.003	< 0.001	0.002

TAB. 4.1: Comparaison entre les solutions en éléments spectraux et les solutions des travaux antérieurs pour la marée  $M_2$ . Les paramètres utilisés pour la Terre sphérique homogène incompressible sont : le rayon  $a = 6371$  km, le module de rigidité  $\mu = 1.15 \times 10^{11}$  Pa et la densité  $\rho_o = 5520$  kg.m<sup>-3</sup>. Les mêmes paramètres sont utilisés pour le cas compressible avec de plus  $\lambda = 4.05 \times 10^{11}$  Pa.

Comme le montre la table, les résultats sont très proches. L'erreur relative, de l'ordre de 0.01%, est liée au maillage qui est ici très lâche en surface (une partie de l'erreur du cas compressible provient aussi de la solution Maple, ce qui explique que les erreurs relatives pour le cas incompressible soient meilleures).

On notera toutefois que pour réaliser l'expérience incompressible avec notre modèle en éléments spectraux, nous avons dû faire une approximation. Le modèle numérique est fait pour un solide élastique compressible. Nous avons imposé la condition d'incompressibilité en fixant le module de compressibilité à une valeur arbitrairement élevée (pour un paramètre de Lamé  $\lambda = 10^{14}$  Pa en général) de façon à faire tendre notre solution compressible vers la solution incompressible. Néanmoins l'erreur relative que l'on observe reste très faible, cette approximation n'a donc qu'un effet mineur sur les solutions ici présentes. Notons que cette approximation a naturellement plus d'incidences sur les nombres de Love de déplacement ( $h_2$  et  $l_2$ ) que sur le nombre de Love lié au potentiel ( $k_2$ ).

### Cas de PREM

La solution calculée par les méthodes modales, dans le cas de PREM, est arrondie typiquement à 3 chiffres derrière la virgule. Comparer notre solution et les solutions modales en terme d'erreur relative n'a donc pas forcément de sens (notamment pour  $l_2$  ici, qui ne présente pas assez de chiffres significatifs). Nous avons donc indiqué ici l'écart absolu entre les deux solutions. Cet écart bien que petit, n'est pas tout à fait négligeable. Nous l'avons précisé plus haut, nous modélisons la partie fluide du noyau externe dans PREM en imposant un  $\mu$  très petit mais non nul. L'écart que l'on observe ici est dû à cette approximation. On voit ici que notre modélisation du noyau externe fluide n'a qu'un impact relatif dans la réponse de marée solide de la planète (à peu près 0.7% d'erreur relative sur les nombres de Love, en se basant sur  $h_2$  et  $k_2$ ) qui est, comme nous le verrons, du même ordre de grandeur que

l'impact de l'ellipticité. Nous verrons aussi par la suite que cet écart n'a aucune incidence sur la détermination de l'influence des variations latérales dans la réponse de marée solide de la planète.

### 4.2.3 Les surcharges de surface

Les surcharges de surface qui agissent sur Terre sont principalement dues à l'atmosphère et aux océans. On les modélise classiquement comme des couches minces appliquées en surface de la planète et possédant une masse volumique superficielle donnée  $\sigma_a$  qui varie avec le temps (le climat et les courants océaniques). Cette distribution de densité agit de deux façons sur la planète :

- un effet de pression appliquée sur la surface de la Terre, par exemple la pression atmosphérique  $p_a$
- un effet d'attraction volumique que l'on représentera par un potentiel externe  $V_a$  (ou encore noté  $V$  plus haut).

Ces deux effets, étant liés, se compensent globalement :

$$\int_{\Omega} \rho_o \vec{\nabla} V_a d\Omega = - \int_{\partial\Omega} p_a \vec{n} dS \quad (4.8)$$

On note  $V_{lm}$ ,  $P_{lm}$  et  $\sigma_{lm}$  les coefficients d'harmoniques sphériques du potentiel externe, de la pression de surface et de la masse volumique surfacique. On peut montrer (Wahr et al., 1998) que ces coefficients sont liés par les relations :

$$V_{lm} = -\frac{3}{\tilde{\rho}} \frac{1}{2l+1} P_{lm} \quad \text{et} \quad P_{lm} = \sigma_{lm} g_o$$

( $\tilde{\rho}$  est la masse volumique moyenne de la planète et  $g_o$  la gravité moyenne de surface).

On notera que l'atmosphère et l'océan peuvent présenter un terme de degré 1 dans leur distribution de densité surfacique (et donc dans le potentiel de surcharge). Nous avons vu que dans le cas de la marée ce degré 1 n'est pas possible car il engendrerait une translation rigide de la Terre. Cet effet n'a pas lieu ici car la force totale agissant sur la planète (et donc sur son centre de masse) est nulle (cf 4.8). Toutefois résoudre la gravito-élasticité pour le degré 1 demande une relation supplémentaire pour conserver la position du centre de masse de la planète (Farrell, 1972; Greff-Lefftz & Legros, 1997). D'après le théorème de Mc Cullagh (Munk & MacDonald, 1960), cette relation se traduit simplement par une nouvelle condition aux limites en potentiel  $y_5(a) = 0$  pour  $l = 1$ . Nous traitons par conséquent ce degré indépendamment des autres composantes de la surcharge pour le moment.

Nous avons appliqué une surcharge de pression arbitraire sur le modèle PREM ( $P_{lm}$  pour tout  $(l, m)$ ,  $l$  allant de 1 à 30) afin de déterminer un ensemble de nombres de Love de surcharges et de les comparer à ceux préalablement calculés. La table 4.2 présente les 30 premiers nombres de Love de surcharges de PREM, ceux calculés par notre méthode, ainsi que les  $k_l$  proposés par Wahr et al. (1998). Ces résultats ont été en partie obtenus par Florence Levy lors de son stage de première année de Magistère sous ma direction au Laboratoire de Gravimétrie et Géodynamique à l'Institut Physique du Globe de Paris (Levy, 2004). On note que les deux solutions sont très proches. À nouveau les nombres de Love calculés dans les travaux

$l$	Notre solution			Solution modale	Écart absolu
	$h_l$	$l_l$	$k_l$	$k_l$	$\Delta$
1	-1.286	-0.896	-1.000	-	-
2	-0.989	0.023	-0.304	-0.303	0.001
3	-1.050	0.069	-0.195	-0.194	0.001
4	-1.053	0.059	-0.134	-0.132	0.002
5	-1.087	0.046	-0.105	-0.104	0.001
6	-1.145	0.039	-0.090	-0.089	0.001
7	-1.214	0.034	-0.082	-0.081	0.001
8	-1.285	0.032	-0.077	-0.076	0.001
9	-1.356	0.030	-0.073	-0.072	0.001
10	-1.425	0.028	-0.069	-0.069	$< 10^{-3}$
11	-1.491	0.027	-0.066	-0.067	0.001
12	-1.554	0.026	-0.064	-0.064	$< 10^{-3}$
13	-1.614	0.026	-0.062	-0.062	$< 10^{-3}$
14	-1.671	0.025	-0.060	-0.060	$< 10^{-3}$
15	-1.726	0.025	-0.058	-0.058	$< 10^{-3}$
16	-1.779	0.025	-0.057	-0.057	$< 10^{-3}$
17	-1.829	0.024	-0.055	-0.055	$< 10^{-3}$
18	-1.876	0.024	-0.054	-0.054	$< 10^{-3}$
19	-1.921	0.024	-0.052	-0.052	$< 10^{-3}$
20	-1.964	0.023	-0.051	-0.051	$< 10^{-3}$
21	-2.005	0.023	-0.050	-0.050	$< 10^{-3}$
22	-2.044	0.023	-0.049	-0.049	$< 10^{-3}$
23	-2.081	0.023	-0.048	-0.048	$< 10^{-3}$
24	-2.116	0.022	-0.047	-0.047	$< 10^{-3}$
25	-2.149	0.022	-0.045	-0.046	0.001
26	-2.180	0.022	-0.044	-0.044	$< 10^{-3}$
27	-2.210	0.021	-0.043	-0.043	$< 10^{-3}$
28	-2.239	0.021	-0.043	-0.042	0.001
29	-2.266	0.021	-0.042	-0.041	0.001
30	-2.291	0.021	-0.041	-0.040	0.001

TAB. 4.2: Les 30 premiers nombres de Love de surcharge de PREM, déterminés par notre méthode et comparés aux  $k_l$  proposés par Wahr et al. (1998).



antérieurs sont arrondis à 3 chiffres derrière la virgule. Nous présentons l'écart absolu entre cette solution et la nôtre (toutes arrondies à 3 chiffres derrière la virgule). On voit que cet écart est inférieur à la limite d'arrondi pour les degrés intermédiaires. Il est de 0,001 pour les plus bas et les plus hauts degrés (voir de 0.002 pour le degré 4). Les grandes longueurs d'ondes de la surcharge déforment la planète plus profondément que les courtes longueurs d'ondes, la déformation pouvant alors atteindre le noyau externe. Le noyau n'étant pas modélisé comme un vrai fluide mais comme un solide élastique non rigide, notre solution est donc légèrement différente de celle de Wahr et al. (1998) pour ces bas degrés. Cet effet disparaît pour les degrés supérieurs qui déforment les parties plus superficielles de la planète. L'écart observé sur les plus hauts degrés est dû lui au maillage. On voit qu'au delà du degré 28 le maillage que nous avons choisi échantillonne moins précisément le signal. Il faudra naturellement adapter le maillage à la résolution du problème qui nous intéresse.

### 4.3 La perturbation de la gravito-élasticité (État 1')

Il s'agit ici de résoudre le système perturbé de la gravito-élasticité, composé des équations 2.69 et 2.70. Dans le but de valider notre calcul, nous nous sommes reportés sur un problème connu : l'impact de l'ellipticité sur la marée solide. Nous travaillons par rapport à une Terre de référence sphérique, dans cette configuration la prise en compte de l'ellipticité introduit des variations latérales de densité et de paramètres rhéologiques et une topographie aux interfaces de très grande longueur d'onde. Nous faisons l'hypothèse que l'ellipticité n'introduit pas de précontraintes non hydrostatiques dans le calcul. Il nous a été impossible de les considérer au cours de la validation, car personne, à notre connaissance, ne les a jamais prises en compte dans un calcul.

L'impact de l'ellipticité sur la marée solide est un problème déjà ancien. Love développa sa solution analytique pour une Terre homogène incompressible. Dans le cas homogène, l'ellipticité n'introduit qu'un changement de forme globale de la planète. Toutefois ce changement de forme engendre une perturbation de la gravité et de la pression interne de la planète qui suffisent à tester le modèle en lui-même. Nous avons repris et reformulé sous forme lagrangienne la solution de Love afin de l'exploiter aisément (l'article est présenté en annexe D.1).

Le test a été ensuite fait sur un modèle plus réaliste, à savoir PREM. Nous présentons cette phase de la validation dans le chapitre 5 car elle nous a finalement permis de soulever quelques interrogations qui ne sont plus de l'ordre de la validation du modèle.

#### 4.3.1 La rotation et l'ellipticité

Considérons une Terre homogène incompressible de densité  $\rho_o$  et de module de rigidité  $\mu$ . La planète possède un rayon  $a$  et une gravité de surface de  $g_o = \frac{GM}{a^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho_o a$ . Soit  $\vec{\Omega}_R$  le vecteur rotation de la Terre de norme  $\Omega_R$ . La rotation engendre une force centrifuge qui agit en tout point de la planète. Elle s'écrit (par unité de volume) :

$$\vec{f}_c(\vec{x}) = -\rho_o \vec{\Omega}_R \wedge \vec{\Omega}_R \wedge \vec{x} = -\rho_o \vec{\nabla} \Psi_o$$

Où  $\Psi_o$  désigne le potentiel centrifuge ou potentiel de rotation. Si la rotation est uniforme et l'axe de rotation confondu avec l'axe vertical du repère terrestre alors le potentiel centrifuge s'exprime simplement  $\Psi_o = -\frac{\Omega_R^2 r^2}{3} \left[ 1 - \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right]$ . Le terme dépendant de la colatitude

correspond à l'harmonique sphérique zonale de degré 2 :  $\mathcal{Y}_2^0(\theta, \varphi) = P_2^0(\cos \theta) = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$  (où  $P_2^0$  est le polynôme de Legendre zonal de degré 2). Le potentiel de rotation se décompose donc en deux termes qui agissent sur la Terre de façons distinctes : le terme radial génère une surpression radiale interne et le terme de degré 2 tend à déformer la planète ellipsoïdalement.

Deux approches sont possibles pour modéliser cet impact de la rotation sur la planète :

- imposer le potentiel de rotation en entier comme source de perturbation externe du modèle de référence de la Terre. Le modèle de référence sphérique étant celui présenté dans 4.2.2.
- modifier le modèle de référence sphérique de façon à ce qu'il prenne en compte la partie du potentiel de rotation dont l'effet n'a pas d'incidence sur la géométrie de la planète de référence. Cela revient à développer un modèle de Terre de référence déjà soumis à l'action du potentiel  $-\frac{\Omega_R^2 r^2}{3}$  et n'imposer comme source de perturbation que la partie zonale  $\tilde{\Psi}_o = \frac{\Omega_R^2 r^2}{3} P_2^0$ . Cette approche est celle que nous avons choisie, car elle est bien adaptée aux études géophysiques dans lesquelles on se réfère en général à des modèles moyens sphériques de Terre issus d'observations globales (tels que le modèle PREM). Ces observations ne permettent pas en effet de distinguer la part due à la rotation dans la structure interne radiale de la Terre. Notons que cette approche correspond à celle de Smith (1974).

La Terre ellipsoïdale obéit à l'équilibre mécanique et gravitationnel 2.61 et 2.62 :

$$\vec{\nabla}(p_o + \delta p_o) = -(\rho_o + \delta \rho_o) \vec{\nabla}(\phi_o + \delta \phi_o - \frac{\Omega_R^2 r^2}{3} + \tilde{\Psi}_o) \quad (4.9)$$

$$\Delta(\phi_o + \delta \phi_o) = 4\pi G(\rho_o + \delta \rho_o) \quad (4.10)$$

Le potentiel de gravité de référence est choisi ici égal à  $\tilde{\phi}_o = \phi_o - \frac{\Omega_R^2 r^2}{3}$ . La Terre de référence sphérique obéit aux relations 2.18 et 2.19 en remplaçant  $\phi_o$  par  $\tilde{\phi}_o$ , ce qui dans le cas d'une Terre homogène, nous permet de déterminer :

$$\tilde{\phi}_o = \frac{g_o a}{2} \left[ \frac{r^2}{a^2} - 3 \right] - \frac{\Omega_R^2 r^2}{3} \quad (4.11)$$

$$p_o = \frac{\rho_o g_o a}{2} \left[ 1 - \frac{r^2}{a^2} \right] - \frac{\rho_o \Omega_R^2 a^2}{3} \left[ 1 - \frac{r^2}{a^2} \right] \quad (4.12)$$

La prise en compte du terme radial du potentiel de rotation modifie légèrement les nombres de Love de la Terre sphérique de référence (voir ceux exprimés dans la table 4.1). Pour une Terre homogène incompressible, les nombres de Love sont modifiés des quantités :

$$+0.83 \times 10^{-3} \text{ pour } h_2, +0.25 \times 10^{-3} \text{ pour } l_2, +0.50 \times 10^{-3} \text{ pour } k_2.$$

À l'échelle de temps qui caractérise la rotation, la déformation de la planète est quasi-fluide. La déformation fluide zonale de degré 2 obéit à l'équation de Clairaut (équation 1.1), ce qui veut dire qu'elle ne dépend que de la stratification en densité et de la vitesse angulaire  $\Omega_R$  de la planète. On note  $\alpha$  l'aplatissement hydrostatique de la Terre, c'est à dire l'écart

relatif entre les rayons équatorial et polaire de la planète ellipsoïdale. Dans le cas homogène  $\alpha$  est constant quelque soit la profondeur ( $\alpha = \frac{5}{4} \frac{\Omega_R^2 a}{g_o}$ ) et nous avons :

$$\begin{cases} \delta\phi_o + \tilde{\Psi}_o &= \frac{2}{3} \alpha g_o r P_2^0 \\ \delta p_o &= -\frac{2}{3} \alpha \rho_o g_o r P_2^0 \end{cases} \quad (4.13)$$

et la topographie en surface :  $\delta d = -\frac{2}{3} \alpha a P_2^0$

### 4.3.2 Solution analytique de la perturbation due à l'ellipticité de la réponse de marée $M2$ d'une Terre homogène incompressible

#### Système d'équations et solutions

Dans la section précédente, on a déterminé la réponse de marée  $M2$  (dû au potentiel excitateur de coefficient  $V_{22}$ ) d'une planète sphérique. La prise en compte de l'ellipticité perturbe cette réponse, ce qui se traduit par l'ajout d'une perturbation de déplacement  $\delta\vec{u}$  et d'une perturbation de potentiel  $\delta\phi_1^E$  dans le calcul de la marée solide (voir chapitre 2). Ces variables obéissent aux équations 2.69 et 2.70.

On décompose les perturbations importantes en harmoniques sphériques, à savoir les perturbations de déplacement, de tractions radiales, de potentiel et de la variable  $\xi$  qui se rapporte à la gravité (voir chapitre 2). À cela on ajoute une dernière quantité qui couple le déplacement de marée non perturbé à la perturbation de pression interne de référence  $\delta P_0$ .

$$\begin{aligned} \delta\vec{u} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \delta y_1^{lm}(r) \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \vec{e}_r + r \delta y_3^{lm}(r) \vec{\nabla}^\Sigma \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) - \delta y_7^{lm}(r) \vec{r} \wedge \vec{\nabla}^\Sigma \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \\ \vec{e}_r \cdot \delta \vec{\mathbf{T}}_1^L &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \delta y_2^{lm}(r) \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \vec{e}_r + r \delta y_4^{lm}(r) \vec{\nabla}^\Sigma \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) - \delta y_8^{lm}(r) \vec{r} \wedge \vec{\nabla}^\Sigma \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \\ -\delta\phi_1^E &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \delta y_5^{lm}(r) \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \\ \vec{e}_r \cdot \delta\xi &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \delta y_6^{lm}(r) \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \\ \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \delta P_0 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l x_l^m(r) \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

Les équations perturbées de la gravito-élasticité (équations 2.69 et 2.70) peuvent alors se mettre sous la forme d'un système différentiel du premier ordre en  $r$ , à résoudre pour chaque couple  $(l, m)$  :

$$\frac{d}{dr} \delta y_i(r) = A_{ij}(r) \delta y_j(r) + f_i(r) \quad \text{pour} \quad (i, j) = 1..8$$

où  $A_{ij}(r)$  est la matrice du système des  $y_i$  non perturbé. Elle dépend de la densité, du module de cisaillement et de la compressibilité radiale.  $f_i(r)$  correspond aux termes  $F_1$  et  $F_2$  des équations 3.9 et 3.10. On a pour chaque  $(l, m)$  :  $\vec{f}^{lm} = [0, \partial_r x_l^m(r), 0, x_l^m(r)/r, 0, 0, 0, 0]$ .

Dans le cas d'une Terre homogène incompressible, on peut montrer (Love, 1911) que les solutions sont simplement des fonctions en puissances de  $r$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta y_1 = \delta C_3 r^{l+1} + \delta C_4 r^{l-1} \\ \delta y_3 = \frac{l+3}{l(l+1)} \delta C_3 r^{l+1} + \frac{\delta C_4}{l} r^{l-1} \\ \delta y_7 = \delta C_7 r^l \\ \delta y_5 = \delta C_5 r^l \\ \delta y_4 = 2\mu \left[ \frac{l+2}{l+1} \delta C_3 r^l + \frac{l-1}{l} \delta C_4 r^{l-2} \right] \\ \delta y_8 = \mu(l-1) \delta C_7 r^{(l-1)} \\ \delta y_2 = 2\mu \left[ \frac{l^2-l-3}{l} \delta C_3 r^l + (l-1) \delta C_4 r^{l-2} \right] + \frac{\rho g_0}{a} \left[ \delta C_3 r^{l+2} + \delta C_4 r^l \right] - \rho \delta C_5 r^l - x_l^m(r) \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Les constantes  $\delta C_3$ ,  $\delta C_4$ ,  $\delta C_5$  et  $\delta C_7$  dépendant du degré  $l$  et de l'ordre  $m$  considéré. Ces constantes sont déterminées connaissant les conditions aux limites 2.78, 2.81 et 2.82. Le détail des calculs est présenté dans l'article en annexe D.1.

La prise en compte de l'ellipticité dans la marée  $M_2$  développe un couplage entre les harmoniques sphériques  $\mathcal{Y}_2^0$  et  $\mathcal{Y}_2^2$ , les seuls modes de déformations qui seront sollicités sont donc les modes de degrés et d'ordres d'harmoniques  $(l, m) = (2, 2)$ ,  $(4, 2)$  et un mode toroïdal  $(3, 2)$ .

On voit ici que les  $\delta y_i$  dépendent du degré, mais aussi de l'ordre d'harmonique sphérique. L'introduction de "variations latérales", traduite ici par l'ajout d'une topographie en surface, a levé la dégénérescence que l'on avait dans le cas où la Terre était à symétrie radiale.

En surface, sur la sphère de référence, on introduit les perturbations de nombres de Love :

$$\begin{aligned} \delta \vec{u} &= \frac{V_{22}}{g_0} \left\{ \left( \delta h_2 P_2^2 + \delta h_4 P_4^2 \right) \cos(\sigma t + 2\varphi) \vec{e}_r + r \vec{\nabla}^\Sigma \left[ \left( \delta l_2 P_2^2 + \delta l_4 P_4^2 \right) \cos(\sigma t + 2\varphi) \right] \right. \\ &\quad \left. - \vec{r} \wedge \vec{\nabla}^\Sigma \left[ \delta l_3 P_3^2 \sin(\sigma t + 2\varphi) \right] \right\} \\ -\delta \Phi_1 &= V_{22} \left[ \left( \delta k_2 P_2^2 + \delta k_4 P_4^2 \right) \cos(\sigma t + 2\varphi) \right] \end{aligned}$$

On montre que la solution des nombres de Love perturbés sur la surface de référence est :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \delta h_2 = \frac{1}{399} \alpha \frac{(653\bar{\mu}+1349)}{(1+\bar{\mu})^2} & \delta h_4 = -\frac{4}{35} \alpha \frac{(68\bar{\mu}+95)}{(1+\bar{\mu})(51\bar{\mu}+38)} & \\ \delta l_2 = \frac{1}{3990} \alpha \frac{(3365\bar{\mu}+5453)}{(1+\bar{\mu})^2} & \delta l_4 = -\frac{1}{315} \alpha \frac{(612\bar{\mu}+589)}{(1+\bar{\mu})(51\bar{\mu}+38)} & \delta l_3 = \frac{1}{15} \alpha \frac{1}{(1+\bar{\mu})} \\ \delta k_2 = \frac{2}{665} \alpha \frac{(127\bar{\mu}+475)}{(1+\bar{\mu})^2} & \delta k_4 = \frac{34}{15} \alpha \frac{\bar{\mu}}{(1+\bar{\mu})(51\bar{\mu}+38)} & \end{array} \right. \quad (4.15)$$

avec  $\alpha$  le paramètre d'aplatissement elliptique et  $\bar{\mu} = \frac{19}{2} \frac{\mu}{\rho_0 g_0 a}$ .

### Solutions exprimées sur l'ellipsoïde

La réponse de marée d'une planète ellipsoïdale est plus parlante si l'on définit le déplacement sur la surface ellipsoïdale et que l'on détermine le potentiel dans la partie extérieure de la planète (le "free space potential" :  $\delta\phi^{free} = \delta\phi^+$ , pour rappel  $[\delta\phi]_{\pm}^{\pm} = -\delta d [\partial_n \phi]_{\pm}^{\pm}$ ). On note classiquement les nombres de Love perturbés  $\Delta h_0, \Delta h_+, \Delta\omega_+$  exprimés sur la surface elliptique et  $\Delta k_0, \Delta k_+$  ceux caractérisant le "free space potential". Les perturbations de déplacement et de potentiel s'expriment alors :

$$\begin{aligned} \delta\vec{u}^{ell} &= \frac{V_{22}}{g_0} \left\{ \left( \Delta h_0 P_2^2 + \Delta h_+ P_4^2 \right) \cos(\sigma t + 2\varphi) \vec{n}' \right. \\ &\quad \left. + r \vec{\nabla}^{\Sigma} \left[ \left( \Delta l_0 P_2^2 + \Delta l_+ P_4^2 \right) \cos(\sigma t + 2\varphi) \right] \right. \\ &\quad \left. - \vec{r} \wedge \vec{\nabla}^{\Sigma} \left[ \Delta\omega_+ P_3^2 \sin(\sigma t + 2\varphi) \right] \right\} \\ -\delta\Phi_1^{free} &= V_{22} \left[ \Delta k_0 \left( \frac{a}{r} \right)^3 P_2^2 + \Delta k_+ \left( \frac{a}{r} \right)^5 P_4^2 \right] \cos(\sigma t + 2\varphi) \end{aligned} \quad (4.16)$$

avec  $\vec{n}'$  le vecteur unitaire normal à la surface ellipsoïdale.

### Expression de la perturbation de gravité sur la surface déformée

Il s'agit ici de déterminer l'amplitude de la perturbation de gravité telle qu'elle pourrait être mesurée par un gravimètre posé sur la surface de la planète qui se déforme avec le temps. À  $t$  donné, les points appartenant à la surface déformée  $\partial\Omega^t$  ont comme position :

$$\vec{x} + \delta d \vec{n} + \vec{u}(\vec{x} + \delta d \vec{n}, t) + \delta \vec{u}(\vec{x} + \delta d \vec{n}, t) \quad (4.17)$$

Le déplacement de la surface de référence sphérique est donc en tout point  $\vec{x} \in \partial\Omega$  au temps  $t$  (au premier ordre) :

$$\vec{d} = \delta d \vec{n} + \vec{u}(\vec{x}, t) + \delta \vec{u}(\vec{x}, t) + \delta d \partial_n \vec{u}(\vec{x}, t) \quad (4.18)$$

Sur la surface de référence, le potentiel total est

$$\Phi = [\phi_0 + \delta\phi_0 + \phi_1^E + V_{22} + \delta\phi_1^E]_{r=a}$$

L'attraction totale exprimée sur la surface déformée est donc :

$$\vec{A} = -\vec{\nabla}\Phi - \left( \vec{d} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{\nabla}\Phi \quad (4.19)$$

Un gravimètre mesure l'amplitude de cette gravité localement. Il faut noter que l'orientation de la gravité définit la verticale locale en un point. Cette dernière est parallèle à la normale sortante de l'équipotentielle de gravité qui passe par le point de mesure. Cette normale est définie en annexe, notée  $\vec{n}_g$ . La gravité absolue mesurée en un point de la surface déformée sera donc :

$$g = -\vec{n}_g \cdot \vec{A} = \|\vec{A}\| \quad (4.20)$$

On décompose  $g = g_o + \delta g_o + g_1 + \delta g_1$  en utilisant les notations relatives aux états 0, 0', 1 et 1' de la planète (voir la section 2.2 : *Théorie des perturbations*). La variation temporelle de la gravité due à la marée  $M2$  est  $g_1 + \delta g_1$ , et l'impact de l'ellipticité sur la réponse gravimétrique sera donc  $\delta g_1$  dont l'expression est présentée en annexe.

On a coutume d'exprimer la réponse gravimétrique temporelle à l'aide du facteur gravimétrique. Utilisant la définition de Wahr (1981b), on note  $\delta_2$  le facteur gravimétrique de degré 2 pour une Terre sphérique et  $\delta\delta_2$  et  $\delta\delta_4$  les perturbations des facteurs gravimétriques due à l'ellipticité.

$$g_1 = \frac{2V_{22}}{ga} \delta_2 P_2^2 \cos(\sigma t + 2\varphi) \quad (4.21)$$

$$\delta g_1 = \frac{2V_{22}}{ga} (\delta\delta_2 P_2^2 + \delta\delta_4 P_4^2) \cos(\sigma t + 2\varphi) \quad (4.22)$$

Dans le cas homogène incompressible :

$$\delta_2 = 1 + h_2 - \frac{3}{2}k_2 = 1 + \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \bar{\mu}} \quad (4.23)$$

et

$$\delta\delta_2 = \frac{\alpha}{3990} \frac{1805 + 729\bar{\mu} - 380\bar{\mu}^2}{(1 + \bar{\mu})^2} \quad \delta\delta_4 = -\frac{\alpha}{210} \frac{2166 + 4037\bar{\mu} + 1836\bar{\mu}^2}{(1 + \bar{\mu})(51\bar{\mu} + 38)} \quad (4.24)$$

### 4.3.3 Solution numérique de la perturbation d'ellipticité de la réponse de marée $M2$ d'une Terre homogène incompressible

Pour une Terre homogène incompressible de rayon  $a = 6371$  km, de masse volumique  $\rho = 5520$  kg/m<sup>3</sup>, de rigidité  $\mu = .115 \times 10^{12}$  Pa et d'aplatissement  $\alpha = \frac{1}{232}$ , on trouve :

$10^{-3}$	Solution analytique	Solution numérique	erreur relative
$\Delta h_0$	1.58713	1.58725	-0.0076 %
$\Delta h_+$	-0.33221	-0.33223	-0.0060 %
$\Delta l_0$	1.07799	1.07795	0.0037%
$\Delta l_+$	-0.063861	-0.063846	0.0235 %
$\Delta\omega_+$	0.224459	0.224460	0.0005 %
$\Delta k_0$	2.13624	2.13625	-0.0005 %
$\Delta k_+$	-0.406726	-0.406729	-0.0007 %

TAB. 4.3: Comparaison des nombres de Love perturbés et des facteurs gravimétriques perturbés déterminés par la solution analytique et par notre solution numérique

On retrouve bien les nombres de Love perturbés. La précision de notre solution est ici très bonne, particulièrement pour les nombres de Love liés au potentiel, à l'image du cas non

perturbé. On notera par ailleurs que pour les valeurs numériques ci-dessus, on obtient les facteurs gravimétriques perturbés et non perturbés :

$$\delta_2 = 1.0600723 \quad \delta\delta_2 = 0.0194 \times 10^{-3} \quad \delta\delta_4 = -0.8239 \times 10^{-3} \quad (4.25)$$

En faisant le calcul on verrait que la perturbation de marée gravimétrique mesurée en surface et due essentiellement à l'ellipticité serait ici de maximum 250 nGal environ.





# Chapitre 5

## Résultats et perspectives

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à la marée solide d'une Terre homogène et à la perturbation due à l'ellipticité. Le but était de valider le programme en éléments spectraux en se reportant à un problème connu, lié à la forme hydrostatique de la planète. Bien que le programme soit avant tout dédié à la caractérisation des perturbations dues à la structure non hydrostatique de la Terre sur sa réponse basse fréquence, l'étude de l'ellipticité nous a aussi permis d'obtenir de premiers résultats parallèlement à la phase de validation. Nous présentons dans ce chapitre ces premiers résultats, ainsi que les perspectives futures que nous ouvrent ce travail. La majeure partie de ce chapitre est résumée dans le deuxième article présenté en annexe D.2.

En première partie nous discutons de la perturbation d'ellipticité sur la marée solide pour le modèle de Terre PREM. En deuxième partie, nous déterminons l'impact de l'ellipticité sur les surcharges de surface, et nous prenons l'exemple des variations des coefficients zonaux  $J_l$  du géopotential induites par la pression atmosphérique. Enfin, nous présentons une expérience en cours d'élaboration prenant en compte certains aspects de la convection du manteau.

### 5.1 L'impact de l'ellipticité sur la marée

#### 5.1.1 L'effet de la rotation sur PREM

La planète, en rotation, subit en chacun de ses points une force centrifuge qui la déforme. Nous avons vu dans le chapitre précédent que cette force peut s'exprimer à partir d'un potentiel de rotation  $\Psi_o$  qui dépend de la vitesse de rotation de la Terre  $\Omega_R$ . Dans le cas d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe ( $r$  le rayon,  $\theta$  la colatitude) :

$$\Psi_o = -\frac{\Omega_R^2 r^2}{3} \left[ 1 - \mathcal{Y}_2^0 \right] \quad (5.1)$$

$\mathcal{Y}_2^0$  étant l'harmonique sphérique zonale de degré 2 :  $\mathcal{Y}_2^0 = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}$

La Terre, en réponse à la force centrifuge, semble se comporter globalement comme un fluide incompressible en rotation (voir chapitre 1). Sa forme correspond à une équipotentielle du champ de pesanteur. Le potentiel centrifuge présentant deux termes distincts, la réponse de la Terre présente deux aspects indépendants :

- une surpression interne radiale qui résulte de l'action du terme radial  $-\frac{\Omega_R^2 r^2}{3}$ . Notons que si la Terre se déformait comme un fluide compressible, elle subirait de plus une

dilatation globale (une augmentation du rayon moyen de la Terre de l'ordre de 2 km) et les profils radiaux de ses paramètres intrinsèques (densité et paramètres rhéologiques) seraient légèrement modifiés.

- une déformation ellipsoïdale autour de l'axe de rotation, imposée par le terme zonal de degré 2 :  $\frac{\Omega_R^2 r^2}{3} \mathcal{Y}_2^0 = \frac{\Omega_R^2 r^2}{3} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}$ .

PREM est un modèle moyen de la Terre développé à partir d'observations, principalement sismologiques. Bien que PREM soit un modèle prétendument "Symmetric Non Rotating Elastic Isotropic" (Dahlen & Tromp, 1998), nous pensons que sa structure interne prend déjà en compte la surpression radiale due à la force centrifuge citée ci-dessus (de même si la déformation de rotation n'était pas incompressible son rayon moyen engloberait les deux kilomètres dus à la dilatation globale rotationnelle et ses paramètres moyens seraient ceux modifiés). Il nous semble par conséquent plus réaliste de ne considérer que le second terme du potentiel centrifuge comme source de perturbation centrifuge (c'est aussi le mode opératoire suivi par Smith, 1974, et par Wahr, 1981b). On définit, comme dans le chapitre 4, le potentiel centrifuge perturbateur  $\tilde{\Psi}_o = -\frac{\Omega_R^2 r^2}{3} \mathcal{Y}_2^0$ . Cependant, à l'image du traitement 4.3.1, il ne faut pas oublier que les nombres de Love de PREM sont alors légèrement modifiés par l'action de la partie radiale du potentiel de rotation :

$$+0.83 \times 10^{-3} \text{ pour } h_2, +0.25 \times 10^{-3} \text{ pour } l_2, +0.50 \times 10^{-3} \text{ pour } k_2.$$

L'ellipticité (le facteur d'aplatissement de la planète) obéit à l'équation de Clairaut (voir chapitre 1). Nous avons déterminé les solutions de cette équation pour une planète homogène dans le chapitre précédent. La solution est alors simple,  $\alpha$  étant constant. Pour une terre stratifiée, comme c'est le cas pour PREM, la résolution de l'équation n'est plus analytique, et  $\alpha$  dépend du rayon. On résout typiquement cette équation par une méthode de Runge-Kutta (Press et al., 1992). Dans notre cas nous avons utilisé un programme réalisé par Frédéric Chambat. Connaissant  $\rho_o$ , on détermine le déplacement radial  $\delta d$  en tout point du maillage, ainsi que les variables  $\delta\phi_o$  et  $\delta p_o$  qui caractérisent l'état  $O'$  (voir la figure 5.1, et le chapitre 2 pour les notations).

PREM présentant une distribution radiale de densité continue mais non homogène dans chaque couche, la déformation elliptique introduit des variations latérales (des variations non radiales) de densité et de paramètres élastiques. Elles sont dues simplement à la forme ellipsoïdale des surfaces d'égale densité et des surfaces de paramètres élastiques constants.  $\delta d$  étant le déplacement radial, on a en tout point  $\vec{x}$  de  $\Omega$  :

$$\delta\rho_o = -\delta d \partial_r \rho_o, \quad \delta\lambda = -\delta d \partial_r \lambda \quad \text{et} \quad \delta\mu = -\delta d \partial_r \mu \quad (5.2)$$

### 5.1.2 Perturbation d'ellipticité sur la marée solide

Appliquant l'onde de marée M2 comme sollicitation externe (de coefficient d'harmonique sphérique  $V_{22}$  et de fréquence  $\omega_2$ ), nous résolvons le système de la gravito-élasticité perturbé connaissant les perturbations du modèle de référence par l'ellipticité, et la réponse de marée de PREM (voir chapitre 4).

L'ellipticité impose un déplacement zonal de degré 2 à tous les points de la planète, alors que la marée M2 crée des mouvements selon l'harmonique sphérique  $\mathcal{Y}_2^2$ . À l'image du cas homogène dans le chapitre 4, le couplage entre ces deux types de mouvement engendre une

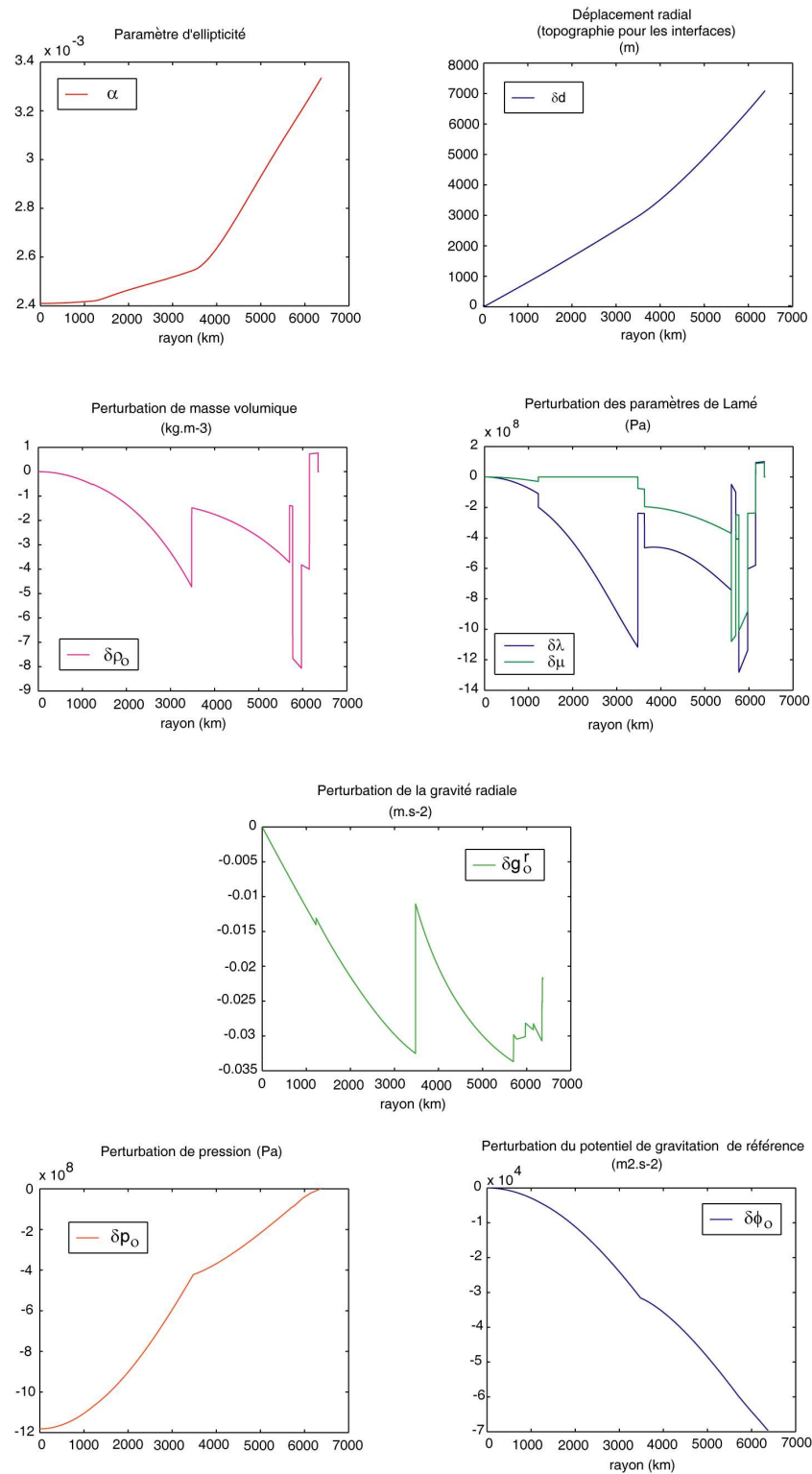


FIG. 5.1: Évolution des différents paramètres perturbés de PREM en fonction du rayon de la Terre (état 0'), déterminé selon un profil de latitude nulle. La perturbation est due à l'ellipticité.

réponse additionnelle de la planète selon les harmoniques  $\mathcal{Y}_2^2$  et  $\mathcal{Y}_4^2$ . Sur la surface ellipsoïdale, les perturbations du déplacement normal et du potentiel de gravité extérieur ("free space potential", voir 4.3.2) peuvent s'exprimer :

$$\delta \vec{u}_n^{ell} = \frac{V_{22}}{g_0} \left( \Delta h_0 P_2^2 + \Delta h_+ \frac{N_{42}}{N_{22}} P_4^2 \right) \cos(\omega_2 t + 2\varphi) \quad (5.3)$$

$$-\delta \Phi_1^{free} = V_{22} \left[ \Delta k_0 \left( \frac{a}{r} \right)^3 P_2^2 + \Delta k_+ \left( \frac{a}{r} \right)^5 \frac{N_{42}}{N_{22}} P_4^2 \right] \cos(\omega_2 t + 2\varphi) \quad \text{pour } r \geq a \quad (5.4)$$

avec  $\Delta h_0$ ,  $\Delta h_+$ ,  $\Delta k_0$  et  $\Delta k_+$  les nombres de Love perturbés (notons que les définitions de  $\Delta h_+$  et  $\Delta k_+$  ne sont pas tout à fait celles du chapitre précédent. Les deux nombres sont multipliés par le rapport de norme  $\frac{N_{42}}{N_{22}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$  dans le but de les comparer, plus loin, aux solutions de Wang 1994 qui ont été calculées avec des harmoniques sphériques normalisées). Les notations pour les nombres  $\Delta k_0$  et  $\Delta k_+$  correspondent aux conventions IERS 2003 (McCarthy & Petit, 2003). Les nombres de Love sont présentés dans le tableau 5.1. Nos solutions sont arrondies à deux chiffres après la virgule et comparées à celles de Wang (1994).

$\times 10^{-3}$	$\Delta h_0$	$\Delta h_+$	$\Delta k_0$	$\Delta k_+$
Solution de Wang (1994)	2.02	-0.29	1.67	-0.56
Solution en éléments spectraux	0.74	-0.30	1.09	-0.57

TAB. 5.1: Comparaison des nombres de Love perturbés de PREM déterminés par Wang (1994) et par notre solution numérique.

Les figures 5.2 et 5.3 présentent la perturbation de déplacement calculée sur l'ellipsoïde et la perturbation de gravité calculée sur la surface déformée. On voit que la perturbation de déplacement a une amplitude maximum (pic à pic) d'environ 0.5 mm (y compris pour le déplacement tangentiel) et la perturbation de gravité a une amplitude maximum (pic à pic) d'environ 500 nGal. Cela correspond à une perturbation d'environ 0,3% à 0,4% sur la réponse de marée de la planète. La perturbation de déplacement est de l'ordre de la précision du programme de mesure VLBI (Very Long Baseline Interferometry), quant à la perturbation de gravité, elle est deux ordres de grandeur supérieure à la précision des gravimètres supra-concteurs. On notera par ailleurs que la gravité fait avant tout ressortir le signal  $(l, m) = (4, 2)$  alors que l'amplitude du déplacement radial présente une répartition selon  $\mathcal{Y}_2^2$ .

### 5.1.3 Écart aux solutions de Wang

Nos solutions  $\Delta h_0$  et  $\Delta k_0$  sont très différentes de celles de Wang (1994). Wang a conservé le terme radial du potentiel centrifuge dans son calcul de l'état 0' contrairement à nous, qui considérons l'effet de ce terme dans le modèle de référence PREM. Les nombres de Love calculés par Wang et ceux calculés ici se réfèrent donc à des modèles de Terre de référence différents. Pour les comparer, il nous faut prendre aussi en compte les contributions du terme radial du potentiel de rotation sur les nombres de Love non perturbés (que nous avons calculés plus haut) et les additionner à nos  $\Delta h_0$  et  $\Delta k_0$ . Cependant les solutions ne sont toujours pas concordantes (notons qu'elles le sont pour le cas homogène incompressible, voir Wang, 1994,

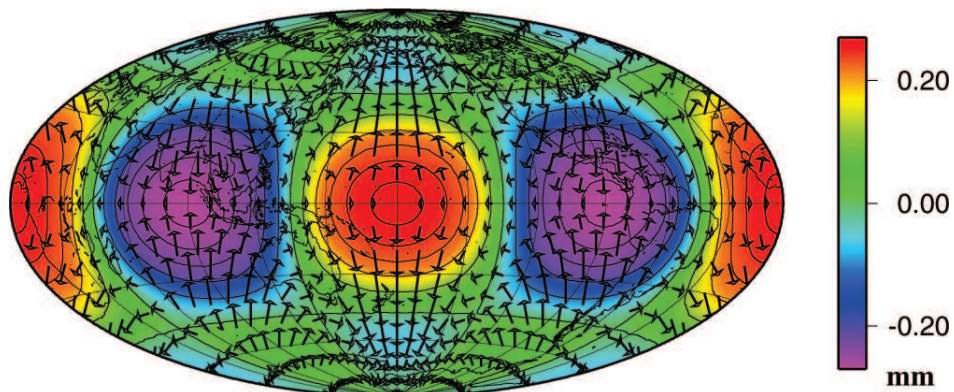


FIG. 5.2: La perturbation de déplacement de marée M2 due à l'ellipticité (exprimée sur l'ellipsoïde). L'échelle de couleur se rapporte au déplacement normal à la surface elliptique, et les flèches au déplacement tangentiel (1 cm pour 1 mm de déplacement). Le modèle de référence de départ est PREM.

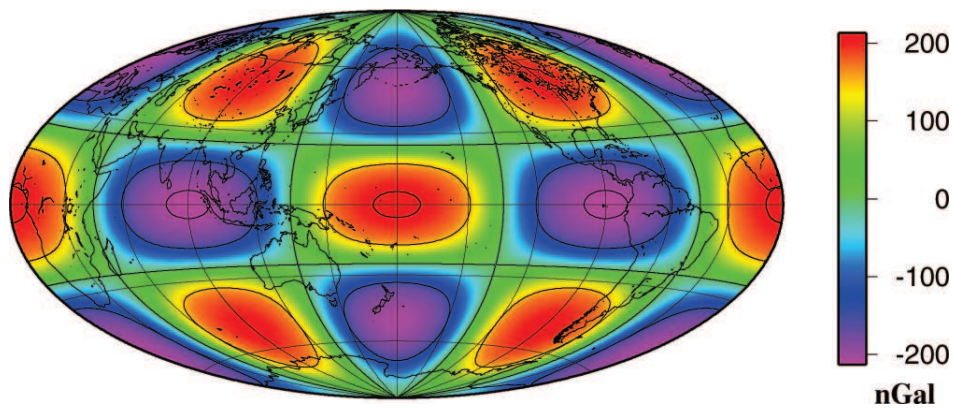


FIG. 5.3: La perturbation de gravité de marée M2 due à l'ellipticité. La gravité est ici exprimée sur la surface déformée

et le premier article en annexe 4). Le couplage entre le potentiel de marée  $M_2$  et le terme radial du potentiel de rotation ne joue que sur la réponse en  $\mathcal{Y}_2^2$  de la perturbation de marée. Il ne modifie donc que les nombres  $\Delta h_0$  et  $\Delta k_0$ . Nous ne savons pas exactement quel protocole a suivi Wang (1994) pour déterminer cette partie de la déformation de la Terre.

Nos solutions respectives pour  $\Delta h_+$  et pour  $\Delta k_+$  sont en bon accord. L'écart absolu entre nos solutions est du même ordre de grandeur que celui pour la marée non perturbée de PREM (de 0.1%). Cela montre bien que notre modélisation partielle du fluide dans le noyau externe n'a qu'une incidence mineure. Pour le cas perturbé l'erreur engendrée est bien inférieure à la précision des mesures actuelles.

Ne pas considérer le terme radial de  $\Psi_o$  comme source de perturbation diminue fortement les solutions  $\Delta h_0$  et  $\Delta k_0$  (voir le tableau 5.1). La perturbation de déplacement est diminuée de deux tiers et celle du potentiel de près d'un tiers. La perturbation de gravité est elle-même diminuée d'un maximum de 200 nGal environ (pics à pics) et on observe que le terme de degré 4 devient prépondérant dans la perturbation (voir figure 5.3). En regardant les conventions de l'IERS 2003 (McCarthy & Petit, 2003), il nous a été difficile de savoir quel mode opératoire a été utilisé pour déterminer la perturbation d'ellipticité dans les modèles de référence de marée solide. Les  $\Delta h_0$  et  $\Delta k_0$  sont déjà additionnés aux nombres de Love non perturbés. Or le modèle prend de nombreux aspects en compte tels que l'anélasticité et l'inertie, il est difficile de savoir quelles parts ont les différentes contributions. Nous avons seulement pu comparer  $\Delta k_+$  qui est bien de 0.57 dans l'IERS 2003 (les notations de l'IERS n'étant pas les mêmes pour les  $\Delta h$ ).

## 5.2 L'impact de l'ellipticité sur la réponse de la Terre aux surcharges atmosphériques

Nous déterminons ici l'impact de l'ellipticité sur la réponse de la Terre aux surcharges des surface. Les enveloppes superficielles fluides exercent une pression et une attraction en surface de la planète. La réponse solide de la Terre s'observe à l'heure actuelle majoritairement sur les variations temporelles des coefficients zonaux du géopotential (les coefficients  $J_l$ ). Nous avons calculé la perturbation d'ellipticité sur quelques nombres de Love zonaux de surcharge. Puis utilisant des données de pression atmosphérique, nous avons reconstruit le signal temporel du  $J_2$  et du  $J_3$ .

### 5.2.1 Les surcharges sur une surface déformée

On note  $p_a$  la pression de surface et  $V_a$  le potentiel de surcharge.  $p_a$  et  $V_a$  sont liés ensemble (voir le chapitre 4), ils dépendent de la distribution de densité surfacique  $\sigma_a$  de la couche superficielle qui génère la surcharge.

Dans le cas perturbé où la surface n'est plus sphérique, si la densité surfacique reste la même, l'effet de pression est modifié par la perturbation de gravité locale. En utilisant l'approximation de couche mince, on montre que dans le cas sphérique  $p_a \approx \sigma_a g_o$  (l'amplitude de la gravité moyenne de surface de la Terre sphérique est  $g_o = \|\vec{g}_o\| = -\vec{g}_o \cdot \vec{e}_r$ ). La traction externe agissant sur la surface sphérique est donc :

$$-p_a \vec{e}_r = -\sigma_a g_o \vec{e}_r \quad (5.5)$$

Dans le cas non sphérique la traction externe en surface est perturbée car :

1. chaque point de la surface s'est déplacé radialement d'une quantité  $\delta d$ .
2. la normale de la surface a varié d'un vecteur  $-\vec{\nabla}^\Sigma \delta d$ .
3. la gravité locale est perturbée d'une quantité  $\delta \vec{g}_o$ .

On définit une perturbation de pression de surface  $\delta p_a$ . La pression atmosphérique totale qui agit sur la surface ellipsoïdale est :

$$p_a + \delta p_a = -\sigma_a (g_o^{ell} + \delta g_o^{ell}) \quad (5.6)$$

avec la gravité normale sur la surface de l'ellipsoïde, au premier ordre :

$$g_o^{ell} + \delta g_o^{ell} = (\vec{g}_o(\vec{x}) + \delta \vec{g}_o(\vec{x}) + \delta d \partial_r \vec{g}_o(\vec{x})) \cdot (\vec{e}_r - \vec{\nabla}^\Sigma \delta d) \quad (5.7)$$

( $\vec{x}$  tout point de la surface de référence sphérique). La gravité  $\vec{g}_o$  étant radiale, le terme  $\{\vec{g}_o \cdot \vec{\nabla}^\Sigma \delta d\}$  est nul. La perturbation de pression de surface est donc au premier ordre :

$$\delta p_a = \sigma_a (-\delta \vec{g}_o \cdot \vec{e}_r + \delta d \partial_r g_o) \quad (5.8)$$

et la perturbation de traction sur la surface ellipsoïdale est  $\delta p_a \vec{e}_r - p_a \vec{\nabla}^\Sigma \delta d$ .

## 5.2.2 L'influence de l'ellipticité sur les nombres de Love

Nous prenons à nouveau comme Terre de référence perturbée le modèle "PREM elliptique" présenté ci-dessus.

La méthode numérique n'étant pas dédiée au calcul des nombres de Love, nous appliquons les distributions de pression de surface zonales pour chaque degré individuellement. Supposons que la surcharge en surface à l'instant  $t$  correspond à l'harmonique sphérique zonale  $\mathcal{Y}_l^0$ . Alors le couplage avec l'ellipticité (harmonique sphérique  $\mathcal{Y}_2^0$ ) engendre une perturbation de potentiel de composantes  $\mathcal{Y}_{l-2}^0$ ,  $\mathcal{Y}_l^0$  et  $\mathcal{Y}_{l+2}^0$ .

On note  $V_l$  le coefficient zonal de degré  $l$  du potentiel de surcharge. La variation du potentiel sous l'action de la surcharge exprimée à l'extérieur de la planète est :

$$\phi_1^{free} + \delta \Phi_1^{free} = V_l \left[ \Delta k_l^- \left( \frac{a}{r} \right)^{l-1} \mathcal{Y}_{l-2}^0 + (k_l + \Delta k_l^0) \left( \frac{a}{r} \right)^{l+1} \mathcal{Y}_l^0 + \Delta k_l^+ \left( \frac{a}{r} \right)^{l+3} \mathcal{Y}_{l+2}^0 \right] \quad (5.9)$$

$k_l$  étant le nombre de Love de surcharge classique pour une Terre sphérique (voir chapitre 4), et  $\Delta k_-$ ,  $\Delta k_0$  et  $\Delta k_+$  les perturbations de nombres de Love dues à l'ellipticité. Les solutions sont exprimées dans le tableau suivant :

Si la Terre était homogène et incompressible sa réponse gravito-élastique aux surcharges serait déterminable analytiquement. Profitant du travail effectué pour la marée solide (voir chapitre 4), nous présentons aussi les solutions analytiques des nombres de Love de surcharges perturbés dans le tableau 5.3 pour une Terre homogène incompressible.

On notera, quelque soit la structure radiale de la Terre, qu'une surcharge zonale de degré 3 va créer une perturbation de déplacement poloidal de degré 1. Le couplage de  $V_{30}$  avec l'aplatissement zonal de degré 2 génère un second membre (cf le système 2.71 dans le chapitre 2) de degré 1 dans le système perturbé. Celui-ci sera modifié, comme dans le cas sphérique, pour prendre en compte la conservation du centre de masse.

$l$	$\Delta k_l^-$	$\Delta k_l^0$	$\Delta k_l^+$
2	–	2,076	4,760
3	–	3,384	6,507
4	5,011	4,643	8,394
5	6,396	5,650	11,014

TAB. 5.2: Perturbations des nombres de Love zonaux de surcharge par l'ellipticité ( $\times 10^{-3}$ )

$l$	$k_l'$	$\Delta k_l^-$	$\Delta k_l^0$	$\Delta k_l^+$
1	-1	0	0	$-\frac{27}{5} \frac{\alpha}{19\bar{\mu}_1+9}$
2	$\frac{-1}{1+\bar{\mu}_2}$	0	$\frac{2\alpha}{1995} \frac{950\bar{\mu}_2^2-221\bar{\mu}_2-475}{(1+\bar{\mu}_2)^2}$	$\frac{4\alpha}{105} \frac{2295\bar{\mu}_2^2+617\bar{\mu}_2-855}{(1+\bar{\mu}_2)(38+51\bar{\mu}_2)}$
3	$\frac{-1}{1+\bar{\mu}_3}$	0	$\frac{4\alpha}{3465} \frac{1078\bar{\mu}_3^2+236\bar{\mu}_3-539}{(1+\bar{\mu}_3)^2}$	$\frac{10\alpha}{693} \frac{11242\bar{\mu}_3^2+2921\bar{\mu}_3-4235}{(1+\bar{\mu}_3)(55+73\bar{\mu}_3)}$
4	$\frac{-1}{1+\bar{\mu}_4}$	$\frac{2\alpha}{35} \frac{1140\bar{\mu}_4^2+679\bar{\mu}_4-765}{(1+\bar{\mu}_4)(38\bar{\mu}_4+51)}$	$\frac{60\alpha}{1309} \frac{34\bar{\mu}_4^2+12\bar{\mu}_4-17}{(1+\bar{\mu}_4)^2}$	$\frac{\alpha}{143} \frac{8580\bar{\mu}_4^2+2347\bar{\mu}_4-3315}{(1+\bar{\mu}_4)(17+22\bar{\mu}_4)}$
5	$\frac{-1}{1+\bar{\mu}_5}$	$\frac{10\alpha}{693} \frac{8470\bar{\mu}_5^2+3345\bar{\mu}_5-11242}{(1+\bar{\mu}_5)(55\bar{\mu}_5+73)}$	$\frac{\alpha}{93951} \frac{176660\bar{\mu}_5^2+40421\bar{\mu}_5-132495}{(1+\bar{\mu}_5)^2}$	$\frac{7\alpha}{143} \frac{42570\bar{\mu}_5^2+23743\bar{\mu}_5-5621}{(1+\bar{\mu}_5)(645\bar{\mu}_5+511)}$

TAB. 5.3: Solutions analytiques des perturbations des nombres de Love de surcharges pour une Terre homogène incompressible.



Au delà des termes zonaux, notre calcul analytique simple nous a permis de mettre en évidence un autre problème lié, cette fois, aux surcharges tesserales de degré 2. Celles-ci, en couplant sur l'aplatissement zonal, vont créer une perturbation de déplacement toroidal de degré 1 (rotation) : c'est le théorème du moment cinétique. Or, dans notre approche statique, les termes d'accélération ont été négligés : nous ne pouvons donc pas résoudre ces rotations et le second membre du système perturbé doit être identifié à zéro.

### 5.2.3 Impact de l'ellipticité sur la réponse temporelle de la Terre aux surcharges de pression atmosphérique

Nous considérons les surcharges atmosphériques et leurs influences théoriques sur les  $J_2$  et  $J_3$ . Nous avons vu que l'atmosphère est la source principale des variations annuelles et interannuelles des  $J_l$ . Le potentiel de surcharge (les coefficients sont  $V_l$ ) associé aux variations de pression mondiales entre 1999 et 2003 (utilisant l'approximation de baromètre inversé sur les océans) est décomposé en harmoniques sphériques. Les données proviennent du "NCEP/NCAR reanalysis project" qui combine des mesures de pression atmosphérique mondiales de différentes sources (Kalnay et al., 1996). Les variations sont filtrées, ne laissant que la composante saisonnière des variations de pression. Les variations de  $J_2$  et du  $J_3$  ( $\Delta J_2$  et de  $\Delta J_3$ ) associées à ces surcharges sont représentées dans la figure 5.4. On notera la variation du géopotential extérieur :

$$\phi_1^{free} + \delta\Phi_1^{free} = g_0 a \sum_{l=2}^M \Delta J_l \left( \frac{a}{r} \right)^{l+1} \mathcal{Y}_l^0(\theta, \varphi) \quad (5.10)$$

avec l'expression des  $\Delta J_l$  :

$$\Delta J_l = \left( 1 + k_l + \delta k_l^0 \right) \frac{V_l}{g_0 a} + \delta k_{l+2}^- \frac{V_{l+2}}{g_0 a} + \delta k_{l-2}^+ \frac{V_{l-2}}{g_0 a} \quad (5.11)$$

On voit que l'ellipticité engendre une perturbation d'un peu moins de 1% sur les nombres de Love de surcharges. Bien que les signaux des  $\Delta J_2$  et  $\Delta J_3$  semblent en phase avec leurs perturbations d'ellipticité, la contribution des composantes  $V_{l-2}$  et des  $V_{l+2}$  dans chaque  $\Delta J_l$  crée en réalité un léger déphasage.

La variation du  $\Delta J_2$  est de l'ordre de  $2 - 3 \times 10^{-10}$ . La variation associée du potentiel  $\phi_1^{free} + \delta\Phi_1^{free}$  correspond à un déplacement du géoïde de  $(\phi_1^{free} + \delta\Phi_1^{free})/g_0$ . Le déplacement maximum du géoïde est donc de l'ordre de 2 mm, et la perturbation, due à l'ellipticité, de l'ordre de  $2 \times 10^{-2}$  mm. On note que cette perturbation correspond à la limite de précision attendue pour les mesures de GRACE à plus bas degrés (voir la figure 1.9). La perturbation d'ellipticité a un impact par conséquent probablement trop petit sur les surcharges de surface pour nécessiter d'être prise en compte actuellement.

L'ellipticité génère des variations latérales de très grandes longueurs d'ondes, comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 1, il est plus probable que des variations latérales de tailles plus petites et plus superficielles soient plus à même de générer des perturbations dans la réponse de surcharge de la planète.

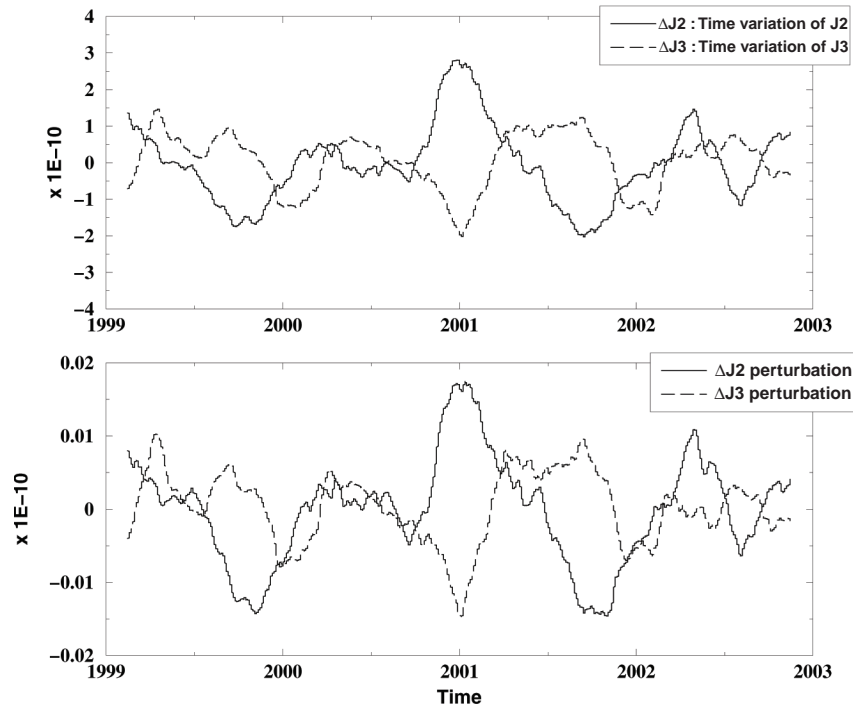


FIG. 5.4: Variations des  $J_2$  et  $J_3$  due à la pression atmosphérique entre 1999 et 2003. En haut les variations totales, en bas les perturbations des  $\Delta J_2$  et  $\Delta J_3$  due à l'ellipticité.

### 5.3 L'impact de panaches sur la réponse gravito-élastique de la Terre

La première expérience qui aura pour but de déterminer l'impact de la structure interne non hydrostatique sur la réponse basse fréquence de la Terre consistera à mettre en évidence l'effet dû à une hétérogénéité de forme simple dans le manteau. L'hétérogénéité sera une sphère de rayon variable présentant un contraste de densité et de paramètres rhéologiques avec l'encaissant. Le but est de discerner quelles sont les caractéristiques de l'hétérogénéité qui participent le plus dans les déformations solides de la planète (voir la figure 5.5).

Nous nous intéresserons aux déformations de marée et de surcharges (voir quelques précisions plus loin).

L'expérience est actuellement en cours d'élaboration. Les résultats ne sont pas présentés dans cette thèse, ils seront déterminés dans le cadre du post-doctorat qui suivra.

#### 5.3.1 La perturbation visqueuse du modèle de référence

Une des difficultés de cette expérience provient de la caractérisation du modèle de référence perturbé. Le panache est en train de monter dans le manteau sur une échelle de temps du million d'années. Son mouvement visqueux génère une topographie dynamique sur les interfaces de discontinuités et un état de précontraintes non hydrostatique. Il s'agit ici de définir les paramètres de la Terre à un instant  $t$  de la remontée du panache, de définir les paramètres élastiques associés à cette configuration, puis d'y imposer la force externe de marée.

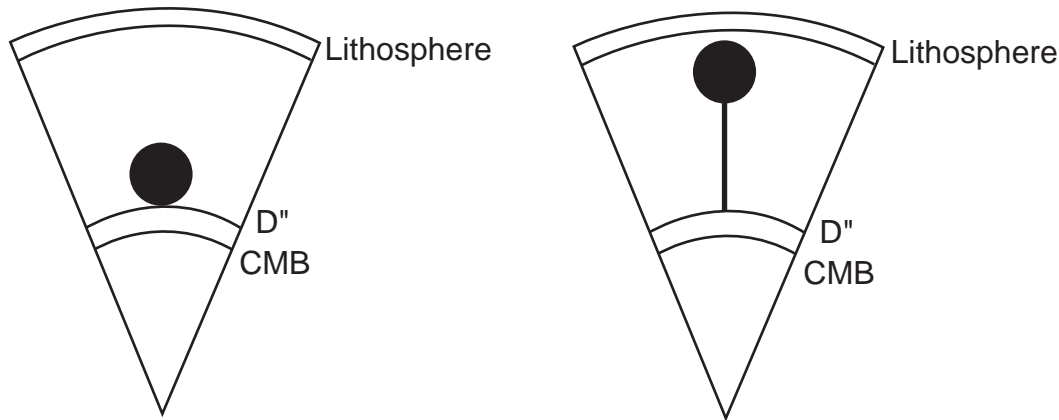


FIG. 5.5: Modélisation d'un panache montant dans le manteau à l'aide d'une sphère.

La Terre est choisie comportant 5 couches visqueuses : la graine, le noyau externe, le manteau inférieur, le manteau supérieur et la lithosphère.

Le panache est construit comme une superposition de sous-couches fines décomposées en harmoniques sphériques. Nous utilisons l'approche décrite par Greff-Lefftz (2004) (voir aussi Dehant & Wahr, 1991) dans laquelle chaque sous-couche est apparentée à une surcharge interne (à l'image des surcharges de surface) dont la surpression et l'attraction gravitationnelle dépendent de la différence de densité du panache avec son encaissant. Ces surcharges agissent comme des forces externes appliquées à une Terre visqueuse. On détermine les perturbations  $\delta\rho_o$ ,  $\delta\phi_o$ ,  $\delta\bar{\mathbf{T}}_o$  et les topographies  $\delta d$  par comparaison avec le cas sans hétérogénéités.

Le programme, réalisé par Marianne Greff en harmoniques sphériques, a été transposé de manière à associer les valeurs des paramètres aux points du maillage de la sphère cubique.

### 5.3.2 La marée solide

Nous souhaitons étudier l'impact de cette hétérogénéité sur la réponse de la Terre à différentes ondes de marées solides. Les marées sont probablement plus sensibles à la présence de très larges hétérogénéités dans le Manteau. Nous prendrons l'exemple ici d'un dôme montant (un méga-panache), situé à la base du manteau à la latitude commune des superswells polynésien et sud-africain (voir la figure 5.6).

Nous nous intéresserons d'abord à l'onde de marée  $M_2$ , celle-ci étant la plus importante. L'onde de marée  $M_2$  a par ailleurs l'avantage, quel que soit le spectre d'harmoniques sphériques des variations latérales internes, de ne pas pouvoir générer de perturbations de degrés 1 par couplages. Le traitement du degré 1 demande quelques ajustements spécifiques et numériques qui nous sont apparus non nécessaires dans le cadre de cette thèse. La priorité est ici avant tout de déterminer si les variations latérales sont de nos jours indispensables à prendre en compte dans les modèles de marée.

### 5.3.3 Les surcharges de surface

La partie supérieure de la planète se déforme sous l'action des surcharges de surface. L'épaisseur caractéristique de pénétration de la déformation dépend du spectre d'harmoniques sphériques de la pression de surface. Les bas degrés déformeront tout le manteau alors que

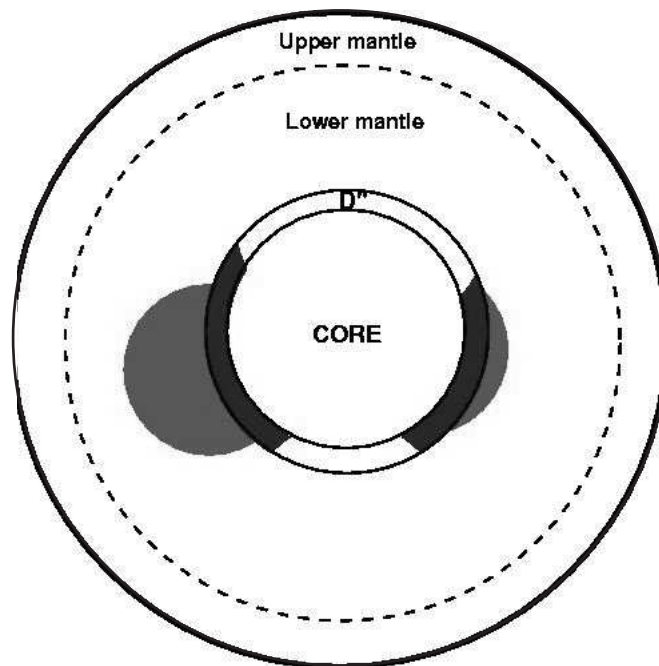


FIG. 5.6: Méga-panaches du manteau représentés par des hétérogénéités sphériques.

les hauts degrés n'affecteront que sa partie supérieure. On peut donc s'attendre à ce que la réponse de la planète soit plus sensible à la présence de variations latérales superficielles.

Nous voulons tester l'impact de différentes hétérogénéités (de différentes tailles, positions) en fonction du type de distribution de pression de surface. Plusieurs types de surcharge sont à envisager, principalement l'océan et l'atmosphère.

# Conclusions

Nous avons réalisé un modèle numérique dans le but de calculer la réponse gravito-élastique d'une terre réaliste à différents types de forces externes. Contrairement aux modèles antérieurs, la Terre, dans notre modèle, peut comporter des variations latérales de densité, de paramètres rhéologiques, un déviateur des précontraintes et des topographies aux interfaces de discontinuités. La méthode numérique utilisée est la méthode des éléments spectraux appliquée au maillage de la sphère cubique.

Nous avons, dans un premier temps, validé le modèle sur quelques applications géophysiques connues (concernant la marée solide et les réponses de surcharges en surface). Nous avons dû pour cela reprendre et reformuler les travaux de Love se rapportant à la perturbation d'ellipticité d'une Terre homogène incompressible sur sa réponse analytique de marée  $M_2$ .

Des applications impliquant la structure hydrostatique de la planète ont été par la suite réalisées. Nous déterminons l'impact de l'ellipticité sur les déformations de marée de PREM et sur sa réponse aux surcharges de surface. Le calcul en lui-même n'est pas nouveau pour la marée solide (voir les travaux de Wahr, 1981b) mais il nous a permis de soulever une interrogation quant à la façon dont l'influence de la rotation est modélisé sur le modèle PREM. Nous considérons que l'effet de la partie radiale du potentiel centrifuge est déjà pris en compte dans la structure interne de PREM, alors que Wang (1994) la considère comme source perturbatrice. Certains des nombres de Love perturbés que nous avons calculés sont par conséquent trois fois plus petits que ceux de Wang. La perturbation de la réponse gravimétrique de marée  $M_2$  due à l'ellipticité reste malgré tout bien supérieure à la précision des mesures actuelles tant satellitaires qu'au sol (de 2 ordres de grandeur supérieurs à la précision instrumentale des gravimètres supraconducteur et des mesures attendues par GRACE). La perturbation de déplacement est de l'ordre de la précision de VLBI. Nous avons ensuite étudié l'impact de l'ellipticité sur les variations du  $J_2$  et du  $J_3$  induites par l'atmosphère. Nous montrons que cette perturbation est de l'ordre de 1 %.

En dernière partie, nous avons présenté une expérience, en cours de réalisation, dont le but est de mettre en évidence l'impact d'une hétérogénéité mantellique sur la réponse gravito-élastique de la Terre. L'hétérogénéité est sphérique, elle présente une taille et un contraste de densité et de paramètres élastiques variables. Cette expérience a pour but d'estimer le type et la taille des variations latérales susceptibles de perturber les réponses de la Terre aux marées et aux surcharges de surface. Nous serons alors à même de réaliser des modèles de gravito-élasticité plus réalistes.

Nous envisageons de développer des modèles de marée solide et de réponse aux surcharges de surface prenant en compte la dynamique du manteau. La structure latérale interne sera issue de modèles de tomographie et d'inversions réalisés par A. Forte (Forte & Mitrović, 2001), avec qui nous sommes en relation. Une deuxième étude est aussi envisagée : déterminer l'impact de la dichotomie océan-continent sur la réponse basses fréquences de la Terre et tout

particulièrement sur ses déformations liées aux surcharges de surface.

On notera que différentes améliorations pourront être apportées aux modèles numériques : la prise en compte du degré 1, la modélisation du fluide, le déraffinement du maillage avec la profondeur, et un préconditionnement plus avancé du système linéaire. Le fluide du noyau externe est partiellement modélisé pour l'instant mais nous avons montré que cette approximation n'a qu'un effet mineur sur les solutions.

Toutefois, même sans ces améliorations, nous pourrions dorénavant déterminer quel est l'impact de la dynamique du manteau sur la réponse basse fréquence de la Terre. Nous pourrions réaliser ainsi de nouveaux modèles de marée solide et de réponse aux surcharges de surface de la Terre. Avec l'avènement de la gravimétrie spatiale ces modèles deviennent indispensables que cela soit pour les missions en cours telles que les missions GRACE et bientôt GOCE, ou pour les missions en phase d'élaboration ("GRACE/GOCE Follow On"). Cette approche est de plus généralisable à d'autres planètes comme par exemple la planète Mars dont la structure est vraisemblablement fortement non hydrostatique.

# Annexes





# Annexe A

## Notations et définitions

### A.1 Notations du problème continu

---

#### Ensembles et géométrie

---

$\Omega$	→	Domaine caractérisant la Terre dans son état de référence (ouvert connexe de $\mathbb{R}^3$ ). La terre est choisie sphérique de structure interne à symétrie radiale
$\partial\Omega$	→	Frontière de $\Omega$ , surface de la planète
$\Omega_S$	→	Ensemble des zones solides de $\Omega$
$\Omega_F$	→	Ensemble des zones fluides de $\Omega$
$\Sigma$	→	Ensemble des interfaces de discontinuités internes à $\Omega$
$\Sigma_{SS}$	→	Ensemble des interfaces de discontinuités entre deux zones solides de $\Omega$
$\Sigma_{SF}$	→	Ensemble des interfaces de discontinuités entre les zones solides et fluides de $\Omega$
$\Sigma_\rho$	→	Ensemble des interfaces de discontinuités internes en densité de $\Omega$
$\Omega_o, \partial\Omega_o, \Sigma_o, \dots$	→	Autres notations des ensembles dans l'état de référence (état 0)
$\Omega', \partial\Omega', \Sigma', \dots$	→	Les ensembles dans l'état de référence perturbé (état 0')
$\Omega^t, \partial\Omega^t, \Sigma^t, \dots$	→	Les ensembles déformés à l'instant $t$
$\omega^t$	→	Élément de volume de $\Omega^t$ qui se déplace avec les particules à l'instant $t$
$\partial\omega^t$	→	Frontière de l'élément de volume $\omega^t$
$S_o, S^t$	→	Aire d'une surface donnée à l'instant 0 et à l'instant $t$
$\vec{n}, \vec{n}^t$	→	La normale sortante d'une surface donnée à l'instant 0 et à l'instant $t$

## Variables de temps et de positions

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$	→	Repère orthonormé cartésien géocentrique de référence lié à $\Omega$
$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$	→	Repère orthonormé sphérique géocentrique de référence lié à $\Omega$
$t$	→	Temps
$\vec{x}$	→	Position cartésienne $\vec{x} = (x, y, z)$ dans le repère de référence à $t = 0$ ou position dans le repère lagrangien.
$\vec{r}$	→	Position cartésienne dans le repère de référence à l'instant $t$ ou position dans le repère eulérien, $\vec{r}(\vec{x}, t) = \vec{x} + \vec{u}(\vec{x}, t)$ .
$\vec{u}$	→	Déplacement au cours du temps. $\vec{u}(\vec{x}, 0) = 0$ .
$\delta d$	→	déplacement radial d'une interface dans le milieu $0'$

Notations sur les variables ( $q$  une variable tensorielle quelconque définie sur  $\mathbb{R}^3$ )

$q^E, q^L$	→	Descriptions eulériennes et lagrangiennes de $q$ : $q^E(\vec{r}, t) = q^L(\vec{x}, t)$
$q_0$	→	$q$ dans le domaine de référence à l'instant $t = 0$ (état 0)
$\delta q_0$	→	Perturbation de $q$ dans le domaine de référence perturbé (état $0'$ )
$q_1^E, q_1^L$	→	Perturbation d'ordre 1 de $q$ dans le repère eulérien ou lagrangien à $t \neq 0$ (état 1)
$\delta q_1^E, \delta q_1^L$	→	Perturbation d'ordre 2 de $q$ dans le repère eulérien ou lagrangien à $t \neq 0$ (état 1')
$[q]_{-}^{+}$	→	Sur une interface de discontinuités $[q(\vec{x})]_{-}^{+} = q^{+}(\vec{x}) - q^{-}(\vec{x})$ , $q^{+}$ et $q^{-}$ les valeurs de $q$ de chaque côté de l'interface de normale sortante $\vec{n}$ ("+" du côté selon $\vec{n}$ positif, "-" le côté selon $\vec{n}$ négatif)
$\Delta q$	→	En annexe B.3 uniquement : perturbation de $q$ sur une interface de référence donnée ( $\Delta q = \delta q + \delta d \partial_n q$ ) due au déplacement de l'interface
$\bar{\mathbf{q}}$	→	Tenseur d'ordre 2
$\bar{\mathbf{q}}^T$	→	Tenseur d'ordre 2 transposé de $\bar{\mathbf{q}}$ : $q_{ij}^T = q_{ji}$
$\bar{\bar{\mathbf{q}}}$	→	Tenseur d'ordre 4

## Variables physiques qui obéissent aux notations ci-dessus

$\vec{v}$	→	Vitesse ( $\vec{v}^L = \partial_t \vec{u}$ ) (ou fonction test déplacement dans les formulations variationnelles)
$\rho$	→	Masse volumique
$\phi$	→	Potentiel de gravité
$\vec{g}$	→	Gravité $\vec{g} = -\vec{\nabla} \phi$
$\bar{\mathbf{T}}$	→	Tenseur des contraintes de Cauchy (tenseur d'ordre 2) $\bar{\mathbf{T}} = -p\bar{\mathbf{I}} + \bar{\tau}$
$p$	→	Pression
$\bar{\tau}$	→	Déviateur des contraintes (tenseur d'ordre 2)

## Paramètres rhéologiques

$\bar{\mathbf{c}}$	→	Tenseur rhéologique d'ordre 4, tel que $\bar{\mathbf{T}}_1^L = \bar{\mathbf{c}} : \vec{\nabla} \vec{u}$ . Dans le cas d'un milieu isotrope, les composantes du tenseur se simplifient autour des deux paramètres indépendants $\lambda$ et $\mu$ .
$\delta \bar{\mathbf{c}}$	→	Perturbation d'ordre 1 du tenseur rhéologique, tel que $\delta \bar{\mathbf{T}}_1^L = \bar{\mathbf{c}} : \vec{\nabla} \delta \vec{u} + \delta \bar{\mathbf{c}} : \vec{\nabla} \vec{u}$ . Dans le cas d'un milieu isotrope, les composantes du tenseur se simplifient autour des deux paramètres indépendants $\delta \lambda$ et $\delta \mu$ .
$\lambda$	→	Premier paramètre de Lamé
$\mu$	→	Deuxième paramètre de Lamé appelé aussi rigidité
$\kappa$	→	Compressibilité ( $\kappa = (3\lambda + 2\mu)/3$ dans le cas isotrope)
$\delta \lambda$	→	Perturbation du premier paramètre de Lamé (état $0'$ )
$\delta \mu$	→	Perturbation du deuxième paramètre de Lamé (état $0'$ )

Autres variables physiques	
$\vec{\xi}$	→ Variable définie telle que $\vec{\xi} = \vec{\nabla}\phi_1^E + 4\pi G\rho_o \vec{u}$
$\delta\vec{\xi}$	→ Perturbation d'ordre 1 de $\vec{\xi}$ : $\delta\vec{\xi} = \vec{\nabla}\delta\phi_1^E + 4\pi G(\rho_o \delta\vec{u} + \delta\rho_o \vec{u})$
$\bar{\mathbf{T}}^{PK}$	→ Tenseur de contraintes de Piola-Kirshhoff. Tenseur non symétrique hybride eulérien-lagrangien
$\delta\bar{\mathbf{T}}^{PK}$	→ Perturbation d'ordre 1 du tenseur de contraintes de Piola-Kirchoff
$\vec{t}_1^{PK}$	→ Vecteur de la dimension d'une traction défini tel que $\vec{t}_1^{PK} = \vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^{PK} + \vec{n}\vec{\nabla}^\Sigma \cdot (\varpi\vec{u}) - \varpi\vec{\nabla}^\Sigma\vec{u} \cdot \vec{n}$
$\varpi$	→ Scalaire tel que $\varpi = \vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_o \cdot \vec{n}$
$\delta\varpi$	→ Perturbation d'ordre 1 de $\varpi$
$\vec{v}, \psi$	→ Fonctions tests de type déplacement et potentiel de gravité utilisées dans les formulations variationnelles
$\delta\vec{\omega}, \delta\Phi$	→ Nouvelles variables se rapportant à $\delta\vec{u}$ et $\delta\phi_1^E$ : $\delta\vec{\omega} = \delta\vec{u} + \delta d \partial_n \vec{u}$ et $\delta\Phi = \delta\phi_1^E + \delta d \partial_n \phi_1^E$
Opérateurs différentiels	
$\mathbf{A}$	→ Opérateur de la gravito-élasticité (pour une Terre sphérique dont l'état de précontraintes est hydrostatique)
$\delta\mathbf{A}$	→ Perturbation d'ordre 1 de l'opérateur de la gravito-élasticité (due à la présence de variations latérales, etc...)
$\partial_x$	→ Dérivée partielle selon la variable $x$
$\vec{\nabla}$	→ Opérateur gradient. $\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ en cartésien (NB : $\vec{\nabla}q = grad(q)$ , $\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = div(\vec{q})$ , $\vec{\nabla} \wedge \vec{q} = rot(\vec{q})$ )
$\partial_n$	→ Gradient normal pour une surface de normale $\vec{n}$ : $\partial_n = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}$
$\vec{\nabla}^\Sigma$	→ Gradient surfacique pour une surface de normale $\vec{n}$ : $\vec{\nabla}^\Sigma = \vec{\nabla} - \vec{n} \partial_n$
$\Delta$	→ Laplacien (sauf dans l'annexe B.3)
$D$	→ Opérateur DtN : $D\phi = (\partial_n\phi)^+$ sur la surface $\partial\Omega$ de normale $\vec{n} = \vec{e}_r$
Divers	
$\delta_{ij}$	→ Symbole de kronecker $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ , $0$ si $i \neq j$
$\bar{\mathbf{I}}$	→ Tenseur identité $\bar{\mathbf{I}}_{ij} = \delta_{ij}$
$dV$	→ Mesure de volume
$dm$	→ Mesure de masse $dm = \rho dV$
$dS$	→ Mesure de surface
$\mathbf{H}^1(\Omega), W^1(\mathbb{R}^3)$	→ Espaces vectoriels, voir B.5
$\mathcal{H}, \mathcal{W}$	→ Espaces vectoriels, voir B.5
$\mathcal{Y}_l^m, Y_{lm}^c, Y_{lm}^s$	→ Harmoniques spheriques, voir A.3
$P_l, P_l^m$	→ Polynômes de Legendre et fonctions associées de Legendre, voir A.3
Quelques règles sur les produits	
$\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}$	→ Vecteur de composantes $(\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}})_j = \sum_{i=1}^3 n_i T_{ij}$
$\bar{\mathbf{T}} \cdot \vec{n}$	→ Vecteur de composantes $(\bar{\mathbf{T}} \cdot \vec{n})_j = \sum_{i=1}^3 T_{ji} n_i$
$\vec{u} \cdot \bar{\mathbf{T}} \cdot \vec{v}$	→ Scalaire $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u_i T_{ij} v_j$
$\vec{\nabla}\vec{u}$	→ Tenseur d'ordre 2 : $\partial_i u_j$
$\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi$	→ Scalaire $\sum_{i=1}^3 \partial_i \phi \partial_i \psi$
$T : Q$	→ Soit $T$ et $Q$ , 2 tenseurs d'ordres supérieurs à 1. $T : Q$ correspond au produit de ces tenseurs sur 2 indices (voir exemple ci-dessous)
$\vec{\nabla}\vec{u} : \vec{\nabla}\vec{v}$	→ Scalaire $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \partial_i u_j \partial_i v_j$
$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\vec{v}$	→ Vecteur de composantes $(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\vec{v})_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 n_i \partial_i u_j \partial_j v_k$
Constantes	
$G = 6,672 \cdot 10^{-11} kg \cdot m^{-3} \cdot s^{-2}$	→ Constante de gravitation

## A.2 Notations du problème discret

Ensembles discrets	
$\Omega_h$	→ Ensemble des points de $\Omega$ caractérisant le maillage discret de la Terre
$\Sigma_h$	→ Ensemble des points du maillage des interfaces de discontinuités
$\Omega_h^e$	→ élément volumique numéro $e$ (hexaèdre déformé)
$\Sigma_h^e$	→ élément surfacique numéro $e$ (quadrangle déformé)
$\Lambda$	→ élément de référence à une dimension $\Lambda = [-1, 1]$
$\Lambda^2$	→ élément de référence surfacique : carré $[-1, 1]^2$
$\Lambda^3$	→ élément de référence volumique : cube $[-1, 1]^3$
Approximations	
$\vec{u}_h, \vec{v}_h$	→ vecteurs déplacements approchés
$\phi_h, \psi_h$	→ vecteurs potentiels de gravité approchés
$\mathcal{H}_h, \mathcal{W}_h$	→ Espaces vectoriels approchés de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{W}$ associé au maillage $\Omega_h$ . Ces espaces sont munis de bases polynomiales
Divers	
$\vec{x} = (x, y, z)$	→ position cartésienne dans le repère géocentrique (voir chapitre 2). On note que $\vec{x} = \mathcal{F}^e(\vec{\xi})$
$\vec{\xi} = (\xi, \eta, \gamma)$	→ position cartésienne dans l'élément de référence volumique
$\mathcal{E}$	→ Nombre d'éléments volumiques compris dans $\Omega_h$
$\mathcal{N}$	→ Nombre de points GLL (Gauss-Lobatto-Legendre) sur $\Lambda$ (points du maillage)
$\mathcal{E}_s$	→ Nombre d'éléments de surface compris dans $\Sigma_h$ ou $\partial\Omega_h$
$\mathcal{F}^e$	→ Transformation liant un élément volumique à l'élément de référence volumique : $\Omega_h^e = \mathcal{F}^e(\Lambda^3)$
$\mathcal{S}^e$	→ Transformation liant un élément surfacique à l'élément de référence surfacique : $\Sigma_h^e = \mathcal{S}^e(\Lambda^2)$
$\mathcal{J}_V^e, \mathcal{J}_S^e$	→ Jacobiens des transformations $\mathcal{F}^e$ et $\mathcal{S}^e$
$q^e$	→ $q^e(\vec{\xi}) = q \circ \mathcal{F}^e(\vec{\xi}) = q(\mathcal{F}^e(\vec{\xi})) = q(\vec{x})$
$u_{ijk}^{e,l}$	→ $u_{ijk}^{e,l} = u_h^{e,l}(\xi_i, \eta_j, \gamma_k)$
$\mathbb{P}_i(\xi)$	→ Polynômes de Lagrange associé au point $\xi_i$ . Sur les points GLL de $\Lambda$ : $\mathbb{P}_i(\xi_j) = \delta_{ij}$
$\omega_i$	→ Poids d'intégration selon une dimension au point $\xi_i$ (ou $\eta_i$ ou $\gamma_i$ )
$\tilde{\partial}_l \phi_{pqr}^e$	→ Dérivée approchée selon $x_l$ de $\phi$ au point $(\xi_p, \eta_q, \gamma_r)$ de l'élément $e$
Variables du système linéaire global	
$\mathbf{M}$	→ Matrice de masse
$\mathbf{K}$	→ Matrice de rigidité
$\mathbf{L}$	→ Matrice de couplage entre l'équation du mouvement et l'équation de Poisson
$\mathbf{L}^T$	→ Matrice transposée de $\mathbf{L}$
$\mathbf{N}$	→ Matrice du Laplacien $(N_1, N_2)$
$A$	→ Vecteur global accélération $A_i = \vec{a}_h(\xi_i)$
$U$	→ Vecteur global déplacement $U_i = \vec{u}_h(\xi_i)$
$\Phi$	→ Vecteur global potentiel de gravité $\Phi_i = \phi_h(\xi_i)$
$F_1$	→ Vecteur global second membre du système linéaire associé à l'équation du mouvement
$F_2$	→ Vecteur global second membre du système linéaire associé à l'équation de redistribution des masses
$\mathbf{M}^e, \mathbf{K}^e, \dots$	→ Matrices élémentaires
$U^e, \Phi^e, \dots$	→ Vecteurs élémentaires

### A.3 Les harmoniques sphériques

**Polynômes de Legendre :** Soit un réel  $z \in [-1, 1]$ , et  $l$  un entier positif ou nul. Le polynôme de Legendre  $P_l$  de degré  $l$  est défini sur  $[-1, 1]$  par :

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l \quad (\text{A.1})$$

**Fonctions de Legendre associées :** Soit  $m \in [-l, l]$  un entier relatif. La fonction de Legendre associée de degré  $l$  et d'ordre  $m$  est définie sur  $[-1, 1]$  par :

$$P_l^m(z) = (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_l(z) \quad (\text{A.2})$$

**Normalisation complète :**

$$N_{lm} = (-1)^m \sqrt{\frac{2l + 1}{4\pi} \frac{(l - m)!}{(l + m)!} (2 - \delta_{m0})} \quad (\text{A.3})$$

**Harmoniques sphériques complètement normalisées (“fully normalised”) :**

$$\mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) = N_{lm} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (\text{A.4})$$

Terminologie :

- si  $m = 0$  l'harmonique spherique est dite zonale,
- si  $l \neq |m|$  et  $m \neq 0$  l'harmonique spherique est dite tesserales,
- si  $l = |m|$  l'harmonique spherique est dite sectorielle.

Notons  $\partial\Theta$  la sphère unité dans  $\mathbb{R}^3$ . Les harmoniques sphériques complètement normalisées forment un ensemble infini de vecteurs sur  $\partial\Theta$  autonormés pour le produit scalaire de  $L^2(\partial\Theta)$  :

$$\int_{\partial\Theta} \mathcal{Y}_l^m \overline{\mathcal{Y}_l^{m'}} dS = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (\text{A.5})$$

$\overline{\mathcal{Y}_l^m}$  étant le complexe conjugué de  $\mathcal{Y}_l^m$ .

**Harmoniques sphériques réelles non normalisées :**

$$Y_{lm}^c(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) \quad (\text{A.6})$$

$$Y_{lm}^s(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos \theta) \sin(m\varphi) \quad (\text{A.7})$$

$$\mathcal{Y}_l^{|m|} = N_{lm} (Y_{lm}^c + i Y_{lm}^s) \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}_l^{-|m|} = (-1)^m N_{lm} (Y_{lm}^c - i Y_{lm}^s) \quad (\text{A.8})$$

Les harmoniques sphériques réelles sont deux à deux orthogonales sur la sphère unité pour le produit scalaire de  $L^2(\partial\Theta)$ .

### Décomposition en harmoniques sphériques :

Soit  $q$  une fonction scalaire définie sur  $\mathbb{R}^3$  (ou un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ) et décomposable en harmoniques sphériques. On note son développement en harmoniques sphériques :

$$q(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} q_{lm}(r) \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l q_{lm}^c(r) Y_{lm}^c(\theta, \varphi) + q_{lm}^s(r) Y_{lm}^s(\theta, \varphi) \quad (\text{A.9})$$

avec  $q_{lm} \in \mathbb{C}$ , et  $q_{lm}^c$  et  $q_{lm}^s$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\vec{q}$  un vecteur à composantes dans  $\mathbb{R}$  défini sur  $\mathbb{R}^3$  (ou un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ) et décomposable en harmoniques sphériques. On définit de même son développement en harmoniques sphériques par :

$$\vec{q}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} q_{lm}^1(r) \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \vec{e}_r + r q_{lm}^2(r) \vec{\nabla}^\Sigma \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) - q_{lm}^3(r) \vec{r} \wedge \vec{\nabla}^\Sigma \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{A.10})$$

$q_{lm}^1$ ,  $q_{lm}^2$  et  $q_{lm}^3$  sont les coefficients du développement à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Ils sont appelés respectivement composantes "radiales", "poloïdales" et "toroïdales" du vecteur  $\vec{q}$ . On rappelle que  $\vec{\nabla}^\Sigma$  est le gradient tangentiel, il correspond en coordonnées sphériques à :

$$\vec{\nabla}^\Sigma = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\theta \\ \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

### Expression naturelle des fonctions en $1/\|\vec{r} - \vec{r}_o\|$ :

Soient deux points distincts  $P$  et  $P_o$  de l'espace, de positions respectives dans le repère géocentrique sphérique  $\vec{r} = (r, \theta, \varphi)$  et  $\vec{r}_o = (r_o, \theta_o, \varphi_o)$ . La distance euclidienne qui sépare ces deux points est  $d = \|\vec{r} - \vec{r}_o\|$ , où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne usuelle sur  $\mathbb{R}^3$ . Si  $P$  et  $P_o$  sont des masses ponctuelles, l'attraction qu'ils exercent l'un sur l'autre dépend d'un potentiel newtonien proportionnel à la fonction  $1/d$ .

Fixons  $P_o$  et faisons varier la position de  $P$  (le vecteur  $\vec{r}$ ). Si l'on réalise un développement de Taylor-Lagrange de la fonction  $1/d$  au voisinage de  $\vec{r}_o$ , on obtient :

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_o\|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r_o^{l+1}} P_l(\cos \lambda) \quad \text{pour } r < r_o \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_o\|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_o^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \lambda) \quad \text{pour } r > r_o \quad (\text{A.13})$$

avec  $\lambda$  l'angle séparant les deux vecteurs  $\vec{r}$  et  $\vec{r}_o$  (voir la figure A.1). On dit pour cette raison que  $1/d$  est la fonction génératrice des polynômes de Legendre.

D'après quelques règles classiques de trigonométrie sur la sphère :

$$\cos \lambda = \cos \theta \cos \theta_o + \sin \theta \sin \theta_o \cos(\varphi - \varphi_o) \quad (\text{A.14})$$

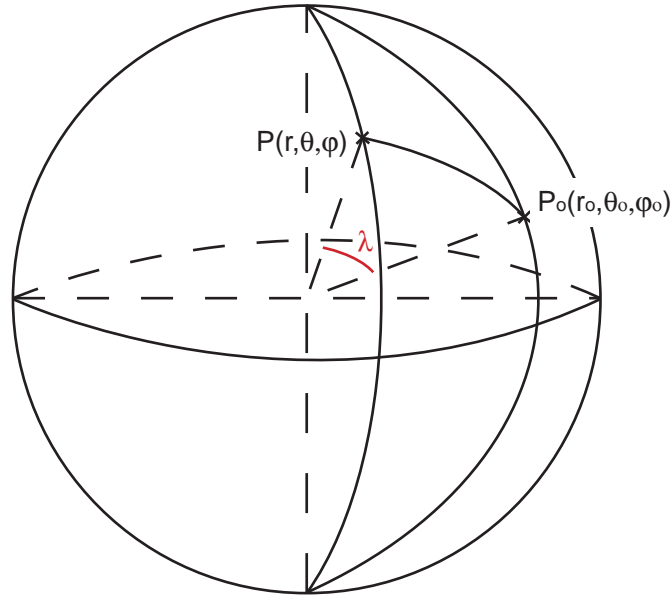


FIG. A.1: Schéma présentant les points  $P$  et  $P_o$  positionnés dans la planète.

En réinjectant cette relation dans la formule des polynômes de Legendre, on peut montrer alors que pour un degré  $l$  donné :

$$P_l(\cos \lambda) = \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \Re \{ \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \overline{\mathcal{Y}_l^m(\theta_o, \varphi_o)} \} \quad (\text{A.15})$$

La fonction  $\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_o\|}$  présente donc un développement en harmoniques sphériques, pour  $d$  bien sûr non nul. On a :

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_o\|} = \frac{1}{r_o} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{r}{r_o}\right)^l \Re \{ \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \overline{\mathcal{Y}_l^m(\theta_o, \varphi_o)} \} \quad \text{pour } r < r_o \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_o\|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{r_o}{r}\right)^l \Re \{ \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \overline{\mathcal{Y}_l^m(\theta_o, \varphi_o)} \} \quad \text{pour } r > r_o \quad (\text{A.17})$$

avec  $\vec{r} = (r, \theta, \varphi)$  et  $\vec{r}_o = (r_o, \theta_o, \varphi_o)$





## Annexe B

# Compléments sur la gravito-élasticité

### B.1 Complément au principe de perturbation

On montre ici qu'en utilisant la théorie des perturbations, une équation appliquée en tout point de  $\Omega^t$  peut s'exprimer comme une série d'équations appliquées en tout point du volume de référence  $\Omega$ . Prenons une équation  $\mathbf{A}q = f$  vérifiée en tout point  $\vec{r} \in \Omega^t$  à tout instant  $t$ . On effectue un développement de Taylor de l'équation au voisinage de  $\vec{x}$  :

$$\mathbf{A}q(\vec{r}, t) = \mathbf{A}q(\vec{x}, t) + \sum_i^3 u_i \partial_i (\mathbf{A}q(\vec{x}, t)) + \frac{1}{2} \sum_i^3 \sum_j^3 u_i u_j \partial_i \partial_j (\mathbf{A}q(\vec{x}, t)) + \dots \quad (\text{B.1})$$

$$f(\vec{r}, t) = f(\vec{x}, t) + \sum_i^3 u_i \partial_i f(\vec{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_i^3 \sum_j^3 u_i u_j \partial_i \partial_j f(\vec{x}, t) + \dots \quad (\text{B.2})$$

$u_i$  correspond à la composante  $i$  du vecteur déplacement  $\vec{u}$ . On développe l'équation aux perturbations, à l'image du développement 2.17, et on identifie les termes ordre à ordre. Par unicité du développement de Taylor, on obtient en tout point  $\vec{x} \in \Omega$  et à tout instant  $t$  :

$$\begin{aligned} \text{ordre 0} \quad \mathbf{A}_0 q_0 &= f_0 \\ \text{ordre 1} \quad \mathbf{A}_0 q_1 &= f_1 - \mathbf{A}_1 q_0 \\ &\quad - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} (\mathbf{A}_0 q_0 - f_0) \\ \text{ordre 2} \quad \mathbf{A}_0 q_2 &= f_2 - \mathbf{A}_2 q_0 - \mathbf{A}_1 q_1 \\ &\quad - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} (\mathbf{A}_0 q_1 + \mathbf{A}_1 q_0 - f_1) \\ &\quad - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{\nabla} (\mathbf{A}_0 q_0 - f_0) \cdot \vec{u} \\ &\quad \text{etc} \dots \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Or, à un ordre donné, tous les termes dans les gradients sont nuls compte tenu des relations d'ordres inférieurs. L'équation de départ exprimée en tout points de  $\Omega^t$  revient donc par

principe de perturbation à une série d'équations exprimée sur  $\Omega$  :

$$\begin{aligned}
\text{ordre 0} \quad \mathbf{A}_0 q_0(\vec{x}) &= f_0(\vec{x}) \\
\text{ordre 1} \quad \mathbf{A}_0 q_1(\vec{x}, t) &= f_1(\vec{x}, t) - \mathbf{A}_1 q_0(\vec{x}) \\
\text{ordre 2} \quad \mathbf{A}_0 q_2(\vec{x}, t) &= f_2(\vec{x}, t) - \mathbf{A}_2 q_0(\vec{x}) - \mathbf{A}_1 q_1(\vec{x}, t) \\
&\text{etc...}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

## B.2 La gravito-élasticité avec précontraintes déviatoriques

### B.2.1 L'opérateur de la gravito-élasticité

Dans le cas le plus général possible, avec un état de précontrainte déviatorique, il pourrait être plus judicieux de travailler avec le premier tenseur de Piola-Kirshhoff car les conditions aux limites dynamiques s'y rapportent. Il faudrait pour cela reformuler l'équation du mouvement sous une forme lagrangienne. Cependant ce tenseur n'étant pas symétrique son emploi n'est pas simple. Il est par conséquent plus intéressant malgré tout de développer l'opérateur avec le tenseur Cauchy lagrangien  $\bar{\mathbf{T}}_1^L$ . Connaissant 2.16 et 2.18, le tenseur de Cauchy eulérien est lié au tenseur lagrangien par :

$$\bar{\mathbf{T}}_1^E = \bar{\mathbf{T}}_1^L - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \bar{\mathbf{T}}_o \tag{B.5}$$

$$= \bar{\mathbf{T}}_1^L + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p_o \bar{\mathbf{I}} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \bar{\mathcal{T}}_o \tag{B.6}$$

$$= \bar{\mathbf{T}}_1^L + \rho_0 \vec{u} \cdot \vec{g}_0 \bar{\mathbf{I}} + \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \bar{\mathcal{T}}_o) \bar{\mathbf{I}} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \bar{\mathcal{T}}_o \tag{B.7}$$

L'opérateur de la gravito-élasticité le plus général possible prend donc la forme :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \vec{u} &= - \vec{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L(\vec{u}) \\
&- \vec{\nabla}(\rho_0 \vec{u} \cdot \vec{g}_0) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{u}) \vec{g}_0 \\
&- \vec{\nabla}(\vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \bar{\mathcal{T}}_o)) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \bar{\mathcal{T}}_o) \\
&+ \rho_0 \vec{\nabla} \phi_1^E(\vec{u})
\end{aligned} \tag{B.8}$$

On distingue quatre grands groupes de termes dans cette expression, lignes à lignes :

1. le terme de contrainte (il dépend de  $\vec{u}$  selon la relation d'élasticité  $\bar{\mathbf{T}}_1^L = \bar{\mathbf{c}} : \vec{\nabla} \vec{u}$ )
2. les termes d'autogravitation, liés à la gravité de référence  $\vec{g}_0$
3. les termes liées au déviateur des précontraintes  $\bar{\mathcal{T}}_o$
4. la perturbation de gravité dont le potentiel obéit à l'équation de redistribution des masses (équation 2.29)

### B.2.2 Les conditions aux limites dynamiques

Les conditions aux limites de tractions dans le cas général à précontraintes non hydrostatiques sont (Dahlen & Tromp, 1998) :

$$\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^{PK} = 0 \quad \text{en surface } \partial\Omega \tag{B.9}$$

$$[\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^{PK}]_-^+ = 0 \quad \text{aux interfaces solides-solides } \Sigma_{SS} \tag{B.10}$$

$$[\bar{t}_1^{PK}]_-^+ = 0 \quad \text{aux interfaces solides-fluides } \Sigma_{SF} \tag{B.11}$$

$$\text{avec } \bar{t}_1^{PK} = \bar{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^{PK} + \bar{n} \bar{\nabla}^\Sigma \cdot (\varpi \bar{u}) - \varpi \bar{\nabla}^\Sigma \bar{u} \cdot \bar{n} \quad (\text{B.12})$$

$$\varpi = -\bar{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_o \cdot \bar{n} \quad (\text{B.13})$$

Au premier ordre, on peut montrer que les perturbations du tenseur de Piola-Kirshhoff et du tenseur de Cauchy lagrangien sont liés par la relation :

$$\bar{\mathbf{T}}_1^{PK} = \bar{\mathbf{T}}_1^L + \bar{\mathbf{T}}_o(\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) - (\bar{\nabla} \bar{u})^T \cdot \bar{\mathbf{T}}_o \quad (\text{B.14})$$

Sur une surface interne de  $\Omega$  de normale orientée vers l'extérieur  $\bar{n}$ , la traction qui résulte de cet état de contrainte est :

$$\begin{aligned} \bar{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^{PK} &= \bar{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L + \bar{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_o(\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) - \bar{\mathbf{T}}_o \cdot \bar{\nabla} \bar{u} \cdot \bar{n} \\ &= \bar{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L + \bar{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_o(\bar{\nabla}^\Sigma \cdot \bar{u}) - \bar{\mathbf{T}}_o \cdot \bar{\nabla}^\Sigma \bar{u} \cdot \bar{n} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Pour obtenir cette dernière relation, nous avons décomposé l'opérateur gradient selon sa partie normale à l'interface et sa partie tangentielle. Les termes impliquant des dérivées normales se sont annulés. Soit  $q$  une variable tensorielle, cette décomposition s'écrit :

$$\bar{\nabla} q = \bar{n} \partial_n q + \bar{\nabla}^\Sigma q \quad \text{avec} \quad \partial_n q = \bar{n} \cdot \bar{\nabla} q \quad (\text{B.16})$$

Sur une interface  $\Sigma_{SF}$ ,  $\bar{\mathbf{T}}_o$  est sphérique (tenseur diagonal et à coefficients diagonaux égaux) du côté du fluide, nous aurons donc la relation  $\bar{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_o = -\varpi \bar{n}$  sur l'interface. Cela nous permet d'écrire :

$$\bar{t}_1^{PK} = \bar{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L - (\bar{\mathbf{T}}_o + \varpi \bar{\mathbf{I}}) \cdot \bar{\nabla}^\Sigma \bar{u} \cdot \bar{n} + \bar{n} \bar{u} \cdot \bar{\nabla}^\Sigma \varpi \quad (\text{B.17})$$

Sachant que sur une interface  $\Sigma_{SS}$  :  $[\bar{\nabla}^\Sigma \bar{u}]_-^+ = \bar{\nabla}^\Sigma [\bar{u}]_-^+ = 0$ , et que sur toutes les interfaces  $[\bar{\nabla}^\Sigma \varpi]_-^+ = \bar{\nabla}^\Sigma [\varpi]_-^+ = 0$ , les conditions aux limites dynamiques peuvent s'écrire aussi :

$$\bar{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L - \bar{\mathbf{T}}_o \cdot \bar{\nabla}^\Sigma \bar{u} \cdot \bar{n} = 0 \quad \text{en surface } \partial\Omega \quad (\text{B.18})$$

$$[\bar{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L]_-^+ - [\bar{\mathbf{T}}_o]_-^+ \cdot \bar{\nabla}^\Sigma \bar{u} \cdot \bar{n} = 0 \quad \text{aux interfaces } \Sigma_{SS} \quad (\text{B.19})$$

$$[\bar{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L]_-^+ - [(\bar{\mathbf{T}}_o + \varpi \bar{\mathbf{I}}) \cdot \bar{\nabla}^\Sigma \bar{u}]_-^+ \cdot \bar{n} + \bar{n} [\bar{u}]_-^+ \cdot \bar{\nabla}^\Sigma \varpi = 0 \quad \text{aux interfaces } \Sigma_{SF} \quad (\text{B.20})$$

Dans le cas à précontraintes hydrostatiques,  $[\bar{\mathbf{T}}_o]_-^+ = -[p_o]_-^+ \bar{\mathbf{I}} = 0$  et  $\bar{\nabla}^\Sigma p_o = 0$  sur toutes interfaces internes. Les conditions dynamiques se simplifient donc à  $\bar{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L = 0$  en surface  $\partial\Omega$  et  $[\bar{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L]_-^+ = 0$  sur  $\Sigma_{SS}$  et  $\Sigma_{SF}$ .

## B.3 Calcul des conditions de continuités perturbées

### B.3.1 principe

En modifiant la structure interne de la planète, c'est à dire en perturbant le milieu de référence, on déplace et déforme les interfaces de discontinuités et la surface terrestre. On note  $\delta d$  le déplacement local de l'interface selon la direction de sa normale initiale  $\bar{n}$ . La normale de l'interface changera aussi localement, sa perturbation d'ordre 1 étant  $\delta \bar{n} = -\bar{\nabla}^\Sigma \delta d$ .

Une variable tensorielle  $q$ , au point  $\vec{x}$ , s'exprimera  $q(\vec{x}) + \delta q(\vec{x})$  après perturbation. Or si  $\vec{x}$  appartient à une interface de discontinuité de l'état 0,  $\vec{x}$  n'appartient pas forcément à une interface de discontinuité de l'état 0'. La "particule" qui initialement était positionnée en  $\vec{x}$  sur l'interface de l'état 0 est maintenant positionnée en  $\vec{x} + \delta d \vec{n} \in \Sigma'$ , c'est à dire là où est l'interface dans l'état 0'.

Si dans l'état 1,  $q$  est continue à travers les interfaces de  $\Sigma$ , alors dans l'état 1',  $q + \delta q$  est continue à travers les interfaces de  $\Sigma'$ . Nous avons donc deux conditions aux limites :

$$[q(\vec{x})]_{-}^{+} = 0 \quad (\text{sur } \Sigma) \quad (\text{B.21})$$

$$[q(\vec{x} + \delta d \vec{n}) + \delta q(\vec{x} + \delta d \vec{n})]_{-}^{+} = 0 \quad (\text{sur } \Sigma') \quad (\text{B.22})$$

On opère un développement limité à l'ordre 1 :

$$q(\vec{x} + \delta d \vec{n}) + \delta q(\vec{x} + \delta d \vec{n}) = q(\vec{x}) + \delta q(\vec{x}) + \delta d \partial_n q(\vec{x}) \quad (\text{B.23})$$

On note  $\Delta q = \delta q + \delta d \partial_n q$ . La condition de continuité sur  $q$  dans l'état 1' a donc deux formulations équivalentes :

$$\text{On aura sur } \Sigma' : [q + \delta q]_{-}^{+} = 0 \quad (\text{B.24})$$

$$\text{c'est à dire sur } \Sigma : [q + \Delta q]_{-}^{+} = [\Delta q]_{-}^{+} = 0 \quad (\text{B.25})$$

Ce qui revient pour les variables  $q$  et  $\delta q$  aux conditions sur  $\Sigma$  :

$$[q]_{-}^{+} = 0 \quad (\text{B.26})$$

$$[\delta q]_{-}^{+} = -[\delta d \partial_n q]_{-}^{+} \quad (\text{B.27})$$

La continuité de  $q + \delta q$  sur  $\Sigma'$  se traduit donc par une condition sur  $\delta q$  discontinue à travers  $\Sigma$ .

Le raisonnement est le même dans le cas où seule la partie normale de la variable est continue à travers l'interface. Nous aurons les deux conditions sur  $\Sigma$  :

$$[\vec{n} \cdot \vec{q}]_{-}^{+} = 0 \quad (\text{B.28})$$

$$[\Delta(\vec{n} \cdot \vec{q})]_{-}^{+} = 0 \quad (\text{B.29})$$

Or  $\Delta(\vec{n} \cdot \vec{q}) = \Delta \vec{n} \cdot \vec{q} + \vec{n} \cdot \Delta \vec{q}$ , et  $\Delta \vec{n} = \delta \vec{n} = -\vec{\nabla}^{\Sigma} \delta d$ . On peut donc montrer que les continuités sur les composantes normales s'expriment de la sorte sur  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned} [\vec{n} \cdot \vec{q}]_{-}^{+} &= 0 \\ [\vec{n} \cdot \delta \vec{q}]_{-}^{+} &= -[\delta d \partial_n(\vec{n} \cdot \vec{q})]_{-}^{+} + [\vec{\nabla}^{\Sigma} \delta d \cdot \vec{q}]_{-}^{+} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

### B.3.2 Raccord des conditions aux limites en tractions au tenseur de Cauchy

Dans un cas à précontraintes non hydrostatiques, les conditions aux limites dynamiques perturbées sont :

$$\Delta(\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^{PK}) = 0 \quad \text{en surface} \quad (\text{B.31})$$

$$[\Delta(\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^{PK})]_{-}^{+} = 0 \quad \text{aux interfaces solides-solides } \Sigma_{SS} \quad (\text{B.32})$$

$$[\Delta \bar{t}_1^{PK}]_{-}^{+} = 0 \quad \text{aux interfaces solides-fluides } \Sigma_{SF} \quad (\text{B.33})$$

avec  $t_1^{PK} = \vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^{PK} + \vec{n} \vec{\nabla}^\Sigma \cdot (\varpi \vec{u}) - \varpi \vec{\nabla}^\Sigma \vec{u} \cdot \vec{n}$  et  $\varpi = \vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_o \cdot \vec{n}$  (Dahlen & Tromp, 1998).

Connaissant les relations B.15 et B.17 qui unissent le tenseur de Piola-Kirshhoff au tenseur de Cauchy lagrangien :

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^{PK}) &= \Delta(\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L) + \Delta(\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_o) \vec{\nabla}^\Sigma \cdot \vec{u} + \vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_o \Delta(\vec{\nabla}^\Sigma \cdot \vec{u}) \\ &\quad - \Delta(\bar{\mathbf{T}}_o) \cdot \vec{\nabla}^\Sigma \vec{u} \cdot \vec{n} - \bar{\mathbf{T}}_o \cdot \Delta(\vec{\nabla}^\Sigma \vec{u} \cdot \vec{n}) \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

$$\begin{aligned} \Delta t_1^{PK} &= \Delta(\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L) - \Delta(\bar{\mathbf{T}}_o + \varpi \bar{\mathbf{I}}) \cdot \vec{\nabla}^\Sigma \vec{u} \cdot \vec{n} - (\bar{\mathbf{T}}_o + \varpi \bar{\mathbf{I}}) \cdot \Delta(\vec{\nabla}^\Sigma \vec{u} \cdot \vec{n}) \\ &\quad + \Delta(\vec{n} \vec{u}) \cdot \vec{\nabla}^\Sigma \varpi + \vec{n} \vec{u} \cdot \Delta(\vec{\nabla}^\Sigma \varpi) \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

### Conditions aux limites de surface libre

En surface,  $\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_o = 0$  et  $\Delta(\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_o) = 0$  (condition de surface libre). De plus, l'état de précontraintes de l'état 0 est hydrostatique,  $\bar{\mathbf{T}}_o = -p_0 \bar{\mathbf{I}} = 0$  en surface.

La condition aux limites de surface libre est donc :

$$\Delta(\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L) - \Delta(\bar{\mathbf{T}}_o) \cdot \vec{\nabla}^\Sigma \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{B.36})$$

c'est à dire :

$$\vec{n} \cdot \delta \bar{\mathbf{T}}_1^L = -\delta d \vec{n} \cdot \partial_{\vec{n}} \bar{\mathbf{T}}_1^L + \vec{\nabla}^\Sigma \delta d \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L + \Delta(\bar{\mathbf{T}}_o) \cdot \vec{\nabla}^\Sigma \vec{u} \cdot \vec{n}$$

(B.37)

$$\text{avec } \Delta(\bar{\mathbf{T}}_o) = \delta \bar{\mathbf{T}}_o + \delta d \partial_n \bar{\mathbf{T}}_o.$$

De plus, si l'état 0' était aussi à l'équilibre hydrostatique alors  $\Delta(\bar{\mathbf{T}}_o) = 0$ , les conditions aux limites en traction liées au tenseur de Cauchy seraient bien les mêmes que celles liées au tenseur de Piola kirchoff.

### Conditions aux limites sur les interfaces solides-solides

Si au premier ordre on a  $\delta(\vec{\nabla}^\Sigma \vec{u}) = \vec{\nabla}^\Sigma(\delta \vec{u})$ , cela n'est pas le cas pour  $\Delta(\vec{\nabla}^\Sigma \vec{u})$ . En décomposant l'opérateur gradient selon ses composantes normales et surfaciques, on montre notamment que :

$$\Delta(\vec{\nabla}^\Sigma q) = \vec{\nabla}^\Sigma(\Delta q) + (\vec{n} \vec{\nabla}^\Sigma \delta d - \delta d \vec{\nabla}^\Sigma \vec{n}) \cdot \vec{\nabla}^\Sigma q \quad (\text{B.38})$$

$$\Delta(\vec{\nabla}^\Sigma \cdot \vec{q}) = \vec{\nabla}^\Sigma \cdot (\Delta \vec{q}) - \delta d \vec{\nabla}^\Sigma \vec{n} : \vec{\nabla}^\Sigma \vec{q} + \vec{\nabla}^\Sigma \delta d \cdot \vec{\nabla}^\Sigma q \cdot \vec{n} \quad (\text{B.39})$$

Les conditions sur le déplacement sont  $[\vec{u}]_-^+ = 0$  et  $[\Delta \vec{u}]_-^+ = 0$ .  $\delta d$ ,  $\vec{n}$  et  $\vec{\nabla}^\Sigma \vec{n}$  sont égaux de chaque coté de l'interface. On a donc :

$$\begin{aligned} \left[ \vec{\nabla}^\Sigma \vec{u} \right]_-^+ &= \vec{\nabla}^\Sigma [\vec{u}]_-^+ = 0 \quad \text{et} \quad \left[ \Delta(\vec{\nabla}^\Sigma \vec{u}) \right]_-^+ = \left[ \vec{\nabla}^\Sigma(\Delta \vec{u}) \right]_-^+ = \vec{\nabla}^\Sigma [\Delta \vec{u}]_-^+ = 0 \\ \left[ \vec{\nabla}^\Sigma \cdot \vec{u} \right]_-^+ &= \vec{\nabla}^\Sigma \cdot [\vec{u}]_-^+ = 0 \quad \left[ \Delta(\vec{\nabla}^\Sigma \cdot \vec{u}) \right]_-^+ = \left[ \vec{\nabla}^\Sigma \cdot (\Delta \vec{u}) \right]_-^+ = \vec{\nabla}^\Sigma \cdot [\Delta \vec{u}]_-^+ = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Connaissant les conditions aux limites du milieu  $0'$ , on a donc :

$$[\Delta(\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^{PK})]_-^+ = [\Delta(\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L)]_-^+ - [\Delta(\bar{\mathbf{T}}_o)]_-^+ \cdot \vec{\nabla}^\Sigma \vec{u} \cdot \vec{n} - [\bar{\mathbf{T}}_o]_-^+ \cdot (\Delta(\vec{\nabla}^\Sigma \vec{u}) \cdot \vec{n} + \vec{\nabla}^\Sigma \vec{u} \cdot \Delta \vec{n}) \quad (\text{B.41})$$

Or l'état 0 est à l'équilibre hydrostatique,  $[\bar{\mathbf{T}}_o]_-^+ = -[p_0]_-^+ \bar{\mathbf{I}} = 0$ , les conditions aux limites de tractions sur les interfaces internes solides-solides sont donc :

$$[\Delta(\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L)]_-^+ - [\Delta(\bar{\mathbf{T}}_o)]_-^+ \cdot \vec{\nabla}^\Sigma \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{B.42})$$

C'est à dire sur  $\Sigma_{SS}$  :

$$\boxed{[\vec{n} \cdot \delta \bar{\mathbf{T}}_1^L]_-^+ = -\delta d \vec{n} \cdot [\partial_{\vec{n}} \bar{\mathbf{T}}_1^L]_-^+ + \vec{\nabla}^\Sigma \delta d \cdot [\bar{\mathbf{T}}_1^L]_-^+ + [\Delta(\bar{\mathbf{T}}_o)]_-^+ \cdot \vec{\nabla}^\Sigma \vec{u} \cdot \vec{n}} \quad (\text{B.43})$$

$$\text{avec } \Delta(\bar{\mathbf{T}}_o) = \delta \bar{\mathbf{T}}_o + \delta d \partial_n \bar{\mathbf{T}}_o.$$

### Conditions aux limites sur les interfaces solides-fluides

Le milieu 0 étant à l'état de précontraintes hydrostatique,  $\bar{\mathbf{T}}_o = -p_0 \bar{\mathbf{I}} = -\varpi \bar{\mathbf{I}}$ . De plus si la Terre est sphérique la pression est essentiellement radiale, et  $\vec{\nabla}^\Sigma \varpi = 0$ . Ce qui nous permet de simplifier  $\Delta(\vec{\nabla}^\Sigma \varpi)$  par  $\vec{\nabla}^\Sigma(\Delta \varpi)$ .

Sachant que  $[\Delta \varpi]_-^+ = 0$ , les conditions aux limites de tractions peuvent s'exprimer sur  $\Sigma_{FS}$  :

$$[\Delta \bar{t}_1^{PK}]_-^+ = [\Delta(\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L)]_-^+ - [(\Delta \bar{\mathbf{T}}_o + \Delta \varpi \bar{\mathbf{I}}) \cdot \vec{\nabla}^\Sigma \vec{u}]_-^+ \cdot \vec{n} + \vec{n} [\vec{u}]_-^+ \cdot \vec{\nabla}^\Sigma(\Delta \varpi) \quad (\text{B.44})$$

C'est à dire :

$$[\Delta \bar{t}_1^{PK}]_-^+ = [\Delta(\vec{n} \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^L)]_-^+ - [(\delta \bar{\mathbf{T}}_o + \delta \varpi \bar{\mathbf{I}}) \cdot \vec{\nabla}^\Sigma \vec{u}]_-^+ \cdot \vec{n} + \vec{n} [\vec{u}]_-^+ \cdot \vec{\nabla}^\Sigma(\Delta \varpi) = 0 \quad (\text{B.45})$$

$$\text{car } \partial_n(\bar{\mathbf{T}}_o + \varpi \bar{\mathbf{I}}) = \partial_n(0) = 0.$$

Ou encore :

$$\boxed{[\vec{n} \cdot \delta \bar{\mathbf{T}}_1^L]_-^+ = -\delta d \vec{n} \cdot [\partial_{\vec{n}} \bar{\mathbf{T}}_1^L]_-^+ + \vec{\nabla}^\Sigma \delta d \cdot [\bar{\mathbf{T}}_1^L]_-^+ + [(\delta \bar{\mathbf{T}}_o + \delta \varpi \bar{\mathbf{I}}) \cdot \vec{\nabla}^\Sigma \vec{u}]_-^+ \cdot \vec{n} - \vec{n} [\vec{u}]_-^+ \cdot \vec{\nabla}^\Sigma(\Delta \varpi)} \quad (\text{B.46})$$

$$\text{avec } \Delta(\varpi) = \delta \varpi + \delta d \partial_n \varpi.$$

## B.4 Conservation du centre de masse dans le cas des surcharges de surface

Soit une surcharge de surface de masse volumique superficielle  $\sigma_a$ , et de potentiel de surcharge associé  $V_a$ . On rappelle (voir 4.2.3) que leurs coefficients en harmoniques sphériques sont liés par la relation  $V_{lm} = -\frac{4\pi G a}{2l+1}\sigma_{lm}$ .

Supposons le centre de masse confondu avec le centre du repère de référence. La condition de conservation du centre de masse peut s'écrire (Greff-Lefftz & Legros, 1997) :

$$\int_{\Omega^t} \rho^E(\vec{r}, t) \vec{r} dV^t = - \int_{\partial\Omega} \sigma_a \vec{x} dS \quad (\text{B.47})$$

Or à l'instant  $t$ , nous avons  $dV^t = (1 + \vec{\nabla} \cdot \vec{u}) dV$ . On perturbe le système au premier ordre, l'intégrale peut alors s'écrire (intégration sur tout point  $\vec{x}$  de  $\Omega$  à l'instant  $t$ ) :

$$\int_{\Omega} (\rho_o + \rho_1^E + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho_o) (\vec{x} + \vec{u}) (1 + \vec{\nabla} \cdot \vec{u}) dV = - \int_{\partial\Omega} \sigma_a \vec{x} dS \quad (\text{B.48})$$

Négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 et sachant que  $\rho_1^E = \frac{1}{4\pi G} \Delta \phi_1^E$  :

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot (\rho_o \vec{u}) \vec{x} + \rho_o \vec{u} + \frac{1}{4\pi G} \Delta \phi_1^E \vec{x}) dV = - \int_{\partial\Omega} \sigma_a \vec{x} dS \quad (\text{B.49})$$

On notera qu'en appliquant la formule de Green sur le premier terme :

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\rho_o \vec{u}) \vec{x} dV = - \int_{\Omega} \rho_o \vec{u} + \int_{\partial\Omega} \rho_o \vec{u} \cdot \vec{n} \vec{x} dS - \int_{\Sigma_p} [\rho_o]_{-}^{+} \vec{u} \cdot \vec{n} \vec{x} dS \quad (\text{B.50})$$

On remarque de plus que  $\Delta \phi_1^E \vec{x} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi_1^E \vec{x} - \phi_1^E \vec{\mathbf{I}})$ . On applique donc le théorème de la divergence sur le terme de B.49 invoquant le potentiel  $\phi_1^E$ , et la relation B.49 se réduit à une intégrale de surface :

$$\int_{\partial\Omega} \left( (\vec{\xi} \cdot \vec{n}) \vec{x} - \phi_1^E \vec{n} \right) dS - \int_{\Sigma_p} [\vec{\xi} \cdot \vec{n}]_{-}^{+} \vec{x} dS = -4\pi G \int_{\partial\Omega} \sigma_a \vec{x} dS \quad (\text{B.51})$$

avec  $\vec{\xi} = \vec{\nabla} \phi_1^E + 4\pi G \rho_o \vec{u}$ .

Dans le cas d'une terre sphérique alors  $\vec{x} = a \vec{n}$  en surface. Connaissant la condition d'interface 2.38, la relation ci-dessus se simplifie :

$$\int_{\partial\Omega} \left( (\vec{\xi} \cdot \vec{n}) a - \phi_1^E \right) \vec{n} dS = -4\pi G \int_{\partial\Omega} a \sigma_a \vec{n} dS \quad (\text{B.52})$$

$\phi_1^E$  étant harmonique à l'extérieur de la Terre, on a en surface (voir la chapitre 3, section 3.3.2) :

$$\vec{\xi} \cdot \vec{n} = \partial_n \phi_1^{E+} = - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{+l} \frac{l+1}{a} (\phi_{lm}^c Y_{lm}^c(\theta, \varphi) + \phi_{lm}^s Y_{lm}^s(\theta, \varphi)) \quad (\text{B.53})$$

Connaissant la relation liant  $\sigma_a$  et  $V_a$  :

$$- \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \int_{\partial\Omega} [((l+2)\phi_{lm}^c + (2l+1)V_{lm}^c) Y_{lm}^c + ((l+2)\phi_{lm}^s + (2l+1)V_{lm}^s) Y_{lm}^s] \vec{n} dS = 0 \quad (\text{B.54})$$

La planète de référence étant sphérique, le vecteur unitaire  $\vec{n}$  est orienté selon l'axe radial :

$$\vec{n} = \vec{e}_r = Y_{11}^c \vec{e}_x + Y_{11}^s \vec{e}_y + Y_{10}^c \vec{e}_z \quad (\text{B.55})$$

Or les harmoniques sphériques sont orthogonales deux à deux, donc la relation B.54 est vérifiée si et seulement si :

$$\begin{cases} \phi_{1,-1}^c = -V_{1,-1}^c & \phi_{1,-1}^s = -V_{1,-1}^s \\ \phi_{10} = -V_{10} & \\ \phi_{11}^c = -V_{11}^c & \phi_{11}^s = -V_{11}^s \end{cases} \quad \text{en } r = a, \forall t > 0 \quad (\text{B.56})$$

## B.5 Espaces fonctionnels

Nous allons essentiellement définir les espaces de fonctions qui nous serviront dans cette étude, à savoir :  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  et  $W^1(\mathbb{R}^3)$ . Ces trois espaces, très classiques de la théorie des distributions (Schwartz, 1965), sont liés à  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . On rappelle que  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ .

Tout d'abord, on définit l'espace des fonctions scalaires de  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dont le carré est intégrable, on le note dans la pratique :

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; \int_{\Omega} u^2 dV < \infty \right\}$$

On pourra étendre cet espace à des vecteurs à 3 dimensions, on note :  $\mathbf{L}^2(\Omega) = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  l'espace des vecteurs de  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  dont le carré est intégrable.  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert<sup>1</sup> de norme  $\|\vec{u}\| = \left( \int_{\Omega} |\vec{u}|^2 dV \right)^{\frac{1}{2}}$  associée au produit scalaire :

$$(\vec{u}, \vec{v})_{dV} = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} dV$$

On peut montrer que  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  est aussi un espace de Hilbert pour le produit scalaire associé à la mesure de masse  $dm = \rho_o dV$  ( $\rho_o$  étant la distribution de masse volumique dans  $\Omega$ ). Ce produit scalaire nous servira à plusieurs reprises, on le notera :

$$(\vec{u}, \vec{v})_{dm} = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} \rho_o dV$$

De manière générale, on notera les espaces de vecteurs en gras par opposition aux espaces de fonctions scalaires.

On définit  $H^1(\Omega)$  l'espace de Sobolev d'ordre 1, espace des fonctions de carrés intégrables et de premières dérivées de carrés intégrables. On le note :

$$H^1(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; u \in L^2(\Omega) ; Du \in L^2(\Omega) \}$$

$Du$  étant la différentielle première de  $u$ . On note  $\mathbf{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  son homologue à trois dimensions. Ce dernier est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} \vec{u} : \vec{\nabla} \vec{v}) dV$$

<sup>1</sup>Espace normé, dont la norme provient d'un produit scalaire et qui est complet pour cette norme



avec  $\vec{\nabla} \vec{u} : \vec{\nabla} \vec{v} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \partial_i u^j \partial_i v^j$

Enfin, on définit  $W^1(\mathbb{R}^3)$  l'espace fonction de Beppo-Levi, tel que le gradient de la fonction est de carré intégrable :

$$W^1(\mathbb{R}^3) = \left\{ u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} ; \vec{\nabla} u \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\}$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{W^1(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dV$$

L'intérêt de définir ces trois espaces de fonctions est d'identifier l'ensemble des solutions possibles de notre problème, et de préciser l'ampleur de l'unicité de sa solution. Il faut noter que tous ces espaces découlent en fait de  $L^2(\Omega)$ . La différence entre  $H^1(\Omega)$  et  $W^1(\Omega)$  tient au fait que  $H^1(\Omega)$  est plus restrictif. Dans  $W^1(\Omega)$  la fonction considérée n'est pas nécessairement dans  $L^2(\Omega)$  contrairement à  $H^1(\Omega)$ .

On notera que ( $\Omega$  pouvant être  $\mathbb{R}^3$  ici) :

$$H^1(\Omega) \subset W^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

$\mathcal{D}'(\Omega)$  étant l'espace des distributions sur  $\Omega$ .

## B.6 Formule de Green

La formule de Green revient à une intégration par partie dans  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{q}$  un vecteur de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  et  $v$  un scalaire de  $H^1(\Omega)$ .  $q$  et  $v$  sont continus par morceaux dans  $\Omega$ , et on note  $\Sigma$  l'ensemble des interfaces de discontinuités de  $q$  et  $v$  (elles sont communes ici) dans  $\Omega$ . La formule de Green généralisée (prenant en compte des interfaces de discontinuités) est :

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) v \, dV = - \int_{\Omega} \vec{q} \cdot \vec{\nabla} v \, dV + \int_{\partial\Omega} (\vec{n} \cdot \vec{q}) v \, dS - \int_{\Sigma} [(\vec{n} \cdot \vec{q}) v]_{-}^{+} \, dS \quad (\text{B.57})$$

Notons que si  $v$  est continu à travers les interfaces  $\Sigma$ , c'est à dire si

$$v \in \{ v \in H^1(\Omega) ; [v]_{-}^{+} = 0 \text{ sur } \Sigma \}$$

alors l'intégrale de surface sur  $\Sigma$  se simplifiera en  $\int_{\Sigma} [\vec{n} \cdot \vec{q}]_{-}^{+} v \, dS$ . Le terme dépendra donc directement de la continuité de  $[\vec{n} \cdot \vec{q}]_{-}^{+}$ .

Enfin, la formule se généralise à tous tenseurs  $q$  et  $v$  quels que soit leur ordre. Notamment, si  $\vec{q} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$  est un tenseur d'ordre 2 et  $\vec{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  un tenseur d'ordre 1 (un vecteur ici), alors :

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) \vec{v} \, dV = - \int_{\Omega} \vec{q} : \vec{\nabla} \vec{v} \, dV + \int_{\partial\Omega} (\vec{n} \cdot \vec{q}) \vec{v} \, dS - \int_{\Sigma} [(\vec{n} \cdot \vec{q}) \vec{v}]_{-}^{+} \, dS \quad (\text{B.58})$$



## Annexe C

# Compléments sur l'approximation numérique

### C.1 Expression de la matrice $\mathbf{N}$

La matrice  $\mathbf{N}$  correspond à l'expression numérique du laplacien de l'équation de redistribution des masses sur  $\mathbb{R}^3$ . Nous avons (voir 3.37) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dV + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{l+1}{a^3} \left( \int_{\partial\Omega} \phi \, \mathcal{Y}_l^m \, dS \right) \left( \int_{\partial\Omega} \psi \, \mathcal{Y}_l^m \, dS \right) &\approx \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{\Phi} \quad (\text{C.1}) \\ &\approx \sum_{e=1}^{\mathcal{E}} \mathbf{\Psi}^e \cdot \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{\Phi}^e \quad (\text{C.2}) \end{aligned}$$

On pose  $\mathbf{\Psi}$  et  $\mathbf{\Phi}$  les vecteurs, de dimensions égales au nombre de points du maillage, correspondant respectivement aux valeurs de  $\psi$  et de  $\phi$  en chaque point du maillage.  $\mathbf{\Psi}^e$  et  $\mathbf{\Phi}^e$  et  $\mathbf{N}^e$  sont les restrictions de  $\mathbf{\Psi}$  et  $\mathbf{\Phi}$  et  $\mathbf{N}$  à l'élément  $e$ .

On distinguera la partie volumique  $\mathbf{N}_1$  et la partie surfacique  $\mathbf{N}_2$  de la matrice  $\mathbf{N}$ .

#### C.1.1 Partie volumique $\mathbf{N}_1$

En utilisant la règle de quadrature que nous avons définie dans le chapitre 3 (3.1.2) :

$$\int_{\Omega_e} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dV \approx \sum_{p=1}^{\mathcal{N}} \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} \sum_{r=1}^{\mathcal{N}} \omega_p \omega_q \omega_r \left( \sum_{l=1}^3 \tilde{\partial}_l \phi_{pqr}^e \tilde{\partial}_l \psi_{pqr}^e \right) |J_V^e|_{pqr} = \mathbf{\Psi}^e \cdot \mathbf{N}_1^e \cdot \mathbf{\Phi}^e \quad (\text{C.3})$$

$\tilde{\partial}_l \phi_{pqr}^e$  est la dérivée approchée de  $\phi$  selon la variable  $x_l$  ( $x$ ,  $y$  ou  $z$ ) au point  $(\xi_p, \eta_q, \gamma_r)$  de l'élément  $e$ . Nous avons vu que cette dérivée approchée a pour expression :

$$\tilde{\partial}_l \phi_{pqr}^e = \sum_{t=1}^{\mathcal{N}} \sum_{u=1}^{\mathcal{N}} \sum_{v=1}^{\mathcal{N}} (\partial_l \xi_{pqr} D_{tp} \delta_{uq} \delta_{vr} + \partial_l \eta_{pqr} \delta_{tp} D_{uq} \delta_{vr} + \partial_l \gamma_{pqr} \delta_{tp} \delta_{uq} D_{vr}) \phi_{tuv}^e \quad (\text{C.4})$$

$$= \partial_l \xi_{pqr} \sum_{t=1}^{\mathcal{N}} \phi_{tqr}^e D_{tp} + \partial_l \eta_{pqr} \sum_{t=1}^{\mathcal{N}} \phi_{ptr}^e D_{tq} + \partial_l \gamma_{pqr} \sum_{t=1}^{\mathcal{N}} \phi_{pqt}^e D_{tr} \quad (\text{C.5})$$

La dérivée de  $\psi$  peut s'exprimer de façon identique. Cependant, l'expression variationnelle finale ne dépendra plus de  $\psi$ , la formulation étant valable pour tout  $\psi \in \mathcal{W}$ . Cela revient encore à poser  $\psi_{pqr}^e = \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr}$  dans l'intégrale numérique. La dérivée approchée de  $\psi^e$  peut donc aussi s'écrire ici :

$$\tilde{\partial}_l \psi_{pqr}^e = \sum_{t=1}^{\mathcal{N}} \sum_{u=1}^{\mathcal{N}} \sum_{v=1}^{\mathcal{N}} (\partial_l \xi_{pqr} D_{tp} \delta_{uq} \delta_{vr} + \partial_l \eta_{pqr} \delta_{tp} D_{uq} \delta_{vr} + \partial_l \gamma_{pqr} \delta_{tp} \delta_{uq} D_{vr}) \psi_{tuv}^e \quad (\text{C.6})$$

$$= (\partial_l \xi)_{pj k} D_{ip} \delta_{jq} \delta_{kr} + (\partial_l \eta)_{iq k} D_{jq} \delta_{ip} \delta_{kr} + (\partial_l \gamma)_{ij r} D_{kr} \delta_{ip} \delta_{jq} \quad (\text{C.7})$$

On obtient ainsi directement l'expression de l'application de  $\mathbf{N}_1^e$  à  $\phi$ , connaissant l'expression C.4 de la dérivée approchée de  $\phi$  :

$$\begin{aligned} (\mathbf{N}_1^e \cdot \Phi^e)_{ijk} &= \sum_{p=1}^{\mathcal{N}} \omega_p \omega_j \omega_k |\mathcal{J}_V^e|_{pj k} D_{ip} \sum_{l=1}^3 (\partial_l \xi \tilde{\partial}_l \phi^e)_{pj k} \\ &+ \sum_{p=1}^{\mathcal{N}} \omega_i \omega_p \omega_k |\mathcal{J}_V^e|_{ip k} D_{jp} \sum_{l=1}^3 (\partial_l \eta \tilde{\partial}_l \phi^e)_{ip k} \\ &+ \sum_{p=1}^{\mathcal{N}} \omega_i \omega_j \omega_p |\mathcal{J}_V^e|_{ij p} D_{kp} \sum_{l=1}^3 (\partial_l \gamma \tilde{\partial}_l \phi^e)_{ij p} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

La matrice en elle-même s'explicitera :

$$\begin{aligned} (\mathbf{N}_1^e)_{ijkltuv} &= \sum_{p=1}^{\mathcal{N}} \sum_{l=1}^3 \omega_p \omega_j \omega_k |\mathcal{J}_V^e|_{pj k} \partial_l \xi_{pj k} D_{ip} \begin{bmatrix} \partial_l \xi_{pj k} D_{tp} \delta_{uj} \delta_{vk} \\ + \partial_l \eta_{pj k} \delta_{tp} D_{uj} \delta_{vk} \\ + \partial_l \gamma_{pj k} \delta_{tp} \delta_{uj} D_{vk} \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{p=1}^{\mathcal{N}} \sum_{l=1}^3 \omega_i \omega_p \omega_k |\mathcal{J}_V^e|_{ip k} \partial_l \eta_{ip k} D_{jp} \begin{bmatrix} \partial_l \xi_{ip k} D_{ti} \delta_{up} \delta_{vk} \\ + \partial_l \eta_{ip k} \delta_{ti} D_{up} \delta_{vk} \\ + \partial_l \gamma_{ip k} \delta_{ti} \delta_{up} D_{vk} \end{bmatrix} \quad (\text{C.9}) \\ &+ \sum_{p=1}^{\mathcal{N}} \sum_{l=1}^3 \omega_i \omega_j \omega_p |\mathcal{J}_V^e|_{ij p} \partial_l \gamma_{ij p} D_{kp} \begin{bmatrix} \partial_l \xi_{ij p} D_{ti} \delta_{uj} \delta_{vp} \\ + \partial_l \eta_{ij p} \delta_{ti} D_{uj} \delta_{vp} \\ + \partial_l \gamma_{ij p} \delta_{ti} \delta_{uj} D_{vp} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### C.1.2 Partie surfacique $\mathbf{N}_2$

La surface d'intégration est la surface de la planète de référence, c'est à dire une sphère. Le maillage de la sphère cubique a été réalisé de telle sorte que tous les points contenus par cette surface (les points de  $\partial\Omega_h$ ) aient la même position selon la variable  $\gamma$  dans chaque élément. Soit  $\{e = 1, \dots, \mathcal{E}_s\}$  l'ensemble des éléments traversée par la surface. Dans  $e$ , les points qui appartiennent à  $\partial\Omega_h$  auront comme position  $(\xi_t, \eta_u, \gamma_{\mathcal{N}})$ , de sorte que  $t = 1, \dots, \mathcal{N}$  et  $u = 1, \dots, \mathcal{N}$ .

On peut profiter du maillage de surface pour définir une transformée de Legendre approchée :

$$\phi_{lm} = \frac{1}{a^2} \int_{\partial\Omega} \phi \mathcal{Y}_l^m dS \approx \frac{1}{a^2} \sum_{e=1}^{\mathcal{E}_s} \sum_{t=1}^{\mathcal{N}} \sum_{u=1}^{\mathcal{N}} \omega_t \omega_u \phi_{tun}^e \mathcal{Y}_l^m(\theta_{tu}^e, \varphi_{tu}^e) |\mathcal{J}_S^e|_{tu} \quad (\text{C.10})$$

Ce maillage n'est pas optimal pour exprimer des harmoniques sphériques. Cependant les propriétés d'intégration des points GLL permettent d'intégrer sur un élément 3 longueurs d'ondes d'un signal périodique avec une bonne précision (sur une dimension). Les harmoniques sphériques étant de longueur d'onde caractéristique d'autant plus petite que leur degré est élevé, il y a donc un lien direct entre le nombre d'éléments latéraux et le degré d'harmonique sphérique maximum que nous pouvons utiliser dans notre modèle. Au delà, il nous faudra changer de base de points pour le calcul des harmoniques et des transformées de Legendre, ou simplement densifier le maillage, mais cela n'a pas été nécessaire jusqu'à présent.

Le terme de surface de la relation C.1 s'exprime sur le maillage :

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{l+1}{a^3} \left( \int_{\partial\Omega} \phi \mathcal{Y}_l^m dS \right) \left( \int_{\partial\Omega} \psi \mathcal{Y}_l^m dS \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{l+1}{a} \int_{\partial\Omega} \phi_{lm} \psi \mathcal{Y}_l^m dS \quad (\text{C.11})$$

$$\approx \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{l+1}{a} \sum_{e=1}^{\mathcal{E}_s} \sum_{p=1}^{\mathcal{N}} \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} \omega_p \omega_q \phi_{lm} \psi_{pq\mathcal{N}}^e \mathcal{Y}_l^m(\theta_{pq}^e, \varphi_{pq}^e) |\mathcal{J}_S^e|_{pq} \quad (\text{C.12})$$

À l'image du traitement de la partie volumique, on pose  $\psi_{pq\mathcal{N}}^e = \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{k\mathcal{N}}$ , ce qui nous permet directement de calculer :

$$(\mathbf{N}_2^e \cdot \Phi^e)_{ijk} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{l+1}{a} \omega_i \omega_j \phi_{lm} \mathcal{Y}_l^m(\theta_{ij}^e, \varphi_{ij}^e) |\mathcal{J}_S^e|_{ij} \delta_{k\mathcal{N}} \quad (\text{C.13})$$

Connaissant les coefficients  $\phi_{lm}$  grâce à la relation C.10.

## C.2 Régularisation de l'opérateur DtN

L'opérateur DtN présente une somme infinie d'harmoniques sphériques ce qui numériquement parlant est impossible à réaliser. On va dans la pratique tronquer le développement à un degré  $N$ . Cette troncature peut engendrer des perturbations dans la transformée inverse, la solution en espace n'est alors plus exactement la même que celle qu'elle serait avec le développement d'harmoniques sphériques complet. Ce problème fut largement étudié dans le cadre plus général de l'équation de Helmholtz, ainsi qu'en acoustique en physique numérique (voir Grote & Keller (1995), Deakin & Rasmussen (1996) notamment). Une façon de contrer ce problème est de chercher une solution équivalente au DtN qui soit asymptotique à la solution pour les plus hauts degrés. Le tout est de chercher un autre opérateur qui soit de la dimension de la dérivée radiale sur  $\partial\Omega$  :  $\partial_r \phi = B\phi$ , qui soit pour les hauts degrés  $l \geq N$  équivalent à  $D\phi$  et qui soit de plus exprimable sans nécessairement être décomposé en harmoniques sphériques. On pourra alors redéfinir un opérateur DtN régularisé  $D^R$  qui sera la somme de l'opérateur d'origine  $D$  tronqué au degrés  $N$  et de l'autre approché  $B$  pour les degrés les plus élevés :

$$\partial_r \phi = D\phi \approx D^R \phi = D_{l \leq N} \phi + B_{l > N} \phi \quad (\text{C.14})$$

Ce que l'on pourra encore écrire :

$$D^R \phi = [D_{l \leq N} - B_{l \leq N}] \phi + B \phi \quad (\text{C.15})$$

La formule ci-dessus est la formulation générale de l'opérateur DtN tronqué régularisé et appliqué à  $\phi$ , que nous utiliserons. Il nous reste dorénavant à expliciter  $B \phi$ .

La détermination de  $B$  pour ce genre de problème suit les travaux de Grote & Keller (1995). Dans notre cas, un  $B$  très simple suffira, je ne m'étendrai donc pas trop sur la théorie, mais plutôt sur le principe qui nous fait choisir cet opérateur. En tronquant les harmoniques, on pose explicitement que pour  $l \geq N$ ,  $\frac{l+1}{a} \phi_{lm} = 0$ , ce qui est une approximation brutale et source de perturbations numériques.

Connaissant la formulation 3.36 de notre opérateur DtN, par définition des décompositions en harmoniques sphériques, on a nécessairement

$$\lim_{l \rightarrow \infty} [(l+1) \phi_{lm}] = 0 \quad (\text{C.16})$$

Or de même

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \phi_{lm} = 0 \quad (\text{C.17})$$

Les deux expressions suivantes seront donc équivalentes à l'infini :

$$\frac{l+1}{a} \phi_{lm} \sim \frac{1}{a} \phi_{lm} \quad \text{pour } l \rightarrow \infty \quad (\text{C.18})$$

L'opérateur de régularisation sera donc ici simplement  $B = \frac{1}{a}$ , tel que :

$$B \phi = \frac{1}{a} \phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{a} \phi_{lm} \mathcal{Y}_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{C.19})$$

et par conséquent,

$$D^R \phi = - \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^{+l} \frac{l}{a} \left( \int_{\partial\Omega} \phi \mathcal{Y}_l^m dS \right) \mathcal{Y}_l^m - \frac{1}{a} \phi \quad (\text{C.20})$$

Notons que cette formulation ne change que très légèrement l'expression de la matrice  $\mathbf{N}_2$ .

### C.3 Prise en compte de l'aspect temporel

Nous traitons ici le problème de la gravito-élasticité approchée en dynamique. L'échelle temporelle est discrétisée, on définit un intervalle de temps caractéristique  $\Delta t$ . À chaque instant  $t_i$ , on note  $u_i$ ,  $v_i$  et  $a_i$  les champs de déplacement, de vitesse et d'accélération. On note aussi  $\Phi_i$  le potentiel de gravité,  $F_1^i$  et  $F_2^i$  les seconds membres de l'équation du mouvement approchée et de l'équation de redistribution des masses approchées.

Pour extrapoler les différents champs cinématiques, on utilise le schéma de Newmark, supposant connus  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $\Phi_0$  (voir Hugues, 1987; Chaljub, 2000) :

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t v_i + \Delta t^2 \left( \left( \frac{1}{2} - \beta \right) a_i + \beta a_{i+1} \right) \quad (\text{C.21})$$

$$v_{i+1} = v_i + \Delta t \left( (1 - \gamma) a_i + \gamma a_{i+1} \right) \quad (\text{C.22})$$

avec deux constantes de  $\mathbb{R}$  à définir  $\beta$  et  $\gamma$ .

À l'instant  $t + 1$ , l'équation du mouvement approchée est égale à :

$$\mathbf{M} a_{i+1} + \mathbf{K} u_{i+1} + \mathbf{L}^T \Phi_{i+1} = F_1^{i+1} \quad (\text{C.23})$$

Appliquant le schéma de Newmark à l'équation précédente, le schéma revient à déterminer en chaque instant  $i + 1$ , connaissant  $u_i$ ,  $v_i$  et  $a_i$ , la quantité  $a_{i+1}$  vérifiant :

$$(\mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}) a_{i+1} + \mathbf{L}^T \Phi_{i+1} = F_1^{i+1} - \mathbf{K} \left( u_i + \Delta t v_i + \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) a_i \right) \quad (\text{C.24})$$

L'équation de Poisson approchée est  $\mathbf{N}\Phi_{i+1} = -\mathbf{L} u_{i+1} + F_2^{i+1}$ . Le système global à résoudre est donc celui-ci :

$$\begin{aligned} (\mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}) a_{i+1} + \mathbf{L}^T \Phi_{i+1} &= F_1^{i+1} - \mathbf{K} \left( u_i + \Delta t v_i + \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) a_i \right) \\ \mathbf{L} a_{i+1} + \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \mathbf{N} \Phi_{i+1} &= \frac{1}{\Delta t^2 \beta} F_2^{i+1} - \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \mathbf{L} \left( u_i + \Delta t v_i + \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) a_i \right) \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Si on choisit  $\beta = 0$  le schéma est alors explicite. De plus si on prend  $\gamma = 1/2$  le schéma revient à un schéma aux différences finies centré à l'ordre 1. Le schéma est alors conditionnellement stable. Dans le cas de la Terre, cette condition de stabilité se traduit par la nécessité de choisir un  $\Delta t \lesssim 1$  s. C'est le schéma généralement choisie pour les modèles sismologiques.

Dans notre étude la condition de stabilité serait trop restrictive. Nous serions obligés de choisir un schéma implicite inconditionnellement stable (à savoir avec  $\beta \geq \gamma \geq 1/2$ ) pour pouvoir choisir un  $\Delta t$  plus important. Cela nous obligerait à résoudre à chaque pas de temps un système linéaire. Ce dernier est formellement le même que celui dans le cas statique, les matrices symétriques à "inverser" étant ici  $(\mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K})$  et  $\frac{1}{\Delta t^2 \beta} \mathbf{N}$ .

## C.4 Méthodes de déraffinement du maillage avec la profondeur

Nous présentons les différentes approches qui furent appliquées dans de précédentes études pour réduire le nombre d'éléments latéraux :

1. développer un maillage avec des raccords entre éléments non-conformes au niveau des interfaces du maillage (Chaljub, 2000; Chaljub et al., 2003). Cela permet de diviser par deux le nombres d'éléments latéraux de couronne à couronne en allant vers le centre de la sphère (voir la figure C.1). Le système est résolu en ajoutant une phase intermédiaire pour rétablir l'équilibre des tractions entre éléments (basé sur les techniques du "mortar").
2. déformer localement certains éléments de façon à ce que le nombre d'éléments latéraux diminuent avec la profondeur mais que leurs raccords restent conformes (Komatitsch & Tromp, 2002). La baisse du nombre d'éléments avec la profondeur est moins forte et plus hétérogène, par contre elle ne complique pas la méthode de calcul numérique (voir la figure C.2).
3. supprimer le maillage hexaédrique interne et coupler la méthode avec une méthode modale qui ne s'occupe que de la partie central de la planète (Capdeville et al., 2003). Cela accélère le calcul mais demande de développer un opérateur DtN interne complexe.

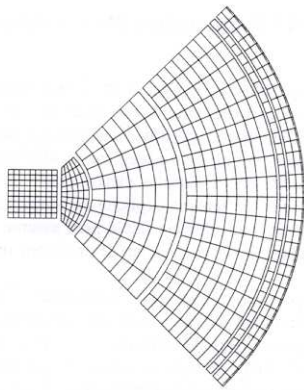


FIG. C.1: Déraffinement de la triangulation par création d'interfaces non-conformes (technique du "mortar", Chaljub, 2000)

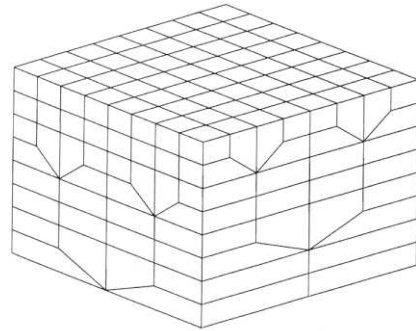


FIG. C.2: Déraffinement conforme en déformant quelques éléments (Komatitsch & Tromp, 2002)



# Annexe D

## Articles

Deux articles sont présentés dans cette annexe.

### **D.1 Analytical solutions of Love numbers for an hydrostatic ellipsoidal incompressible homogeneous Earth, using Lagrangian formulation :**

article rédigé par Marianne Greff dont je suis le second auteur. Il est actuellement (octobre 2004) en cours de soumission.

La convention de signe sur le potentiel de gravité utilisée dans cet article est opposée à celle que nous avons utilisée dans le manuscrit de thèse. La gravité est ici définie telle que  $\vec{g} = \vec{\nabla}\phi$ . Le potentiel de gravité global  $\phi$ , ainsi que toutes ses perturbations présentent donc des valeurs de signe opposé à celles présentées plus haut.

L'article contient 38 pages : **p137-174**

### **D.2 A new approach to compute accurate gravity time variations for a realistic Earth model with lateral heterogeneities :**

article dont je suis le premier auteur. Il a été soumis à Geophysical Journal International en janvier 2005.

L'article contient 4 pages : **p175-178**



## Analytical solutions of Love numbers for an hydrostatic ellipsoidal incompressible homogeneous Earth, using Lagrangian formulation

Marianne Greff-Lefftz<sup>a</sup>, Laurent Métivier<sup>a</sup> and Hilaire Legros<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Institut de Physique du Globe de Paris, 4 place Jussieu, 75252 Paris 05, France

<sup>b</sup> E.O.S.T., 5 rue René Descartes, 67084 Strasbourg, France

Submitted to *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*

*January, 18, 2005*

### **Address for correspondence:**

Marianne Greff-Lefftz

Institut de Physique du Globe de Paris

Département de Géomagnétisme et Paléomagnétisme

4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

E-mail: [greff@ipgp.jussieu.fr](mailto:greff@ipgp.jussieu.fr)

Fax: 33 1 44 27 33 73

## **Abstract**

Tidal forces acting on the Earth cause deformations and mass redistribution inside the planet involving surface motions and variation in the gravity field, which may be observed in geodetic experiments. Because for space geodesy it is now necessary to achieve the mm level in tidal displacements, we take into account the hydrostatic flattening of the Earth in the computation of the elasto-gravitational deformations. Analytical solutions are derived for the semi-diurnal tides on a slightly elliptical homogeneous incompressible elastic model. That simple analytical Earth's model is not a realistic representation of any real planet, but it is useful to understand the physics of the problem and also to check numerical procedures. We rediscover and discuss the Love's solutions and obtain new analytical solutions for the tangential displacement. We extend these analytical results to some geodetic responses of the Earth to tidal forces such as the perturbation of the surface gravity field, the tilt and the deviation of the vertical with reference to the Earth's axis.

## **Key Words**

Elasto-gravitational deformations; Love numbers; Body tides.

# 1 Introduction

Tidal forces acting on the Earth cause deformations and mass redistribution inside the planet involving surface motions and variation in the gravity field, which may be observed in geodetic experiments.

The tide is one of the most important external source and consequently one of the most studied. In 1862, Lord Kelvin made the first calculus of the elastic deformation of an homogeneous incompressible Earth under the action of the tidal gravitational potential. Some years latter, Love (1911) studied a compressible homogeneous Earth's model and showed that the tidal effects could be represented by a set of dimensionless numbers, the so-called Love numbers. Today, body tides effects at and outside the Earth's surface are always modeled in terms of the tidal Love numbers noted  $k$ ,  $h$  and  $l$  for respectively the gravitational field, the radial and tangential displacement. Takeuchi (1950) obtained a first estimation of these Love numbers by a numerical integration of the equations using a reference Earth's model given by seismologists. These results have then been extended by Wahr and Bergen (1986) and Dehant (1987) to an anelastic mantle.

The effect of the spheroidal shape of the Earth on the body tides has been already estimated by several authors [ Wahr (1981), Dehant (1987, 1991), Buffett et al. (1993), Wang (1994), Mathews et al. (1995), Dehant (1995) ...].

An analytical solution for this effect is only possible for a simple model. Love (1911) derived analytical solution, using an eulerian formulation, for the semi-diurnal tides on a slightly elliptical homogeneous incompressible elastic model. In this paper, we would like to rediscover the Love's solutions (in term of surface mass redistribution potential and radial displacement) using a Lagrangian formulation and obtain new analytical solutions for the tangential displacement. We intend to extend these results to some geodetic responses of the Earth to tidal forces such as the perturbation of the surface gravity field (with the associated gravimetric factor), the tilt and the deviation of the vertical with reference to the Earth's axis.

That simple Earth's model is not a realistic representation of any real planet, but because it allows analytical solutions, it is useful to understand the physics of the problem, and especially the influence of each geometric and physical parameter, and also to check the numerical procedure of a new method developed in a next paper (Métivier et al., 2005), This paper is organized as follows. In the first part (section 2), we recall the classical elasto-gravitational theory for a spheroidal hydrostatic pre-stress planet using the formalism proposed by Dahlen (1968) (see also Smith, 1974; Dahlen, 1976). In section 3, we

present the analytical solutions for an incompressible homogeneous elastic planet submitted to the semi-diurnal tidal potential and discuss our solutions with respect to the Love's ones. We extend these results (in section 4) to the analytical study of the geodetic and gravimetric responses of the Earth to the tides on the spheroidal deformed surface.

## 2 Elasto-gravitational theory for a spheroidal hydrostatic pre-stress planet

To describe the motion of slightly elliptical elastic Earth, we use the formalism proposed by Dahlen and Tromp (1998). The rotating planet is submitted to luni-solar gravitational forces  $\rho \vec{f}$  with  $\vec{f} = \vec{\nabla}V$ , where  $V$  is the luni-solar tidal potential. Under the effects of this cause, the Earth is deformed. The state of an internal particle is described by its density  $\rho$ , its displacement  $\vec{u}$ , its strain tensor  $[\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}[\partial_i u_j + \partial_j u_i]]$ , its stress tensor  $\Sigma_{ij}$ , its potential carried on by the rest of the body  $\Phi$  and the tidal potential  $V$ . We note  $\Psi$  the centrifugal potential:

$$\Psi = \Psi_o \left[ 1 - \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right] \quad \text{with} \quad \Psi_o = \frac{\Omega^2 r^2}{3} \quad (1)$$

where  $\Omega$  is the uniform angular velocity.

The mass and impulsion conservation, and the Poisson equation are written:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} &= 0 \\ \rho \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} &= \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\Sigma}} + \rho \vec{\nabla}(\Phi + \Psi) + \rho \vec{\nabla}V \\ \Delta \Phi &= -4\pi G \rho \end{aligned} \quad (2)$$

where  $\vec{v}$  is the velocity. In our hypotheses, these are the equations of the problem. We have to add a rheological law to link the stress tensor to the strain tensor.

The fundamental assumption in the elastogravitational theory is that the deformations are small in comparison with the reference configuration in hydrostatic equilibrium. We can thus use a perturbations theory. We introduce, in a point of the volume, the Eulerian perturbations. We put:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_o + \rho_1^e \\ \overline{\overline{\Sigma}} &= \overline{\overline{\Sigma}}_o + \overline{\overline{\Sigma}}_1^e \\ \Phi &= \Phi_o + \Phi_1^e \end{aligned} \quad (3)$$

The velocity  $\vec{v}$  and the potential  $V$  are perturbations. In addition, we remain in the frame of a linear theory in term of  $\vec{u}$ . Finally, we express the mass conservation from the displacement field. We thus obtain the following equations:

$$\begin{aligned} \rho_1^e + \vec{\nabla} \cdot (\rho_o \vec{u}) &= 0 \\ \rho_o \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} &= \vec{\nabla} \cdot (\overline{\overline{\Sigma}}_o + \overline{\overline{\Sigma}}_1^e) + (\rho_o + \rho_1^e) \vec{\nabla} (\Phi_o + \Psi + \Phi_1^e) + \rho_o \vec{\nabla} V \\ \Delta(\Phi_o + \Phi_1^e) &= -4\pi G(\rho_o + \rho_1^e) \end{aligned} \tag{4}$$

We have to describe the different states appearing in these last equations, that is to say, the hydrostatic reference state and the elastogravitational perturbed state. Let us first to recall the solutions for our elliptical hydrostatic reference model.

## 2.1 Hydrostatic reference model

We are interested in the spheroidal Earth model which results from the uniform angular velocity  $\Omega$  of the planet remaining in a state of hydrostatic equilibrium.

In a state without deformation, called reference state, the planet is elliptical and an internal particle is characterized by a density  $\rho_o + \delta\rho_o$ , a stress  $\overline{\overline{\Sigma}}_o + \delta\overline{\overline{\Sigma}}_o$  which is assumed isotropic [ $\overline{\overline{\Sigma}}_o + \delta\overline{\overline{\Sigma}}_o = -(P_o + \delta P_o) \overline{\overline{I}}$ ], a gravitational potential  $\Phi_o + \delta\Phi_o$  and the centrifugal potential  $\Psi$ . Potential, pressure and density are the sum of a radial term and a zonal degree 2 term. We note  $P_o$ ,  $\rho_o$  and  $\Phi_o$  respectively the radial part of the pressure, density and gravitational potential induced by the radial part of the centrifugal potential  $\Psi_o$ ; and  $\delta P_o$ ,  $\delta\rho_o$  and  $\delta\Phi_o$  respectively the zonal degree 2 perturbations of the spherical pressure, density and gravitational potential induced by the zonal part of the centrifugal potential.  $P_2^0 = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$  is the zonal degree2 Legendre polynomial.

The mechanical and gravitational equilibrium equations governing the state of our reference Earth are:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} (P_o + \delta P_o) = (\rho_o + \delta\rho_o) \vec{\nabla} (\Phi_o + \delta\Phi_o + \Psi) \\ \Delta(\Phi_o + \delta\Phi_o) = -4\pi G(\rho_o + \delta\rho_o) \end{cases} \tag{5}$$

We may solve first the radial part of the equation and then the zonal degree 2 part. For our simple homogeneous incompressible model, there is no density perturbation  $\delta\rho_o = 0$ . Both the potential and the pressure are the sum of a radial term and a zonal degree two term. We note:

$$\Phi_o + \Psi + \delta\Phi_o = \tilde{\Phi}_o(r) + \delta\tilde{\Phi}_o(r, \theta, \varphi) \tag{6}$$

with  $\tilde{\Phi}_o(r) = \Phi_o(r) + \Psi_o(r)$  and  $\delta\tilde{\Phi}_o(r, \theta, \varphi) = \delta\Phi_o(r, \theta, \varphi) + \Psi_o P_2^0(\theta)$  i.e. taking into account both the mass redistribution potential and the direct effect of the zonal degree 2 part of the centrifugal potential.

### 2.1.1 Spherical reference model

The radial part of the gravitational potential and hydrostatic pressure are governing by the following equations:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Sigma}_o + \rho_o \vec{\nabla}(\Phi_o + \Psi_o) = \vec{0} \quad (7)$$

and the Poisson equation:

$$\Delta\Phi_o = -4\pi G\rho_o \quad (8)$$

For realistic Earth's model, we usually assume that the solutions of these equations are known from seismology.

For our incompressible homogeneous model, the solutions are:

$$\tilde{\Phi}_o(r) = \Phi_o(r) + \Psi_o(r) = \frac{g_o a}{2} \left[ 3 - \frac{r^2}{a^2} \right] + \frac{\Omega^2 r^2}{3} \quad \text{and} \quad P_o(r) = \frac{\rho_o g_o a}{2} \left[ 1 - \frac{r^2}{a^2} \right] - \frac{\rho_o \Omega^2 a^2}{3} \left[ 1 - \frac{r^2}{a^2} \right] \quad (9)$$

where  $a$  is the Earth's radius and if we note  $M$  the mass of the planet,  $g_o = \frac{GM}{a^2}$  the surface gravity.

### 2.1.2 Elliptical reference model

Subtracting equations (7), and (8) to equations (5), we rediscover that the zonal degree 2 fluid deformations obey to the Clairaut equation (e.g. Jeffreys, 1970), that-is-to-say depend only on the density stratification and on the angular velocity of the planet  $\Omega$ . We note  $\alpha(r)$  the hydrostatic flattening within the Earth. We have

$$\begin{cases} \delta\tilde{\Phi}_o(r, \theta, \varphi) = -\frac{2}{3}\alpha(r)g(r)r P_2^0 \\ \delta P_o(r, \theta, \varphi) = -\frac{2}{3}\alpha(r)\rho_o(r)g(r)r P_2^0 \end{cases} \quad (10)$$

There is a surface degree 2 topography, noted  $\delta d$ , such as:  $\delta d = -\frac{2}{3}\alpha(a)aP_2^0$ .

For our incompressible homogeneous model, we have  $\alpha = \frac{5}{4}q_o$  with  $q_o = \frac{\Omega^2 a}{g_o}$  the geodetical constant.



### 2.1.3 Remarks

The radial terms  $\tilde{\Phi}_o(r)$ ,  $P_o(r)$  and also  $\rho_o(r)$  are related to the theory of the reference state that-is-to-say to the theory of the interior of the planets. It is a static theory which takes into account most of the fundamental thermodynamical equations, of potentials, of phase changes and of states equations. It takes also into account the Poisson equation. This theory of the reference state is, for the Earth, known from seismology. It allows to have a mean model for the radially stratified Earth. The most classical is the PREM model derived by Dziewonski and Anderson (1981).

Note that Love (1911), in his analytical calculation, worked with respect to a non-rotating spherical reference Earth characterized by  $\Phi_o(r)$ ,  $P_o(r)$  and  $\rho_o(r)$ , that is to say, without taking into account the radial part of the centrifugal potential; he kept simultaneously, in the spheroidal perturbed state, the radial and the degree 2 term in both the incompressible pressure and the centrifugal potential.

In our approach, we choice to work with respect to a rotating spherical reference Earth which takes into account both the radial part of the centrifugal potential and the induced radial deformation, that-is-to-say a planet characterized by  $\tilde{\Phi}_o(r)$ ,  $P_o(r)$  and  $\rho_o(r)$ . This will change significantly the Love numbers perturbations and it will be taken into account when we will recombine the different perturbed states to build the final solution on the deformed surface of the planet.

Now, we will solve the elasto-gravitational theory for a spheroidal hydrostatic planet in two steps: first, we will compute the deformations  $\vec{u}$  and  $\Phi$  with respect to a spherical reference Earth's model, and then the perturbations of these deformations  $\delta\vec{u}$  and  $\delta\Phi$  due to the elliptical shape of the reference model (for a review of this perturbation theory, see Dahlen and Tromp (1998)).

Let us first recall the solutions for a spherical Earth.

## 2.2 Elastogravitational theory for a spherical Earth

The equations governing the hydrostatic equilibrium of the spherical reference configuration are given by equations (7, 8 and 9). Taking into account these equations in the set

of the elastogravitational equations (4), we have:

$$\begin{aligned}\rho_1^e + \vec{\nabla} \cdot (\rho_o \vec{u}) &= 0 \\ \rho_o \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} &= \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\Sigma}}_1^e + \rho_o \vec{\nabla} \Phi_1^e + \rho_1^e \vec{\nabla} (\Phi_o + \Psi_o) + \rho_o \vec{\nabla} V \\ \Delta \Phi_1^e &= -4\pi G \rho_1^e\end{aligned}\tag{11}$$

To obtain the whole set of equations, we need to add the rheological law linking  $\overline{\overline{\Sigma}}_1^e$  to  $\epsilon_{ij}$ . This relation is the one of an elastic body, but we have to be careful if the reference state is pre-stressed. We can show (Dahlen and Tromp, 1998) that if the pre-stress is a pressure (no deviatoric part), then the best parametrization of the perturbations of the stress tensor is the Lagrangian parametrization. We thus introduce the tensor  $\overline{\overline{\Sigma}}_1^l$  and the rheological elastic law for an isotropic medium is, noting  $\lambda$  and  $\mu$  the Lamé parameters ( $\mu$  is also called the rigidity):

$$\Sigma_{1ij}^l = \lambda [\vec{\nabla} \cdot \vec{u}] \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}\tag{12}$$

with the classical relation between the Lagrangian and Eulerian perturbation:

$$\overline{\overline{\Sigma}}_1^l = \overline{\overline{\Sigma}}_1^e + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \overline{\overline{\Sigma}}_o\tag{13}$$

The conservation of impulsion may be consequently written:

$$\rho_o \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = \vec{\nabla} \cdot [\lambda [\nabla \cdot \vec{u}] \overline{\overline{I}} + 2\mu \overline{\overline{\epsilon}}] + \vec{\nabla} [\vec{u} \cdot \vec{\nabla} P_o] + \rho_o \vec{\nabla} \Phi_1^e + \rho_1^e \vec{\nabla} (\Phi_o + \Psi_o) + \rho_o \vec{\nabla} V\tag{14}$$

$\lambda$  and  $\mu$  are related to the reference model.

The solution of the obtained set of equations is complex but, because the sphericity of the reference model, it is judicious to use spherical coordinates and to expand the parameters on a basis of spherical functions. Let  $r$ ,  $\theta$  and  $\varphi$  the spherical coordinates in a frame centered to the mass center of the reference model;  $r$  is the radius,  $\theta$  the colatitude and  $\varphi$  the longitude. We use spherical harmonics  $Y_{nm}(\theta, \varphi)$  (Heiskanen and Moritz, 1967):

- for the displacement  $\vec{u}$ :

$$\vec{u}(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[ y_{1n} Y_n^m \vec{e}_r + y_{3n} r \vec{\nabla} Y_n^m + y_{7n} \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} Y_n^m) \right]\tag{15}$$

$y_{1n}(r)$  is the radial part of  $\vec{u}$ ,  $y_{3n}(r)$  the spheroidal part and  $y_{7n}(r)$  the toroidal part. These coefficients are the spectral components of  $\vec{u}$ .

- for the Lagrangian traction  $\vec{T}^l = \vec{n}_o \cdot \overline{\overline{\Sigma}}_1^l$  where  $\vec{n}_o$  is the outer normal to the spherical reference surface ( $\vec{n}_o = \vec{e}_r$ ).

$$\vec{T}^l = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n y_{2n}(r) Y_n^m \vec{e}_r + r y_{4n}(r) \vec{\nabla} Y_n^m + y_{8n}(r) \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} Y_n^m)$$

- for the potential

$$V + \Phi_1^e = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n y_{5n}(r) Y_n^m \quad \text{with} \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n V_n^m \frac{r^n}{a^n} Y_n^m$$

- for the Lagrangian attraction, we introduce:

$$y_{6n} = \frac{dy_{5n}}{dr} - 4\pi G \rho_o y_{1n}(r)$$

Using these notations, the set of equations (4) may be written as a differential system with 8 equations of first order (the indicial  $n$  is omitted for simplicity). In the frequency (noted  $\omega$ ) domain, we have (Alterman, Jarosh and Pekeris, 1959), where the ' denotes the radial derivative:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{y}_1 = -\frac{2(K-\frac{2}{3}\mu)}{(K+\frac{4}{3}\mu)}\frac{y_1}{r} + \frac{1}{(K+\frac{4}{3}\mu)}y_2 + \frac{n(n+1)(K-\frac{2}{3}\mu)}{(K+\frac{4}{3}\mu)}\frac{y_3}{r} \\
\dot{y}_2 = [-4\rho_o g + \frac{2}{3}\rho_o\Omega^2 r - \omega^2\rho_o r + \frac{12\mu K}{(K+\frac{4}{3}\mu)r}]\frac{y_1}{r} - \frac{4\mu}{(K+\frac{4}{3}\mu)}\frac{y_2}{r} + n(n+1)[\rho_o g - \frac{6\mu K}{(K+\frac{4}{3}\mu)r}]\frac{y_3}{r} \\
\quad + \frac{n(n+1)y_4}{r} - \rho_o y_6 \\
\dot{y}_3 = -\frac{y_1}{r} + \frac{y_3}{r} + \frac{y_4}{\mu} \\
\dot{y}_4 = [\rho_o g - \frac{2}{3}\rho_o\Omega^2 r - \frac{2\mu(3K)}{(K+\frac{4}{3}\mu)r}]\frac{y_1}{r} + \left\{ -\omega^2\rho_o r + \frac{2\mu[(K-\frac{2}{3}\mu)(2n^2+2n-1)+2\mu(n^2+n-1)]}{(K+\frac{4}{3}\mu)r} \right\} \frac{y_3}{r} \\
\quad - \frac{(K-\frac{2}{3}\mu)}{(K+\frac{4}{3}\mu)}\frac{y_2}{r} - \frac{3y_4}{r} - \rho_o\frac{y_5}{r} \\
\dot{y}_5 = 4\pi G\rho_o y_1 + y_6 \\
\dot{y}_6 = -4\pi G\rho_o n(n+1)\frac{y_3}{r} + \frac{n(n+1)}{r}\frac{y_5}{r} - \frac{2y_6}{r} \\
\dot{y}_7 = \frac{y_7}{r} + \frac{y_8}{\mu} \\
\dot{y}_8 = \left[ -\omega^2\rho_o r + \frac{\mu(n^2+n-2)}{r} \right] \frac{y_7}{r} - \frac{3y_8}{r}
\end{array} \right. \quad (16)$$

The density  $\rho_o(r)$ , the rigidity  $\mu(r)$  and the incompressibility  $K(r)$  ( $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ ) depend on the radial stratification of the reference Earth's model.  $g(r)$  is the gravity. For a homogeneous reference sphere, we have  $g(r) = g_o \frac{r}{a}$  where  $g_o$  is the surface gravity. Note that in the second and fourth equation, there is a term related to the radial part of the centrifugal potential.

This system describes the elastogravitational behaviour within the elastic parts of a planet. It permits also the study of the seismic modes. For the studies related to deformations with periods large in comparison with one hour, we classically assume that  $\omega = 0$  in this system: we talk then of static deformations.

To solve the elastogravitational equations, we have to add boundary conditions:

- the displacement and the attraction have to vanish at the center of mass ( $r = 0$ )
- at each internal interface of the reference spherical model, the  $y_i$  are continuous
- at the surface of the reference spherical Earth's model ( $r = a$ ), we have:

$$\left[ \frac{\partial \Phi_1^e}{\partial r} + 4\pi G\rho_o u_r \right]_{a^-}^{a^+} = 0 \quad \text{or} \quad y_6(a) + \frac{n+1}{a}y_5(a) = \frac{2n+1}{a}V_n \quad (17)$$

- in absence of external pressure or traction acting on this Earth surface, the Lagrangian traction has to vanish at  $r = a$ :

$$\vec{T}^l(a) = \vec{0} \quad (18)$$

For an incompressible homogeneous Earth model, the solutions may be written:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(r) = C_3 r^{n+1} + C_4 r^{n-1} \\ y_2(r) = 2\mu \left[ \frac{n^2-n-3}{n} C_3 r^n + (n-1) C_4 r^{n-2} \right] + \frac{4}{3} \pi G \rho_o^2 \left[ C_3 r^{n+2} + C_4 r^n \right] \left( 1 - \frac{2}{3} q_o \right) - \rho_o C_5 r^n \\ y_3(r) = \frac{n+3}{n(n+1)} C_3 r^{n+1} + \frac{C_4}{n} r^{n-1} \\ y_4(r) = 2\mu \left[ \frac{n+2}{n+1} C_3 r^n + \frac{n-1}{n} C_4 r^{n-2} \right] \\ y_5(r) = C_5 r^n \\ y_6(r) = n C_5 r^{n-1} - 4\pi G \rho_o \left[ C_3 r^{n+1} + C_4 r^{n-1} \right] \end{array} \right. \quad (19)$$

Note that in the  $y_2$  propagator, there is a term in  $q_o$ , i.e., related to the radial part of the centrifugal potential.

The constants are determined from the boundary condition which may be written for a degree  $n$  volumic potential  $V_n$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_2(a) = 0 \\ y_4(a) = 0 \\ y_6(a) + \frac{n+1}{a} y_5(a) = \frac{2n+1}{a} V_n \end{array} \right. \quad (20)$$

For  $n = 1$ , we have to modify these boundary conditions in order to take into account the conservation of the center of mass ( $y_5(a) = 0$ ). We do not take into account this particular case in this paper where we are interested in the degree 2 tidal potential.

We introduce  $\delta X_n = \frac{q_o}{3} \frac{2n+1}{n-1} \frac{1}{1+\bar{\mu}}$  where  $q_o$  is the geodetical constant and  $\bar{\mu}_n = \frac{2n^2 + 4n + 3}{n} \frac{\mu}{\rho_o g_o a}$ ; the constants are:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_3 = -\frac{1}{2} \frac{(n+1)}{\bar{\mu}_n + 1} \frac{1}{a^n} \frac{V_n}{g_o a} \left[ 1 + \delta X_n \right] \\ C_4 = \frac{n(n+2)}{2(n-1)(1+\bar{\mu})} \frac{1}{a^{n-2}} \frac{V_n}{g_o a} \left[ 1 + \delta X_n \right] \\ C_5 = \left[ 1 + \frac{3}{2(n-1)(1+\bar{\mu})} \left( 1 + \delta X_n \right) \right] \frac{1}{a^n} V_n \end{array} \right. \quad (21)$$

We introduce the classical tidal Love numbers (Love, 1911) defined by:

$$y_1(a) = h_n \frac{V_n}{g_o}; \quad y_3(a) = l_n \frac{V_n}{g_o}; \quad y_5(a) = (1 + k_n)V_n.$$

For a homogeneous incompressible Earth model, these numbers may be analytically computed:

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{3}{2(n-1)} \frac{1}{1 + \bar{\mu}_n} [1 + \delta X_n] \\ h_n &= \frac{2n+1}{2(n-1)} \frac{1}{1 + \bar{\mu}_n} [1 + \delta X_n] \\ l_n &= \frac{3}{2n(n-1)} \frac{1}{1 + \bar{\mu}_n} [1 + \delta X_n] \end{aligned}$$

Taking  $q_o = 0$ , we rediscover the classical Love solutions, which was computed for a non rotating spherical Earth.

For a degree two tidal potential we note, for simplicity,  $\bar{\mu}_2 = \bar{\mu}$  and we have:

$$k_2 = \frac{3}{2} \frac{1}{1 + \bar{\mu}} \left[1 + \frac{5}{3} \frac{q_o}{1 + \bar{\mu}}\right]; \quad h_2 = \frac{5}{2} \frac{1}{1 + \bar{\mu}} \left[1 + \frac{5}{3} \frac{q_o}{1 + \bar{\mu}}\right]; \quad l_2 = \frac{3}{4} \frac{1}{1 + \bar{\mu}} \left[1 + \frac{5}{3} \frac{q_o}{1 + \bar{\mu}}\right]$$

Taking  $a = 6371000$  m,  $\rho_o = 5520$  kg.m<sup>-3</sup>,  $\mu = 0.115 \times 10^{12}$  Pa and  $q_o = \frac{1}{289.9}$ , we obtain:

$$k_2 = 0.360932; \quad h_2 = 0.601553; \quad l_2 = 0.180466$$

Let  $V_{M_2}$  be the degree two tidal potential induced by the semi-diurnal lunar wave  $M_2$ :

$$V_{M_2} = V_o \ 3 \sin^2 \theta \cos(\sigma t + 2\varphi) \frac{r^2}{a^2}$$

We find the classical solutions for an incompressible homogeneous Earth model:

$$\left\{ \begin{aligned} u_r(r, \theta, \varphi) &= \frac{3}{2} \sin^2 \theta \frac{V_o}{g_o} \frac{1}{1 + \bar{\mu}} \cos(\sigma t + 2\varphi) \left[-3 \frac{r^3}{a^3} + 8 \frac{r}{a}\right] (1 + \delta X_2) \\ u_\theta(r, \theta, \varphi) &= \frac{3}{2} \sin \theta \cos \theta \frac{V_o}{g_o} \frac{1}{1 + \bar{\mu}} \cos(\sigma t + 2\varphi) \left[-5 \frac{r^3}{a^3} + 8 \frac{r}{a}\right] (1 + \delta X_2) \\ u_\varphi(r, \theta, \varphi) &= -\frac{3}{2} \sin \theta \frac{V_o}{g_o} \frac{1}{1 + \bar{\mu}} \sin(\sigma t + 2\varphi) \left[-5 \frac{r^3}{a^3} + 8 \frac{r}{a}\right] (1 + \delta X_2) \\ \Phi_1(r, \theta, \varphi) &= \frac{9}{2} \sin^2 \theta \ V_o \ \frac{1}{1 + \bar{\mu}} \cos(\sigma t + 2\varphi) \frac{r^2}{a^2} (1 + \delta X_2) \end{aligned} \right. \quad (22)$$

We plot, in Figure 1, the surface radial and tangential displacement, at  $t = 0$ , induced by the tidal wave  $M_2$ , and the perturbed geoid  $\frac{1}{g_o}[\Phi_1 + V_{M_2}]_{r=a}$  in millimeter.

Neglecting the effects of the radial centrifugal potential ( $q_o \simeq 0$ ), for simplicity, the Cauchy stress tensor becomes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{rr}^l = 3 \sin^2 \theta \frac{\mu V_o}{g_o a(1+\bar{\mu})} \cos(\sigma t + 2\varphi) \left[ 8 - 9 \frac{r^2}{a^2} \right] - P_1 \\ \Sigma_{r\theta}^l = 24 \sin \theta \cos \theta \frac{\mu V_o}{g_o a(1+\bar{\mu})} \cos(\sigma t + 2\varphi) \left[ 1 - \frac{r^2}{a^2} \right] \\ \Sigma_{r\varphi}^l = -24 \sin \theta \frac{\mu V_o}{g_o a(1+\bar{\mu})} \sin(\sigma t + 2\varphi) \left[ 1 - \frac{r^2}{a^2} \right] \\ \Sigma_{\theta\theta}^l = 3 \frac{\mu V_o}{g_o a(1+\bar{\mu})} \cos(\sigma t + 2\varphi) \left[ 8 \cos^2 \theta + \frac{r^2}{a^2} (2 - 7 \cos^2 \theta) \right] - P_1 \\ \Sigma_{\varphi\varphi}^l = 3 \frac{\mu V_o}{g_o a(1+\bar{\mu})} \cos(\sigma t + 2\varphi) \left[ -8 + \frac{r^2}{a^2} (7 - 2 \cos^2 \theta) \right] - P_1 \\ \Sigma_{\theta\varphi}^l = 3 \frac{\mu V_o}{g_o a(1+\bar{\mu})} \sin(\sigma t + 2\varphi) \cos \theta \left[ 5 \frac{r^2}{a^2} - 8 \right] \end{array} \right.$$

where  $P_1$  is a pressure appearing in this simple incompressible case and corresponding to  $\lambda \text{div} \vec{u}$

$$P_1(r, \theta, \varphi) = -\frac{3}{2} \sin^2 \theta \frac{\rho_o V_o}{1 + \bar{\mu}} \cos(\sigma t + 2\varphi) \frac{r^2}{a^2} \left[ -3 \frac{r^2}{a^2} + 3 + \frac{4}{19} \bar{\mu} \right]$$

The order of magnitude of these stresses is about some thousands Pascal.

### 2.3 Elasto-gravitational theory for a spheroidal hydrostatic planet

In this part, we investigate the effects of the spheroidal shape of the Earth on the body tides. The reference ellipsoidal hydrostatic model is described as a perturbation of the spherical reference state [see equations (5)].

The elasto-gravitational deformations, induced by a tidal potential  $V$  when the reference model is assumed to be ellipsoidal, may be written as the sum of the spherical elasto-gravitational deformations plus a perturbation.

$$\overline{\overline{\Sigma}}_1^l + \delta \overline{\overline{\Sigma}}_1^l, \quad \vec{u} + \delta \vec{u}, \quad \Phi_1 + \delta \Phi_1$$

Taking into account the equations governing the reference state (5), the equilibrium and

Poisson equations become:

$$\begin{aligned}
(\rho_o + \delta\rho_o) \frac{d^2(\vec{u} + \delta\vec{u})}{dt^2} &= \operatorname{div} \left( \overline{\overline{\Sigma_1^l}} + \overline{\delta\Sigma_1^l} + [(\vec{u} + \delta\vec{u}) \cdot \nabla] (P_o + \delta P_o) \overline{\overline{I}} \right) + (\rho_o + \delta\rho_o) \vec{\nabla}(\Phi_1 + V + \delta\Phi_1) \\
&\quad - \operatorname{div} [(\rho_o + \delta\rho_o)(\vec{u} + \delta\vec{u})] \vec{\nabla}(\tilde{\Phi}_o + \delta\tilde{\Phi}_o) \\
\Delta [\Phi_1 + \delta\Phi_1] &= 4\pi G \operatorname{div} [(\rho_o + \delta\rho_o)(\vec{u} + \delta\vec{u})]
\end{aligned} \tag{23}$$

Subtracting the equilibrium and Poisson equations for a spherical Earth (11) and neglecting the second order terms (such as  $\delta\rho_o \delta\vec{u}$  ...), we obtain:

$$\begin{aligned}
\delta\rho_o \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} + \rho_o \frac{d^2\delta\vec{u}}{dt^2} &= \operatorname{div} \left[ \overline{\overline{\delta\Sigma_1^l}} + (\vec{u} \cdot \nabla) \delta P_o \overline{\overline{I}} + (\delta\vec{u} \cdot \nabla) P_o \overline{\overline{I}} \right] + \delta\rho_o \vec{\nabla}(\Phi_1 + V) + \rho_o \vec{\nabla} \delta\Phi_1 \\
&\quad - \operatorname{div} [\rho_o \delta\vec{u} + \delta\rho_o \vec{u}] \vec{\nabla} \tilde{\Phi}_o - \operatorname{div}(\rho_o \vec{u}) \vec{\nabla} \delta\tilde{\Phi}_o \\
\Delta \delta\Phi_1 &= 4\pi G \operatorname{div} [\rho_o \delta\vec{u} + \delta\rho_o \vec{u}]
\end{aligned} \tag{24}$$

The perturbed Cauchy stress tensor  $\overline{\overline{\delta\Sigma_1^l}}$  may be written (for more details, see Dahlen and Tromp, 1998, p79):

$$\left( \overline{\overline{\delta\Sigma_1^l}} \right)_{ij} = \Gamma_{ijkl} (\delta u_l)_{,k} + \delta \Gamma_{ijkl} (u_l)_{,k} \tag{25}$$

$$\text{with } \Gamma_{ijkl} = \left( K - \frac{2}{3}\mu \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$\text{and } \delta \Gamma_{ijkl} = \left( \delta K - \frac{2}{3} \delta \mu \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta \mu [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}]$$

$K(r)$  and  $\mu(r)$  are respectively the radial part of the compressibility and of the shear modulus, and  $\delta K$  and  $\delta \mu$  the lateral variations.

Note that the set of equation (24) may be written under the following form:

$$\begin{aligned}
\rho_o \frac{d^2\delta\vec{u}}{dt^2} - \operatorname{div} \left[ \overline{\overline{\Gamma}} : \left( \vec{\nabla} \delta\vec{u} \right) + (\delta\vec{u} \cdot \nabla) P_o \overline{\overline{I}} \right] - \rho_o \vec{\nabla} \delta\Phi_1 + \operatorname{div}(\rho_o \delta\vec{u}) \vec{\nabla} \tilde{\Phi}_o &= \vec{F}_1 \\
\Delta \delta\Phi_1 - 4\pi G \operatorname{div}(\rho_o \delta\vec{u}) &= \vec{F}_2
\end{aligned} \tag{26}$$

with

$$\vec{F}_1 = -\delta\rho_o \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} + \operatorname{div} \left[ \left( \overline{\overline{\delta\Gamma}} \right) : \left( \vec{\nabla} \vec{u} \right) + (\vec{u} \cdot \nabla) \delta P_o \overline{\overline{I}} \right] + \delta\rho_o \vec{\nabla}(\Phi_1 + V) - \operatorname{div}[\delta\rho_o \vec{u}] \vec{\nabla} \tilde{\Phi}_o - \operatorname{div}(\rho_o \vec{u}) \vec{\nabla} \delta\tilde{\Phi}_o$$



$$\vec{F}_2 = 4\pi G \operatorname{div}(\delta\rho_o \vec{u})$$

The elasto-gravitational operator applied to  $\delta\vec{u}$  and to  $\delta\Phi_1$  is the same than the one applied to  $\vec{u}$  and  $\Phi_1$  in the equations (11) relative to a spherical Earth.

The boundary conditions are unchanged, that-is-to-say the displacement, the tractions, the potential and the gravity are continuous within the planet and at the Earth's deformed surface. Nevertheless, as they will be written at the interfaces of the reference radial sphere (in order to subtract the boundary conditions associated with  $\vec{u}$  and  $\Phi_1$ ), it is necessary to take into account the topography at each interface (noted  $\delta d$  at the outer surface) and to introduce a non-radial normal  $\vec{n}'_o = \vec{n}_o - \vec{\nabla}^S \delta d$ , where  $\vec{\nabla}^S$  is the tangential gradient and  $\vec{n}_o = \vec{e}_r$ . Dahlen and Tromp (1998) shown that the boundary conditions at  $r = a$  and at each solid-solid interface of the spherical reference model are:

- $[\delta\vec{u}]_-^+ = [-\delta d \partial_{\vec{n}_o} \vec{u}]_-^+$
- $[\vec{n}_o \cdot \overline{\delta\Sigma_1^l}]_-^+ = [-\delta d \vec{n}_o \cdot \partial_{\vec{n}_o} \overline{\Sigma_1^l} + \vec{\nabla}^S \delta d \cdot \overline{\Sigma_1^l}]_-^+$
- $[\delta\Phi_1]_-^+ = [-\delta d \partial_{\vec{n}_o} \Phi_1]_-^+$
- $[\vec{n}_o \cdot \delta\vec{\xi}]_-^+ = [-\delta d \vec{n}_o \cdot \partial_{\vec{n}_o} \vec{\xi} + \vec{\nabla}^S \delta d \cdot \vec{\xi}]_-^+$

with  $\vec{\xi} = -\vec{\nabla}\Phi_1 + 4\pi G\rho_o\vec{u}$  and  $\delta\vec{\xi} = -\vec{\nabla}\delta\Phi_1 + 4\pi G(\delta\rho_o\vec{u} + \rho_o\delta\vec{u})$  (27)

### 3 Analytical solutions for an elastic incompressible homogeneous spheroidal Earth's model

#### 3.1 Equations and propagators

We intend to solve the equations (26). The unknowns are  $\delta\vec{u}$  and  $\delta\Phi_1$ . For a spheroidal homogeneous hydrostatic reference Earth, we have  $\delta\rho_o = 0$ ,  $\delta K = \delta\mu = 0$  and consequently  $\vec{F}_1$  and  $\vec{F}_2$  may be simply written:

$$\vec{F}_1 = \operatorname{div}\left[+(\vec{u}\cdot\nabla)(\delta P_o \vec{I})\right] \quad F_2 = 0 \quad (28)$$

We introduce a function  $X(r, \theta, \varphi) = \left(u_r \partial_r + \frac{1}{r} u_\theta \partial_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} u_\varphi \partial_\varphi\right) \delta P_o$ . We expand  $X$  into spherical harmonics.

$$X(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n x_n^m(r) Y_n^m(\theta, \varphi)$$

We note for the spherical functions:  $Y_n^{mc}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi$  et  $Y_n^{ms}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi$  where  $P_n^m$  are the non-normalized Legendre polynomials.

$$\begin{cases} Y_2^{2c} = 3 \sin^2(\theta) \cos 2\varphi; \\ Y_2^{2s} = 3 \sin^2(\theta) \sin 2\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} Y_4^{2c} = \frac{15}{2} \sin^2(\theta) [7 \cos^2(\theta) - 1] \cos 2\varphi \\ Y_4^{2s} = \frac{15}{2} \sin^2(\theta) [7 \cos^2(\theta) - 1] \sin 2\varphi \end{cases} \quad (29)$$

We find:

$$X(r, \theta, \varphi) = x_2(r) [\cos \sigma t Y_2^{2c} - \sin \sigma t Y_2^{2s}] + x_4(r) [\cos \sigma t Y_4^{2c} - \sin \sigma t Y_4^{2s}]$$

with

$$\begin{cases} x_2(r) = -\frac{1}{21} \frac{\alpha \rho_o V_o}{1+\bar{\mu}} \frac{r^2}{a^2} [27 \frac{r^2}{a^2} - 56] \\ x_4(r) = -\frac{4}{35} \frac{\alpha \rho_o V_o}{1+\bar{\mu}} \frac{r^4}{a^4} \end{cases} \quad (30)$$

Similarly to the spherical case, we expand the perturbations in spherical harmonics:

- for the perturbation of the displacement:

$$\vec{\delta}u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \delta y_{1n}^m(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \frac{\vec{r}}{r} + r \delta y_{3n}^m(r) \vec{\nabla} Y_n^m(\theta, \varphi) + \delta y_{7n}^m(r) \vec{\nabla} \wedge r \vec{Y}_n^m(\theta, \varphi) \quad (31)$$

- for the perturbation of the Lagrangian tractions:

$$\vec{n}_o \cdot \overline{\delta \Sigma}_1^l = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \delta y_{2n}^m(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \frac{\vec{r}}{r} + r \delta y_{4n}^m(r) \vec{\nabla} Y_n^m(\theta, \varphi) + \delta y_{8n}^m(r) \vec{\nabla} \wedge r \vec{Y}_n^m(\theta, \varphi) \quad (32)$$

- for the perturbation of the potential:

$$\delta \Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \delta y_{5n}^m(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (33)$$

The perturbed equations of the elasto-gravity may be written as a first order differential system:

$$\frac{d}{dr} \delta y_i(r) = A_{ij}(r) \delta y_j(r) + f_i(r) \quad \text{pour} \quad (i, j) = 1..8 \quad (34)$$

where  $A_{ij}(r)$  is the matrix of the spherical  $y_i$  system (16). It depends on the radial density, shear modulus and compressibility.

$f_i(r)$  is relative to the vectors  $\vec{F}_1$  and  $F_2$ . We have:  $\vec{f} = [0, \partial_r x_n^m(r), 0, x_n^m(r)/r, 0, 0, 0, 0]$ . For an incompressible homogeneous Earth, the solutions of the perturbed system (34)

may be written, where we omit, for simplicity, the degree  $n$  and order  $m$  for each  $\delta y_i$  and each constant.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \delta y_1 = \delta C_3 r^{n+1} + \delta C_4 r^{n-1} \\
 \delta y_3 = \frac{n+3}{n(n+1)} \delta C_3 r^{n+1} + \frac{\delta C_4}{n} r^{n-1} \\
 \delta y_7 = \delta C_7 r^n \\
 \delta y_5 = \delta C_5 r^n \\
 \delta y_4 = 2\mu \left[ \frac{n+2}{n+1} \delta C_3 r^n + \frac{n-1}{n} \delta C_4 r^{n-2} \right] \\
 \delta y_8 = \mu(n-1) \delta C_7 r^{(n-1)} \\
 \delta y_2 = 2\mu \left[ \frac{n^2-n-3}{n} \delta C_3 r^n + (n-1) \delta C_4 r^{n-2} \right] + \frac{\rho_o q_o}{a} \left[ \delta C_3 r^{n+2} + \delta C_4 r^n \right] - \rho_o \delta C_5 r^n - x_n^m(r)
 \end{array} \right. \quad (35)$$

where the terms in  $q_o \delta C_3$  and  $q_o \delta C_4$  have been neglected because there are about second order of our approximation.

The constants  $\delta C_3$ ,  $\delta C_4$ ,  $\delta C_5$  and  $\delta C_7$  have to be determined from the boundary conditions (27). The details of the computation of each degree  $n$  and order  $m$  constants are given in Appendix 1.

### 3.2 Solutions

Knowing the constants, we know the perturbations of the displacement, of the gravitational potential and of the stress tensor within the entire planet.

At the surface of the reference Earth's model ( $r = a$ ), we introduce perturbations of the Love numbers such as:

$$\begin{aligned}
 \delta \vec{u} &= \frac{V_o}{g_o} \left\{ \left( \delta h_2 P_2^2 + \delta h_4 P_4^2 \right) \cos(\sigma t + 2\varphi) \vec{e}_r + \vec{\nabla} \left[ \left( \delta l_2 P_2^2 + \delta l_4 P_4^2 \right) \cos(\sigma t + 2\varphi) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \vec{e}_r \wedge \vec{\nabla} \left[ \delta l_3 P_3^2 \sin(\sigma t + 2\varphi) \right] \right\} \\
 \delta \Phi_1 &= V_o \left[ \left( \delta k_2 P_2^2 + \delta k_4 P_4^2 \right) \cos(\sigma t + 2\varphi) \right]
 \end{aligned} \quad (36)$$

with

$$\left\{ \begin{array}{lll} \delta h_2 = \frac{1}{399} \alpha \frac{(653\bar{\mu}+1349)}{(1+\bar{\mu})^2} & \delta h_4 = -\frac{4}{35} \alpha \frac{(68\bar{\mu}+95)}{(1+\bar{\mu})(51\bar{\mu}+38)} & \\ \delta l_2 = \frac{1}{3990} \alpha \frac{(3365\bar{\mu}+5453)}{(1+\bar{\mu})^2} & \delta l_4 = -\frac{1}{315} \alpha \frac{(612\bar{\mu}+589)}{(1+\bar{\mu})(51\bar{\mu}+38)} & \delta l_3 = \frac{1}{15} \alpha \frac{1}{(1+\bar{\mu})} \\ \delta k_2 = \frac{2}{665} \alpha \frac{(127\bar{\mu}+475)}{(1+\bar{\mu})^2} & \delta k_4 = \frac{34}{15} \alpha \frac{\bar{\mu}}{(1+\bar{\mu})(51\bar{\mu}+38)} & \end{array} \right. \quad (37)$$

For our homogeneous incompressible Earth with a radius  $a = 6371$  km, a density  $\rho_o = 5520$  kg/m<sup>3</sup>, a rigidity  $\mu = 0.115 \times 10^{12}$  Pa and an hydrostatic flattening  $\alpha = \frac{5}{4} q_o = \frac{1}{232}$ , we find:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \delta h_2 = 0.002130 & \delta h_4 = -0.000184 & \\ \delta l_2 = 0.001004 & \delta l_4 = -0.000042 & \delta l_3 = 0.000069 \\ \delta k_2 = 0.000656 & \delta k_4 = 0.000037 & \end{array} \right. \quad (38)$$

The perturbation is of about  $10^{-3}$  for the degree 2, and about  $10^{-4}$  for the degree 4. The order of magnitude of the radial and tangential component of the perturbation  $\delta \vec{u}$  of the displacement as well as the perturbed potential  $\frac{\delta \Phi_1(a)}{g_o}$  is the millimeter and is consequently significant, because it is well known that for space geodesy, it is now necessary to achieve the mm level in the tidal displacements .

### 3.3 Comparison with the Love's solutions

Our results for  $\delta h_4$  and  $\delta k_4$  are identical to those obtained by Love (1911) and corrected by Wang (1994). On the contrary our results for the degree 2 perturbations differ from the Love solutions. This is because Love started with a reference model which did not take into account the radial part of the centrifugal potential (and the associated radial part of the pressure given in equation (9)). Consequently in his  $\delta P_o$  he had a radial term:

$$\delta P_o = -\frac{2}{3} \alpha \rho_o g_o a \frac{r^2}{a^2} P_2^0 - \rho_o g_o a \frac{m}{3} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

In our approach, this term only changes the right hand side of the the equation (26) and thus appears in the  $X(r, \theta, \varphi)$  function. If we use the Love's hypothesis, we will obtain, where the superscript  $L$  is related to the Love's solutions:

$$x_2^L(r) = -\frac{1}{35} \frac{\alpha \rho_o V_o}{1 + \bar{\mu}} \frac{r^2}{a^2} \left[73 \frac{r^2}{a^2} - 168\right] \quad (39)$$

the  $x_4$  coefficient is unchanged. The right hand side of the boundary conditions in  $\delta y_2$  (eq (81) in Appendix 1) will also be changed:

$$\begin{cases} -\rho_o a^2 (\delta C_5^c)_2^2 + \frac{\rho_o g_o a}{19} [(19 - 2\bar{\mu}) a^2 (\delta C_3^c)_2^2 + (19 + 4\bar{\mu}) (\delta C_4^c)_2^2] = \frac{1}{399} \frac{\alpha \rho_o V_o}{1 + \bar{\mu}} (128\bar{\mu} + 1311) \cos(\sigma t) \\ -\rho_o a^2 (\delta C_5^s)_2^2 + \frac{\rho_o g_o a}{19} [(19 - 2\bar{\mu}) a^2 (\delta C_3^s)_2^2 + (19 + 4\bar{\mu}) (\delta C_4^s)_2^2] = -\frac{1}{399} \frac{\alpha \rho_o V_o}{1 + \bar{\mu}} (128\bar{\mu} + 1311) \sin(\sigma t) \end{cases} \quad (40)$$

This will change the constants and finally the perturbations of the Love numbers will be:

$$\begin{cases} \delta h_2^L = \frac{1}{399} \alpha \frac{(653\bar{\mu} + 2679)}{(1 + \bar{\mu})^2} = 0.002953 \\ \delta l_2^L = \frac{1}{3990} \alpha \frac{(3365\bar{\mu} + 9443)}{(1 + \bar{\mu})^2} = 0.001251 \\ \delta k_2^L = \frac{2}{665} \alpha \frac{(127\bar{\mu} + 1140)}{(1 + \bar{\mu})^2} = 0.001151 \end{cases} \quad (41)$$

Note that the discrepancy between  $\delta k_2^L$  and  $\delta k_2$  is significant (about a factor 2). Consequently, it will be very important when we compare the Love numbers perturbations coming from different studies to be careful on the initial hypothesis concerning the reference model. This remark is also valid when we combine the different states of perturbations of our approach in order to compute some surface quantities, such as the gravity, on the deformed surface.

It is easy to relate our perturbed Love numbers to the ones computed by Love from:

$$\begin{cases} \delta k_2^L = \delta k_2 + \frac{3}{2} \frac{1}{1 + \bar{\mu}} \delta X_2 \\ \delta h_2^L = \delta h_2 + \frac{5}{2} \frac{1}{1 + \bar{\mu}} \delta X_2 \\ \delta l_2^L = \delta l_2 + \frac{3}{4} \frac{1}{1 + \bar{\mu}} \delta X_2 \end{cases} \quad (42)$$

## 4 Geodetic and gravimetric responses of the Earth to the tides on the spheroidal deformed surface

We intend to extend these results to some geodetic responses of the Earth to tidal forces such as the geoid and the topography on the deformed surface, the perturbation of the surface gravity field (with the associated gravimetric factor), the tilt and the deviation of the vertical with reference to the Earth's axis (for a review of these measurements of the Earth's tides, see Melchior, 1966).

The difficulty of defining the Love numbers or the tidal gravimetric factor for an ellipsoidal Earth has been pointed out because it is no more possible to define the Earth's response with only one parameter as it was the case for a spherical Earth. It is particularly the case for tilt for which there must be different Love numbers in different directions.

#### 4.1 Outward normals

Let  $\vec{n}_t$  be the outward normal of the surface topography and  $\vec{n}_g$  the outward normal to the geoid. In our perturbation theory, the terms in  $\delta\tilde{\Phi}_o\Phi_1$  have the same order of magnitude that terms in  $\delta\Phi_1$ . Consequently, to compute the normal of a given surface, we have to keep non linear terms. If we note  $r(\theta, \varphi) = a[1 + x(\theta, \varphi)]$  with  $x(\theta, \varphi) \ll 1$ , a given surface, the outer normal will be, in the second order of approximation:

$$\begin{aligned} \vec{n} = & \vec{e}_r \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \partial_\theta x(\theta, \varphi) \right)^2 - \frac{1}{2 \sin^2 \theta} \left( \partial_\varphi x(\theta, \varphi) \right)^2 \right] \\ & - \partial_\theta x(\theta, \varphi) [1 - x(\theta, \varphi)] \vec{e}_\theta - \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi x(\theta, \varphi) [1 - x(\theta, \varphi)] \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (43)$$

For the geoid, we have :

$$x(\theta, \varphi) = \left[ \frac{\delta\tilde{\Phi}_o + \Phi_1 + V_2 + \delta\Phi_1 + \delta d \partial_r(\Phi_1 + V_2)}{g_o a} \right]_{r=a}$$

and consequently, for the normal:

$$\begin{aligned} \vec{n}_g = & \vec{e}_r \left[ 1 - \vec{\nabla}^S \frac{\Phi_1 + V_2}{g_o} \cdot \vec{\nabla}^S \frac{\delta\tilde{\Phi}_o}{g_o} \right]_{r=a} \\ & - \frac{1}{g_o} \vec{\nabla}^S \left[ \delta\tilde{\Phi}_o + \Phi_1 + V_2 + \delta\Phi_1 + \delta d [\partial_r(\Phi_1 + V_2)] - (\Phi_1 + V_2) \frac{\delta\tilde{\Phi}_o}{g_o a} \right]_{r=a} \end{aligned} \quad (44)$$

For the surface topography, we have:

$$x(\theta, \varphi) = \left[ \frac{\delta d + u_r + \delta u_r + \delta d \partial_r u_r}{a} \right]_{r=a}$$

and consequently, for the normal:

$$\vec{n}_t = \vec{e}_r \left[ 1 - \vec{\nabla}^S u_r \cdot \vec{\nabla}^S \delta d \right]_{r=a} - \vec{\nabla}^S \left[ \delta d + u_r + \delta u_r + \delta d [\partial_r u_r] - u_r \frac{\delta d}{a} \right]_{r=a} \quad (45)$$

#### 4.2 Surface displacement and geoid on the deformed ellipsoidal outer surface

We can define Love numbers related to the vertical surface displacement and to the tangential displacement on the ellipsoid. We first introduce a basis of vectors related to

the ellipsoid:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_n &= \vec{e}_r - \vec{\nabla}^S \delta d \\
 \vec{E}_S &= \vec{e}_\theta + \partial_\theta \frac{\delta d}{a} \vec{e}_r \\
 \vec{E}_E &= \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi \frac{\delta d}{a} \vec{e}_r
 \end{aligned} \tag{46}$$

These vectors are normalized and orthogonal (in the first order in  $\frac{\delta d}{a}$ ). Note that for a axi-symmetric ellipsoid,  $\partial_\varphi \frac{\delta d}{a} = 0$  and consequently  $\vec{E}_E = \vec{e}_\varphi$  is the east direction.

At the order of our approximation, the vertical displacement may be written:

$$u_n = [\vec{e}_r - \vec{\nabla}^S \delta d] \cdot [\vec{u} + \delta \vec{u} + (\delta d \vec{e}_r \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}] = \frac{V_o}{g_o} [(h_2 + \Delta h_o) P_2^2 + \Delta h_+ P_4^2] \cos(\sigma t + 2\varphi) \tag{47}$$

with the Love numbers:

$$h_2 + \Delta h_o = h_2 + \delta h_2 - \frac{11}{21} \alpha \frac{1}{1 + \bar{\mu}} = 0.603140 \quad \Delta h_+ = \delta h_4 - \frac{1}{7} \alpha \frac{1}{1 + \bar{\mu}} = -0.000332$$

The tangential displacement on the ellipsoid is:

$$\vec{u}_H = \vec{u} + \delta \vec{u} + \delta d \partial_r \vec{u} - u_n \vec{E}_n = u_{H\theta} \vec{E}_S + u_{H\varphi} \vec{E}_E \tag{48}$$

with

$$\begin{aligned}
 u_{HS} &= u_\theta + \delta u_\theta + \delta d \partial_r u_\theta + \partial_\theta \frac{\delta d}{a} u_r \\
 u_{HE} &= u_\varphi + \delta u_\varphi + \delta d \partial_r u_\varphi + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi \frac{\delta d}{a} u_r
 \end{aligned} \tag{49}$$

We introduce tangential Love numbers such as  $\vec{u}_H$  may be written in the ellipsoidal vectors basis:

$$\vec{u}_H = \frac{V_o}{g_o} \left\{ \vec{\nabla}^S \left[ (l_2 + \Delta l_o) P_2^2 + \Delta l_+ P_4^2 \right] \cos(\sigma t + 2\varphi) + \vec{e}_r \wedge \vec{\nabla}^S \left[ \Delta l_* P_3^2 \sin(\sigma t + 2\varphi) \right] \right\} \tag{50}$$

with

$$\left\{ \begin{aligned}
 l_2 + \Delta l_o &= l_2 + \delta l_2 + \frac{2}{21} \alpha l_2 = l_2 + \frac{1}{1995} \alpha \frac{(1825\bar{\mu} + 2869)}{(1 + \bar{\mu})^2} = 0.181544 \\
 \Delta l_+ &= \delta l_4 - \frac{1}{35} \alpha l_2 = -\frac{1}{1260} \alpha \frac{(3825\bar{\mu} + 3382)}{(1 + \bar{\mu})(51\bar{\mu} + 38)} = -0.000064 \\
 \Delta l_* &= \delta l_3 - \frac{1}{15} \alpha (2h_2 - l_2) = -\frac{13}{60} \alpha \frac{1}{(1 + \bar{\mu})} = -0.000224
 \end{aligned} \right. \tag{51}$$

We plot in Figure 2-a the perturbation of vertical surface displacement (i.e.  $u_n - u_r(a)$ ) and of the tangential surface displacement (i.e.  $[u_{HS} - u_\theta] \vec{E}_S + [u_{HE} - u_\varphi] \vec{E}_E$ ), in millimeter.

Similarly, we introduce Love numbers related to the geoid on the deformed ellipsoidal outer surface:

$$\frac{1}{g_o} \left[ \Phi_1 + V_2 + \delta\Phi_1 + \delta d \partial_r(\Phi_1 + V_2) \right]_{r=a} = \frac{V_o}{g_o} \left[ (1 + k_2 + \Delta k_o) P_2^2 + \Delta k_+ P_4^2 \right] \cos(\sigma t + 2\varphi) \quad (52)$$

with

$$k_2 + \Delta k_o = k_2 + \delta k_2 + \frac{8}{21} \alpha (1 + k_2) = 0.363824; \quad \Delta k_+ = \delta k_4 - \frac{4}{35} \alpha (1 + k_2) = -0.000633$$

We plot in Figure 2-b the perturbed geoid on the outer surface  $\frac{1}{g_o} [\delta\Phi_1 + \delta d \partial_r(\Phi_1 + V_2)]_{r=a}$ , in millimeter.

### 4.3 Surface gravity perturbation

In this part, we are interested in the variations of the intensity of gravity which can be carried out with the help of gravimeters.

The attraction on the ellipsoidal deformed outer surface is:

$$\begin{aligned} \vec{A} = & \vec{\nabla} \left[ \tilde{\Phi}_o + \delta\tilde{\Phi}_o + \Phi_1 + V_2 + \delta\Phi_1 \right]_{r=a} \\ & + \left[ (\delta d \vec{e}_r + \vec{u} + \delta d \partial_r u_r \vec{e}_r + \vec{\delta} u) \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{\nabla} \left[ \tilde{\Phi}_o + \delta\tilde{\Phi}_o + \Phi_1 + V_2 + \delta\Phi_1 \right]_{r=a} \end{aligned} \quad (53)$$

In our order of approximation, we have:

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{A} = & \vec{\nabla} (\tilde{\Phi}_o + \delta\tilde{\Phi}_o) + \delta d \partial_r \vec{\nabla} (\tilde{\Phi}_o) \\ & + \vec{\nabla} (\Phi_1 + V_2) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \tilde{\Phi}_o \\ & + \vec{\nabla} \delta\Phi_1 + (\vec{\delta} u \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \tilde{\Phi}_o + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \delta\tilde{\Phi}_o \\ & + \delta d \partial_r \vec{\nabla} (\Phi_1 + V_2) + \partial_r u_r \delta d \partial_r \vec{\nabla} \tilde{\Phi}_o \end{aligned} \right. \quad (54)$$



The gravity along the vertical at the station is  $g = \vec{n}_g \cdot \vec{A}$ . We note  $g = g_o + \delta g_o + g_1 + \delta g_1$ , with

$$\left\{ \begin{array}{l} g_o + \delta g_o = \partial_r (\tilde{\Phi}_o + \delta \tilde{\Phi}_o) + \delta d \partial_r^2 \tilde{\Phi}_o \\ g_1 = \partial_r (\Phi_1 + V_2) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \partial_r \tilde{\Phi}_o \\ \delta g_1 = \partial_r \delta \Phi_1 + (\delta \vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \partial_r \tilde{\Phi}_o + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \partial_r \delta \tilde{\Phi}_o \\ \quad + \delta d \partial_r^2 (\Phi_1 + V_2) + \partial_r u_r \delta d \partial_r^2 \tilde{\Phi}_o \\ \quad - \vec{\nabla}^S (\Phi_1 + V_2) \cdot \vec{\nabla}^S \delta d \end{array} \right. \quad (55)$$

We plot in Figure 3 the perturbation of the gravity induced by the  $M_2$  tidal wave on the ellipsoidal deformed outer surface:  $g_1$  in Figure 3-a and  $\delta g_1$  in Figure 3-b. Note that there is a significant degree 4 order 2 component with an amplitude of about 200 nanogals. This perturbation should be detectable with the use of very accurate superconducting gravimeters when the oceanic effects will be correctly modeled.

Using the definition proposed by Wahr (1981) we define the gravimetric factor as the transfer function between the body tide signal measured along the vertical at the station by a gravimeter and the amplitude of the radial derivative of the tidal potential. We introduce the classical degree 2 gravimetric factor  $\delta_2$  such as:

$$g_1 = \frac{2V_o}{a} \delta_2 P_2^2 \cos(\sigma t + 2\varphi) \quad (56)$$

Because  $\tilde{\Phi}_o$  is the sum of the spherical gravitational potential and of the radial part of the centrifugal potential, we have:

$$\partial_r^2 (\tilde{\Phi}_o) = \frac{2g(r)}{r} - 4\pi G \rho_o + \frac{2}{3} \Omega^2 \quad (57)$$

and consequently, we have

$$\delta_2 = 1 + h_2 \left(1 + \frac{m}{3}\right) - \frac{3}{2} k_2 = 1 + \frac{1}{4} \frac{1}{(1 + \bar{\mu})} + \frac{\alpha}{3} \frac{3 + 2\bar{\mu}}{(1 + \bar{\mu})^2} \quad (58)$$

We define perturbations of this gravimetric factor such as:

$$\delta g_1(\theta, \varphi) = \frac{2V_o}{a} \cos(\sigma t + 2\varphi) [\delta \delta_2 P_2^2 + \delta \delta_4 P_4^2]$$

with, for our homogeneous incompressible Earth model:

$$\delta \delta_2 = \frac{\alpha}{3990} \frac{1805 + 729\bar{\mu} - 380\bar{\mu}^2}{(1 + \bar{\mu})^2}; \quad \delta \delta_4 = -\frac{\alpha}{210} \frac{2166 + 4037\bar{\mu} + 1836\bar{\mu}^2}{(1 + \bar{\mu})(51\bar{\mu} + 38)}$$

Our result for  $\delta\delta_4$  is identical to the one obtained from the equation (9) of Wang (1994) from the eulerian potential in free space. For  $\delta\delta_2$ , there are discrepancies due to the difference in the initial spherical reference model (with or without the radial pressure and centrifugal potential). But our total gravimetric factor ( $\delta_2 + \delta\delta_2$ ) is equal to the one obtained using the equation (8) of Wang (1994) paper:

$$\delta_2 + \delta\delta_2 = 1 + \frac{1}{4} \frac{1}{(1 + \bar{\mu})} + \frac{\alpha}{3990} \frac{5795 + 3389\bar{\mu} - 380\bar{\mu}^2}{(1 + \bar{\mu})^2}$$

With the numerical values given in section 3.2, we obtain:

$$\delta_2 + \delta\delta_2 = 1.060175; \quad \delta\delta_4 = -0.000824$$

Note that these coefficients are related to non-normalized Legendre polynomials.

If the planet is rigid, our gravimetric factors will become:

$$\delta_2 = 1.; \quad \delta\delta_2 = -\frac{2}{21}\alpha = -0.0004105; \quad \delta\delta_4 = -\frac{6}{35}\alpha = -0.0007389$$

Note that the gravimetric factor is sometimes defined as the transfer function between the body tide signal measured along the vertical at the station by a gravimeter and the amplitude of the gradient of the external tidal potential along the perpendicular to the reference ellipsoid (e.g. Dehant et al., 1999).

We can also compute the components of the attraction in the basis of vectors related to the ellipsoid (defined in 46). We obtain, for the normal component:  $\vec{A} \cdot \vec{E}_n = g$  where  $g$  is the gravity defined in equation (55). For the horizontal component (i.e. the deviation of the vertical), noting  $A_S = \vec{A} \cdot \vec{E}_S$  and  $A_E = \vec{A} \cdot \vec{E}_E$ , we have:

$$A_S \vec{E}_S + A_E \vec{E}_E = \vec{\nabla}_H [\Phi_1 + V_2 + \delta\Phi_1 + \delta d\partial_r(\Phi_1 + V_2)] \quad (59)$$

that is to say, the horizontal attraction is equal to the horizontal gradient of the perturbed geoid.

## 4.4 Perturbation of some geodetic deformations

### 4.4.1 Tilt

Noting  $\vec{\Delta}$  the incremental spherical angle between the instantaneous outward geometrical normal  $\vec{n}_t$  and the instantaneous outward gravity normal  $\vec{n}_g$  in the ellipsoidal basis defined

in (46), Wahr (1981) defines the tilt in the east direction (or  $\varphi$ ) by :  $\Delta_E = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{\Delta}$  and that in the other horizontal direction (approximately south) by  $\Delta_S = \vec{E}_S \cdot \vec{\Delta}$ . Note that for an elliptical Earth, the horizontal vector  $\vec{E}_S$  is not quite equal to  $\vec{e}_\theta$  (see equation (46)). For the spheroidal incompressible homogeneous Earth model, we obtain:

$$\begin{cases} \Delta_S = \frac{V_o}{g_o a} [(\gamma_2 + \delta\gamma_2)\partial_\theta P_2^2 + \delta\gamma_4\partial_\theta P_4^2] \cos(\sigma t + 2\varphi) \\ \Delta_E = \frac{V_o}{g_o a} [(\gamma_2 + \delta\gamma_2)P_2^2 + \delta\gamma_4 P_4^2] \frac{1}{\sin\theta} \partial_\varphi \cos(\sigma t + 2\varphi) \end{cases} \quad (60)$$

with

$$\begin{cases} \gamma_2 = 1 + k_2 - h_2 \\ \delta\gamma_2 = \delta k_2 - \delta h_2 + \frac{4}{21}\alpha[1 + k_2 + 3h_2 - 6l_2] \\ \delta\gamma_4 = \delta k_4 - \delta h_4 - \frac{2}{35}\alpha[1 + k_2 + 3h_2 - 6l_2] \end{cases} \quad (61)$$

For our incompressible homogeneous Earth model, we have:

$$\gamma_2 = 1 - \frac{1}{1 + \bar{\mu}}(1 + \delta X_2); \quad \delta\gamma_2 = -\frac{\alpha}{1995} \frac{1805 + 33\bar{\mu} - 380\bar{\mu}^2}{(1 + \bar{\mu})^2}; \quad \delta\gamma_4 = -\frac{\alpha}{105} \frac{114 + 857\bar{\mu} + 306\bar{\mu}^2}{(1 + \bar{\mu})(51\bar{\mu} + 38)}$$

With the numerical values given in section 3.2, we obtain:

$$\gamma_2 + \delta\gamma_2 = 0.759614; \quad \delta\gamma_4 = -0.0002913$$

For the semi-diurnal tidal wave  $M_2$ , the order of magnitude of the perturbations will be:  $(\gamma_2 + \delta\gamma_2)\frac{V_o}{g_o a} = 2.18$  mas, and  $\delta\gamma_4\frac{V_o}{g_o a} = -0.8\mu\text{as}$ .

If the planet is rigid, these tilt coefficients will become:

$$\gamma_2 = 1.; \quad \delta\gamma_2 = \frac{4}{21}\alpha = 0.0008210; \quad \delta\gamma_4 = -\frac{2}{35}\alpha = -0.0002463$$

#### 4.4.2 Changes of the vertical with reference to the Earth's axis or to a fixed direction

For astronomical instruments, the deflection of the vertical at a point cause changes in the astronomic coordinates. For instruments related to the outward normal to the geoid (for example with a bath of mercury), the latitude is determined by comparing the direction of the vertical to the direction of the axis of rotation of the Earth. We can express from equations (44) and (48) the respective components of the deflection of the vertical  $\vec{n}_g$  and of the tangential displacement  $\vec{u}_H$  in the ellipsoidal basis (46). The perturbation of the

angle related to the deflection of the vertical with respect to the Earth's rotational axis will be:

$$\left(\vec{n}_g, \vec{e}_z\right) - \left(\vec{E}_n, \vec{e}_z\right) = \vec{n}_g - \vec{E}_n + \vec{u}_H \quad (62)$$

The perturbation of this direction may be written using the previous Love numbers. We have:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\vec{n}_g, \vec{E}_n\right) = -\frac{V_o}{g_{oa}} \left\{ \left[ (\Lambda_2 + \delta\Lambda_2) \partial_\theta P_2^2 + \delta\Lambda_4 \partial_\theta P_4^2 \right] \cos(\sigma t + 2\varphi) - \delta\Lambda_3 \frac{1}{\sin\theta} P_3^2 \partial_\varphi \sin(\sigma t + 2\varphi) \right\} \vec{E}_S \\ -\frac{V_o}{g_{oa}} \left\{ \left[ (\Lambda_2 + \delta\Lambda_2) P_2^2 + \delta\Lambda_4 P_4^2 \right] \frac{1}{\sin\theta} \partial_\varphi \cos(\sigma t + 2\varphi) + \delta\Lambda_3 \partial_\theta P_3^2 \sin(\sigma t + 2\varphi) \right\} \vec{E}_E \end{array} \right. \quad (63)$$

with:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_2 = 1 + k_2 - l_2 \\ \delta\Lambda_2 = \delta k_2 - \delta l_2 + \frac{2}{21} \alpha [2 + 2k_2 - l_2] \\ \delta\Lambda_4 = \delta k_4 - \delta l_4 - \frac{1}{35} \alpha [2 + 2k_2 - l_2] \\ \delta\Lambda_3 = -\Delta l_* \end{array} \right. \quad (64)$$

For our incompressible homogeneous Earth's model:

$$\Lambda_2 = 1 + \frac{3}{4} \frac{1}{1 + \bar{\mu}} (1 + \delta X_2); \quad \delta\Lambda_2 = \frac{\alpha}{1995} \frac{931 + 267\bar{\mu} + 380\bar{\mu}^2}{(1 + \bar{\mu})^2}; \quad \delta\Lambda_4 = -\frac{\alpha}{1260} \frac{3458 + 5235\bar{\mu} + 3672\bar{\mu}^2}{(1 + \bar{\mu})(51\bar{\mu} + 38)}$$

With the numerical values given in section 3.3, we obtain:

$$\Lambda_2 + \delta\Lambda_2 = 1.181161; \quad \delta\Lambda_4 = -0.0002340$$

For the semi-diurnal tidal wave  $M_2$ , the order of magnitude of the perturbations will be:

$$(\Lambda_2 + \delta\Lambda_2) \frac{V_o}{g_{oa}} = 3.39 \text{ mas}; \quad \delta\Lambda_3 \frac{V_o}{g_{oa}} = 0.6 \mu\text{as}, \text{ and } \delta\Lambda_4 \frac{V_o}{g_{oa}} = -0.7 \mu\text{as}.$$

For instruments related to the topographic outward normal (45) with respect to a fixed direction (for example V.L.B.I.) noted  $\vec{d}$ , we compute the changes in the angle  $(\vec{n}_t, \vec{d})$ :

$$\left(\vec{n}_t, \vec{d}\right) - \left(\vec{E}_n, \vec{d}\right) = \vec{n}_t - \vec{E}_n + \vec{u}_H \quad (65)$$

We may similarly define  $\beta$  coefficients such as:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\vec{n}_t, \vec{E}_n\right) = -\frac{V_o}{g_{oa}} \left\{ \left[ (\beta_2 + \delta\beta_2) \partial_\theta P_2^2 + \delta\beta_4 \partial_\theta P_4^2 \right] \cos(\sigma t + 2\varphi) - \delta\beta_3 \frac{1}{\sin\theta} P_3^2 \partial_\varphi \sin(\sigma t + 2\varphi) \right\} \vec{E}_S \\ -\frac{V_o}{g_{oa}} \left\{ \left[ (\beta_2 + \delta\beta_2) P_2^2 + \delta\beta_4 P_4^2 \right] \frac{1}{\sin\theta} \partial_\varphi \cos(\sigma t + 2\varphi) + \delta\beta_3 \partial_\theta P_3^2 \sin(\sigma t + 2\varphi) \right\} \vec{E}_E \end{array} \right. \quad (66)$$

with:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_2 = h_2 - l_2 \\ \delta\beta_2 = \delta h_2 - \delta l_2 - \frac{4}{7}\alpha h_2 + \frac{22}{21}\alpha l_2 \\ \delta\beta_4 = \delta k_4 - \delta l_4 + \frac{1}{35}\alpha[6h_2 - 11l_2] \\ \delta\beta_3 = -\Delta l_* \end{array} \right. \quad (67)$$

For our incompressible homogeneous Earth's model:

$$\beta_2 = \frac{7}{4} \frac{1}{1 + \bar{\mu}} (1 + \delta X_2); \quad \delta\beta_2 = \frac{4\alpha}{665} \frac{228 + 25\bar{\mu}}{(1 + \bar{\mu})^2}; \quad \delta\beta_4 = \frac{\alpha}{1260} \frac{11590 + 17697\bar{\mu}}{(1 + \bar{\mu})(51\bar{\mu} + 38)}$$

With the numerical values given in section 3.3, we obtain:

$$\beta_2 + \delta\beta_2 = 0.421547; \quad \delta\beta_4 = 0.0002786$$

For the semi-diurnal tidal wave  $M_2$ , the order of magnitude of the perturbations will be:  $(\beta_2 + \delta\beta_2) \frac{V_o}{g_o a} = 1.21 \text{ mas}$ ;  $\delta\beta_3 \frac{V_o}{g_o a} = 0.6 \mu\text{as}$ , and  $\delta\beta_4 \frac{V_o}{g_o a} = 0.8 \mu\text{as}$ .

## 5 Conclusion

We have presented the analytical elasto-gravitational solutions for an incompressible homogeneous spheroidal hydrostatic pre-stress planet submitted to the semi-diurnal tidal potential.

We have pointed out the problem related to the spherical reference model which takes or not into account the radial fluid deformation induced by the radial part of the centrifugal potential. As PREM is a mean spherical model built from seismological observations, we think that these effects are already taken into account in the geometrical and physical parameters of the initial reference sphere. Therefore, we believe that our results for  $\delta h_2$ ,  $\delta l_2$  and  $\delta k_2$  are more realistic.

We have extended these results to the analytical study of the geodetic and gravimetric response of the Earth to the tides on the spheroidal deformed surface. The order of magnitude of the perturbations of the displacement is the millimeter and is consequently significant, because it is well known that for space geodesy, it is now necessary to achieve the mm level in the tidal displacements. The order of magnitude of the perturbation of

the direction of the vertical is the micro arc-sec that is to say too small to be detected using VLBI. As a matter of fact, VLBI determinations of earth-rotation variations, and of the coordinates of terrestrial sites and celestial objects are made currently with estimated accuracies of about  $\pm 0.2$  milliarcsecond or better.

That simple analytical solutions are not realistic but they are useful to understand the physics of the problem, and especially the influence of each geometric and physical parameter. They have also been used to check the numerical procedure of a new method (a spectral element method) developed in order to take into account lateral variations of density and rheological parameters, deviatoric pre-stresses and interfaces topography (Métivier, Greff and Diament, 2004). We have developed such a model, because with the new generation of gravity measurements, one of the challenge of the future ten years will be to provide more realistic Earth time gravity variation models. Realistic solid tide models notably are needed for global consideration with gravity satellites like GRACE, GOCE, and in the future GRACE/GOCE Follow on. More realistic gravity variation models are also needed for local and surface measurements, particularly with the emergence of gravimetric observatories network like the GGP network (Global Geodynamic Project) which uses very accurate superconducting gravimeters.

## Acknowledgments

This study was supported by a CNRS-INSU (Dyeti) grant and is IPGP contribution number xxxx.

## 6 Appendix I : Boundary conditions for the perturbed system and solutions

The constants  $\delta C_3$ ,  $\delta C_4$ ,  $\delta C_5$  and  $\delta C_7$  introduced in the perturbed  $\delta y_i$  propagator (see 35) may be determined from the boundary conditions (27).

We use the spherical harmonics  $Y_n^{mc}$  and  $Y_n^{ms}$ . Consequently, we have, for each degree  $n$  and order  $m$ , to determine the 8 constants  $(\delta C_3)_n^{mc}$ ,  $(\delta C_3)_n^{ms}$ ,  $(\delta C_4)_n^{mc}$ ,  $(\delta C_4)_n^{ms}$ ,  $(\delta C_5)_n^{mc}$ ,  $(\delta C_5)_n^{ms}$ ,  $(\delta C_7)_n^{mc}$  and  $(\delta C_7)_n^{ms}$  from the boundary conditions.

### 6.1 Radial attraction

At the Earth's surface, we have, for the radial attraction:

$$[\delta \xi_r]_{a^-}^{a^+} = [-\delta d \partial_r \xi_r + \vec{\nabla}^S \delta d \cdot \vec{\xi}]_{a^-}^{a^+} \quad (68)$$

From the  $y_i$  system (16) and the associated boundary conditions for a spherical Earth, it is easy to show that:

$$[-\delta d \partial_r \xi_r + \vec{\nabla}^S \delta d \cdot \vec{\xi}]_{a^-}^{a^+} = -2\alpha g_o \frac{y_3(a)}{a} [n(n+1)Y_n^m P_2^0 + P_2^1 \partial_\theta Y_n^m] \quad (69)$$

For a degree 2-order 2 potential, we have the following relations:

$$P_2^0 P_2^2 = -\frac{2}{7}P_2^2 + \frac{3}{35}P_4^2 \quad \text{and} \quad P_2^1 P_2^1 = \frac{3}{7}P_2^2 + \frac{6}{35}P_4^2 \quad (70)$$

with the Legendre polynomials:  $P_2^2 = 3 \sin^2 \theta$  and  $P_4^2 = \frac{15}{2} \sin^2 \theta (7 \cos^2 \theta - 1)$ .

Consequently, the equation (69) for the semi-diurnal tidal  $M_2$  luni-solar potential becomes:

$$[-\delta d \partial_r \xi_r + \vec{\nabla}^S \delta d \cdot \vec{\xi}]_{a^-}^{a^+} = -2\alpha l_2 \frac{V_o \cos(\sigma t + 2\varphi)}{a} \frac{6}{7} [-P_2^2 + P_4^2] \quad (71)$$

The left hand side of the Boundary Condition (68) may be written:

$$\left[-\frac{\partial \delta \Phi_1}{\partial r}\right]_{a^+} - \delta \xi_r(a) \quad (72)$$

$$\text{with } \delta \xi_r = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ -n (\delta C_5)_n^m r^{n-1} + \frac{3g_o}{a} [(\delta C_3)_n^m r^{n+1} + (\delta C_4)_n^m r^{n-1}] \right\} Y_n^m$$

$$\text{and } \left[-\frac{\partial \delta \Phi_1}{\partial r}\right]_{a^+} = \sum_{n,m} \frac{(n+1)}{a} (\delta \Phi_1)_n^m (a^+) Y_n^m(\theta, \varphi)$$

From the continuity of the potential, we have:

$$\left[ \delta \Phi_1 \right]_{a^-}^{a^+} = -\delta d \left[ \partial_r \Phi_1 \right]_{a^-}^{a^+} = +4\pi G \rho_o u_r \delta d \quad (73)$$

Consequently, we have:

$$\left( \delta \Phi_1 \right)_n^m(a^+) = \left( \delta \Phi_1 \right)_n^m(a) + 2\alpha h_2 V_o \cos(\sigma t + 2\varphi) \left[ \frac{2}{7} P_2^2 \delta_n^2 \delta_m^2 - \frac{3}{35} P_4^2 \delta_n^4 \delta_m^2 \right] \quad (74)$$

The spherical harmonics  $Y_n^{mc}$  and  $Y_n^{ms}$  define a basis and consequently, we can equal each coefficients of degree n and order m of the right and left hand side of the boundary condition (68); it leads to four equations:

$$\begin{cases} 5 \left( \delta C_5^c \right)_2^2 a - 3g_o \left[ \left( \delta C_3^c \right)_2^2 a^2 + \left( \delta C_4^c \right)_2^2 \right] = -3 \frac{\alpha V_o}{a(1+\bar{\mu})} \cos(\sigma t) \\ 5 \left( \delta C_5^s \right)_2^2 a - 3g_o \left[ \left( \delta C_3^s \right)_2^2 a^2 + \left( \delta C_4^s \right)_2^2 \right] = 3 \frac{\alpha V_o}{a(1+\bar{\mu})} \sin(\sigma t) \\ 9 \left( \delta C_5^c \right)_4^2 a^3 - 3g_o a^2 \left[ \left( \delta C_3^c \right)_4^2 a^2 + \left( \delta C_4^c \right)_4^2 \right] = \frac{6}{7} \frac{\alpha V_o}{a(1+\bar{\mu})} \cos(\sigma t) \\ 9 \left( \delta C_5^s \right)_4^2 a^3 - 3g_o a^2 \left[ \left( \delta C_3^s \right)_4^2 a^2 + \left( \delta C_4^s \right)_4^2 \right] = -\frac{6}{7} \frac{\alpha V_o}{a(1+\bar{\mu})} \sin(\sigma t) \end{cases} \quad (75)$$

## 6.2 Tractions

The boundary condition for the surface tractions may be written from the perturbed Cauchy stress tensor :

$$\left[ \vec{e}_r \cdot \overline{\overline{\delta \Sigma_1^l}} \right]_{r=a} = \left[ -\delta d \vec{e}_r \cdot \partial_r \overline{\overline{\Sigma_1^l}} + \vec{\nabla}^S \delta d \cdot \overline{\overline{\Sigma_1^l}} \right]_{a^-}^{a^+} \quad (76)$$

The left hand side of this equation may be written from (32)

$$\left[ \vec{e}_r \cdot \overline{\overline{\delta \Sigma_1^l}} \right]_{r=a} = \vec{\delta} T^e(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \delta y_{2n}^m(a) Y_n^m(\theta, \varphi) \vec{e}_r + a \delta y_{4n}^m(a) \vec{\nabla} Y_n^m(\theta, \varphi) + a \delta y_{8n}^m(a) \vec{\nabla} \wedge \vec{e}_r Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (77)$$

The right hand side of (32) may be expanded into spheroidal and toroidal vector:

$$\begin{pmatrix} -\delta d \left[ \partial_r (\Sigma_{rr}^l) \right]_{r=a} + \frac{1}{a} \partial_\theta (\delta d) \Sigma_{r\theta}^l(a) \\ -\delta d \left[ \partial_r (\Sigma_{r\theta}^l) \right]_{r=a} + \frac{1}{a} \partial_\theta (\delta d) \Sigma_{\theta\theta}^l(a) \\ -\delta d \left[ \partial_r (\Sigma_{r\varphi}^l) \right]_{r=a} + \frac{1}{a} \partial_\theta (\delta d) \Sigma_{\theta\varphi}^l(a) \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \frac{\alpha \rho_o V_o}{1+\bar{\mu}} \left\{ -\frac{2}{3} (32\bar{\mu}+57) \left( \frac{-2}{7} P_2^2 + \frac{3}{35} P_4^2 \right) \cos(\sigma t + 2\varphi) \vec{e}_r \right. \quad (78)$$



$$+2\bar{\mu} \vec{\nabla}^S \left[ \left( \frac{37}{21} P_2^2 - \frac{8}{35} P_4^2 \right) \cos(\sigma t + 2\varphi) \right] + \frac{4}{15} \bar{\mu} \vec{e}_r \wedge \vec{\nabla}^S \left[ P_3^2 \sin(\sigma t + 2\varphi) \right] \Big\}$$

The boundary conditions in tractions may be consequently written:

- for  $\delta y_4(a)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{4}{3} (\delta C_3^c)_2^2 a^2 + \frac{1}{2} (\delta C_4^c)_2^2 \right] = \frac{37}{42} \frac{\alpha V_o}{g_o a (1 + \bar{\mu})} \cos \sigma t \\ \left[ \frac{4}{3} (\delta C_3^s)_2^2 a^2 + \frac{1}{2} (\delta C_4^s)_2^2 \right] = -\frac{37}{42} \frac{\alpha V_o}{g_o a (1 + \bar{\mu})} \sin \sigma t \\ a^2 \left[ \frac{6}{5} (\delta C_3^c)_4^2 a^2 + \frac{3}{4} (\delta C_4^c)_4^2 \right] = -\frac{4}{35} \frac{\alpha V_o}{g_o a (1 + \bar{\mu})} \cos \sigma t \\ a^2 \left[ \frac{6}{5} (\delta C_3^s)_4^2 a^2 + \frac{3}{4} (\delta C_4^s)_4^2 \right] = +\frac{4}{35} \frac{\alpha V_o}{g_o a (1 + \bar{\mu})} \sin \sigma t \end{array} \right. \quad (79)$$

- for  $\delta y_8(a)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 (\delta C_7^c)_3^2 = -\frac{1}{15} \frac{\alpha V_o}{g_o a (1 + \bar{\mu})} \sin \sigma t \\ a^2 (\delta C_7^s)_3^2 = -\frac{1}{15} \frac{\alpha V_o}{g_o a (1 + \bar{\mu})} \cos \sigma t \end{array} \right. \quad (80)$$

- for  $\delta y_2(a)$ , taking into account the  $x_2^2$  and  $x_4^2$  coefficients defined in (30):

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho_o a^2 (\delta C_5^c)_2^2 + \frac{\rho_o g_o a}{19} \left[ (19 - 2\bar{\mu}) a^2 (\delta C_3^c)_2^2 + (19 + 4\bar{\mu}) (\delta C_4^c)_2^2 \right] = \frac{1}{399} \frac{\alpha \rho_o V_o}{1 + \bar{\mu}} (128\bar{\mu} + 779) \cos(\sigma t) \\ -\rho_o a^2 (\delta C_5^s)_2^2 + \frac{\rho_o g_o a}{19} \left[ (19 - 2\bar{\mu}) a^2 (\delta C_3^s)_2^2 + (19 + 4\bar{\mu}) (\delta C_4^s)_2^2 \right] = -\frac{1}{399} \frac{\alpha \rho_o V_o}{1 + \bar{\mu}} (128\bar{\mu} + 779) \sin(\sigma t) \\ -\rho_o a^4 (\delta C_5^c)_4^2 + \frac{\rho_o g_o a^3}{19} \left[ (19 + 9\bar{\mu}) a^2 (\delta C_3^c)_4^2 + (19 + 12\bar{\mu}) (\delta C_4^c)_4^2 \right] = -\frac{2}{665} \frac{\alpha \rho_o V_o}{1 + \bar{\mu}} (32\bar{\mu} + 95) \cos(\sigma t) \\ -\rho_o a^4 (\delta C_5^s)_4^2 + \frac{\rho_o g_o a^3}{19} \left[ (19 + 9\bar{\mu}) a^2 (\delta C_3^s)_4^2 + (19 + 12\bar{\mu}) (\delta C_4^s)_4^2 \right] = \frac{2}{665} \frac{\alpha \rho_o V_o}{1 + \bar{\mu}} (32\bar{\mu} + 95) \sin(\sigma t) \end{array} \right. \quad (81)$$

### 6.3 Solutions

We solve the 14 equations in order to find the 14 unknowns:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \left( \delta C_3^c \right)_2^2 = \frac{2}{665} \frac{\alpha V_o}{a^3 g_o} \frac{(25\bar{\mu}-323) \cos(\sigma t)}{(1+\bar{\mu})^2} & \left( \delta C_3^s \right)_2^2 = -\frac{2}{665} \frac{\alpha V_o}{a^3 g_o} \frac{(25\bar{\mu}-323) \sin(\sigma t)}{(1+\bar{\mu})^2} \\
 \left( \delta C_4^c \right)_2^2 = \frac{1}{1995} \frac{\alpha V_o}{a g_o} \frac{(3115\bar{\mu}+8683) \cos(\sigma t)}{(1+\bar{\mu})^2} & \left( \delta C_4^s \right)_2^2 = -\frac{1}{1995} \frac{\alpha V_o}{a g_o} \frac{(3115\bar{\mu}+8683) \sin(\sigma t)}{(1+\bar{\mu})^2} \\
 \left( \delta C_5^c \right)_2^2 = \frac{2}{665} \frac{\alpha V_o}{a^2} \frac{(127\bar{\mu}+475) \cos(\sigma t)}{(1+\bar{\mu})^2} & \left( \delta C_5^s \right)_2^2 = -\frac{2}{665} \frac{\alpha V_o}{a^2} \frac{(127\bar{\mu}+475) \sin(\sigma t)}{(1+\bar{\mu})^2} \\
 \left( \delta C_3^c \right)_4^2 = \frac{76}{9} \frac{\alpha V_o}{a^5 g_o} \frac{\cos(\sigma t)}{(1+\bar{\mu})(51\bar{\mu}+38)} & \left( \delta C_3^s \right)_4^2 = -\frac{76}{9} \frac{\alpha V_o}{a^5 g_o} \frac{\sin(\sigma t)}{(1+\bar{\mu})(51\bar{\mu}+38)} \\
 \left( \delta C_4^c \right)_4^2 = -\frac{16}{315} \frac{\alpha V_o}{a^3 g_o} \frac{(153\bar{\mu}+380) \cos(\sigma t)}{(1+\bar{\mu})(51\bar{\mu}+38)} & \left( \delta C_4^s \right)_4^2 = \frac{16}{315} \frac{\alpha V_o}{a^3 g_o} \frac{(153\bar{\mu}+380) \sin(\sigma t)}{(1+\bar{\mu})(51\bar{\mu}+38)} \\
 \left( \delta C_5^c \right)_4^2 = \frac{34}{15} \frac{\alpha V_o}{a^4} \frac{\bar{\mu} \cos(\sigma t)}{(1+\bar{\mu})(51\bar{\mu}+38)} & \left( \delta C_5^s \right)_4^2 = -\frac{34}{15} \frac{\alpha V_o}{a^4} \frac{\bar{\mu} \sin(\sigma t)}{(1+\bar{\mu})(51\bar{\mu}+38)} \\
 \left( \delta C_7^c \right)_3^2 = -\frac{1}{15} \frac{\alpha V_o}{g_o a^3} \frac{\sin(\sigma t)}{(1+\bar{\mu})} & \left( \delta C_7^s \right)_3^2 = -\frac{1}{15} \frac{\alpha V_o}{g_o a^3} \frac{\cos(\sigma t)}{(1+\bar{\mu})}
 \end{array} \right. \quad (82)$$

Knowing the constants, we know the perturbations of the displacement, of the gravitational potential and of the stress tensor within the entire planet.

## References

- Alterman, Z., Jarosch, H. & Pekeris, C.H., 1959. Oscillation of the Earth. Proc. R. Soc. London, **A252**, 80-95.
- Buffett, B.A., Mathews, P.M., Herring, T.A. and Shapiro, I.I., 1993. Forced nutations of the Earth: contributions from the effects of ellipticity and rotation on the elastic deformations. *J. Geophys. Res.*, **98**, No B12, 21659-21676.
- Dahlen, F.A., 1968. The normal modes of a rotating, elliptical earth. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, **16**, 329-367.
- Dahlen, F.A., 1976. Reply, *J. Geophys. Res.*, **81**, No 26, 4951-4956.
- Dahlen, F.A. and Tromp, J., 1998. Theoretical Global Seismology. Princeton University Press.
- Dehant, V., 1987. Integration of the gravitational motion equations for an elliptical uniformly rotating earth with an inelastic mantle. *Phys. Earth planet. Inter.*, **49**, 242-258.
- Dehant, V., 1991. Review of the Earth tidal models and contribution of Earth tides in Geodynamics. *J. Geophys. Res.*, **96**, No B12, 20235-20240.
- Dehant, V., 1995. Report of the Working Group on theoretical tidal model. Proc. 12th Int. Symp. on Earth tides, Science Press, Beijing China, 17-18.
- Dehant, V., Defraigne, P., and Wahr, J., 1999. Tides for a convective Earth. *J. Geophys. Res.*, **104**, B1, 1035-1058.
- Dziewonski, A.M., and Anderson, D.L., 1981. Preliminary Reference Earth Model PREM, *Phys. Earth Planet. Int.*, **25**, 297-356.
- Heiskanen, W. and Moritz, H., 1967. Physical Geodesy. W.H. Freeman and Company, San Francisco - London.
- Love, A.E.H., 1911. Some problems of Geodynamics. Dover, New York.
- Mathews, P.M., Buffett, B.A., and Shapiro, I.I., 1995. Love numbers for a rotating spheroidal Earth: New definitions and numerical values. *Geophys. Res. Lett.*, **22**, No 5, 579-582.
- Melchior, P., 1966. The Earth tides. Pergamon Press. Oxford-London-Edinburgh-New York-Paris-Frankfurt.
- Métivier, L., Greff-Lefftz, M. and Diament, M., 2005. A new approach to compute accurate gravity variations for a realistic Earth model with lateral variations. Submitted to *Geophys. J. Int.*, Sept. 2004.
- Smith, M., 1974. The scalar equations of infinitesimal elastic-gravitational motion for a rotating, slightly elliptical Earth, *Geophys. J. Int. astr. Soc.*, **37**, 491-526.

Wahr, J.M., 1981. Body tides on an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **64** 677-701.

Wahr, J.M. and Bergen, Z., 1986. The effects of mantle anelasticity on nutations, Earth tides, and tidal variations in rotation rate, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **64**, 633–668, 1981.

Wang, R., 1994. Effect of rotation and ellipticity on Earth tides. *Geophys. J. Int.*, **117**, 562-565.

## Figure Captions

### Figure 1

Spherical homogeneous incompressible Earth model with a radius  $a = 6371$  km, a density  $\rho_o = 5520$  kg/m<sup>3</sup> and a rigidity  $\mu = 0.115 \times 10^{12}$  Pa:

a/ surface displacement in millimeter: the contour interval for the radial displacement is 50 mm, and the scale of the tangential displacement vector is one centimeter for 200 mm.

b/ surface geoid in mm: the contour interval is 100 mm

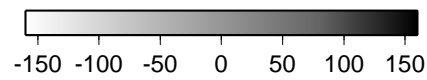
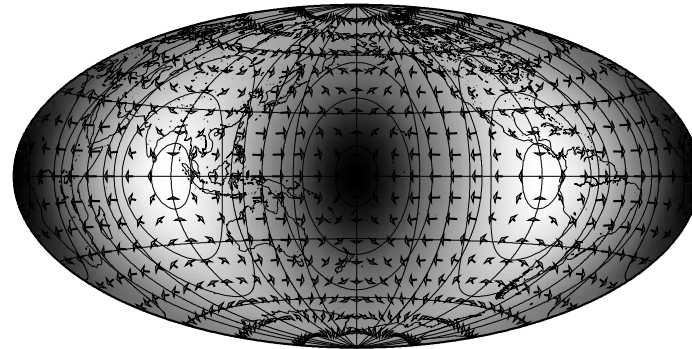
### Figure 2

a/ Perturbation of the displacement on the deformed outer ellipsoidal surface: the contour interval for the vertical displacement  $u_n - u_r(a)$  is 0.1 mm, and the scale for the tangential vector is one centimeter for one millimeter.

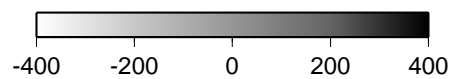
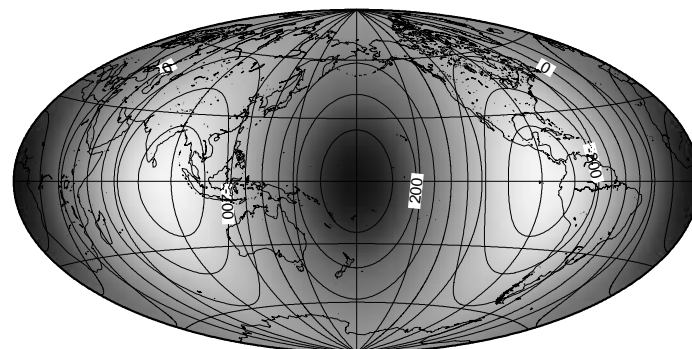
b/ Perturbation of the geoid on the deformed outer ellipsoidal surface: the contour interval is 0.2 mm

### Figure 3

Perturbation of the gravity on the deformed outer ellipsoidal surface:  $g_1$  on the top and  $\delta g_1$  on the bottom.

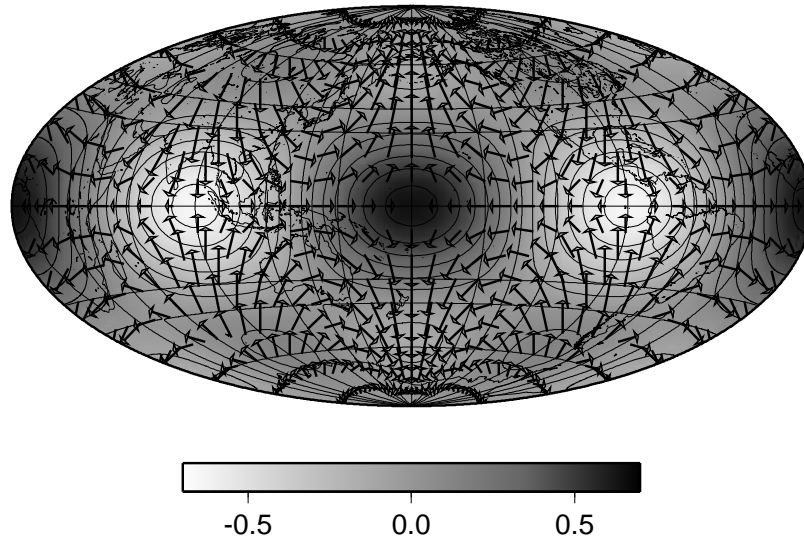


**Surface displacement (mm)**

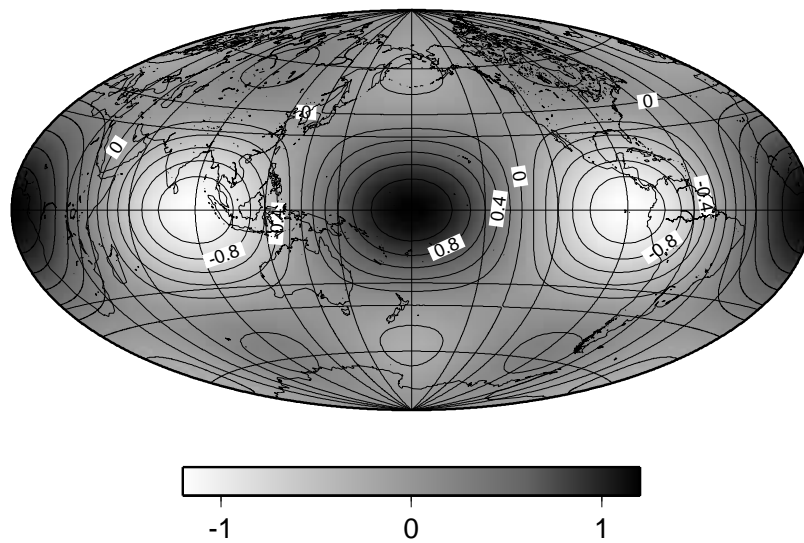


**Surface geoid (mm)**

Figure 1: Spherical homogeneous incompressible Earth model with a radius  $a = 6371$  km, a density  $\rho_o = 5520$  kg/m<sup>3</sup> and a rigidity  $\mu = 0.115 \times 10^{12}$  Pa: a/ surface displacement in millimeter: the contour interval for the radial displacement is 50 mm, and the scale of the tangential displacement vector is one centimeter for 200 mm. b/ surface geoid in mm: the contour interval is 100 mm

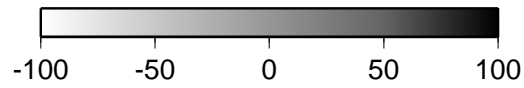
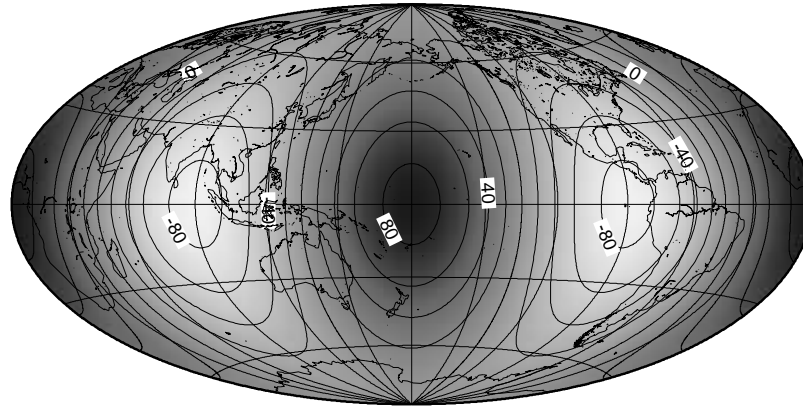


**Perturbation of the displacement (mm)  
on the deformed ellipsoidal outer surface**

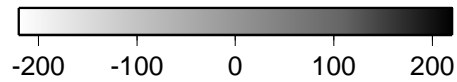
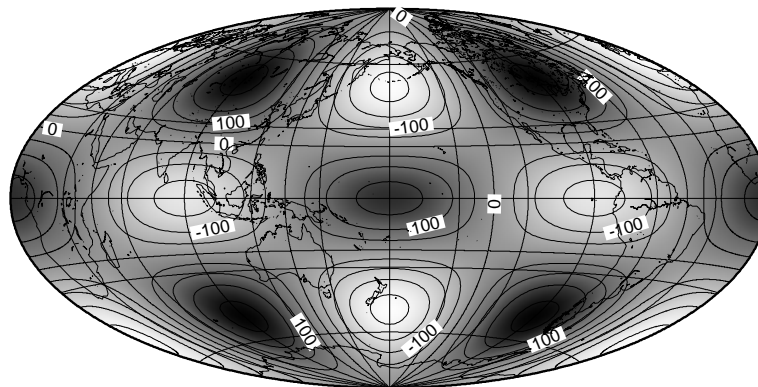


**Perturbation of the surface geoid (mm)**

Figure 2: a/ Perturbation of the displacement on the deformed outer ellipsoidal surface: the contour interval for the vertical displacement  $u_n - u_r(a)$  is 0.1 mm, and the scale for the tangential vector is one centimeter for one millimeter. b/ Perturbation of the geoid on the deformed outer ellipsoidal surface: the contour interval is 0.2 mm



### Surface gravity (microgal)



### Perturbation of the surface gravity (nanogal)

Figure 3: Perturbation of the gravity on the deformed outer ellipsoidal surface:  $g_1$  on the top and  $\delta g_1$  on the bottom



## A new approach to compute accurate gravity time variations for a realistic Earth model with lateral heterogeneities

L. Métivier<sup>1</sup>, M. Greff-Lefftz<sup>2</sup> and M. Diament<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Département de Géophysique Spatiale et Planétaire, Institut de Physique du Globe de Paris, France

<sup>2</sup> Département de Géomagnétisme et Paléomagnétisme, Institut de Physique du Globe de Paris, France

Received xxxx; in original form xxxx

### SUMMARY

We have developed a new Earth elasto-gravitational model able to take into account lateral variations, deviatoric pre-stresses and topographies. As a first application, we assume an ellipsoidal Earth with hydrostatic pre-stresses and we validate and discuss our numerical model by comparison with previous studies on the  $M_2$  body tide. We then study the response of the ellipsoidal Earth to zonal atmospheric loads, and find that global lateral variations within the Earth, like ellipticity, have a weak impact on the elasto-gravitational deformations induced by atmospheric loading (about 1%).

**Key words:** Tides – Atmospheres – Finite-element methods – Geodynamics – Lateral heterogeneity

### 1 INTRODUCTION

At low frequencies, the Earth is mainly deformed by luni-solar tides and by surface loads, including ocean, atmosphere, ice volumes and post-glacial rebound. In this work, we focus our attention on the Earth solid tides and atmospheric loadings.

The most accepted Earth solid tide models presently deal with an ellipsoidal, rotating Earth, containing a liquid core and an elastic Mantle with hydrostatic pre-stresses (Wahr 1981; Wahr and Bergen 1986). However, the Earth is not exactly an ellipsoid and presents lateral variations and deviatoric pre-stresses: there are large wavelength density anomalies within the mantle as shown by geoid anomalies or tomography studies (e.g., Romanowicz and Gung, 2002). Wang (1994) and Dehant *et al.* (1999) recently studied the influence of lateral heterogeneities on Earth tides and they showed that this effect is small but not necessarily negligible, yet they did not take into account possible deviatoric pre-stresses whose effects on the Earth's body tides are totally unknown.

In addition to tidal forces, mass changes in the atmosphere cause deformation and mass redistribution inside the planet, involving both local and global surface motions and variations in the gravity field, which may be observed in geodetic experiments. Since several decades, satellite geodesy has provided information about the temporal variation of the Earth geopotential, in particular of the low-degree zonal harmonics ( $J_2$ ,  $J_3$  ...) (Gegout and Cazenave 1993), which is essentially due to surface loads. These hydrological, atmospheric or oceanic effects on the Earth gravity field are usually modeled assuming a spherical Earth with hydrostatic pre-stress (e.g., Farrell 1972, Wahr *et al.* 1998).

With the new generation of gravity measurements, one of the challenges of the coming decade will be to provide more realistic Earth time gravity variation models. In particular, global studies

based on gravity satellites data like GRACE, GOCE, and future GRACE/GOCE-Follow On ones, demand accurate solid tide deformation models. More realistic gravity variation models are also needed for local and ground measurements, particularly with the emergence of the gravimetric observatory network GGP (Global Geodynamic Project) which uses very accurate superconducting gravimeters.

The formalism usually developed to compute this kind of problem is based on spherical harmonic analysis. Adding lateral variations involves couplings in spherical harmonics, i.e. a complicated formalism which demands large numerical effort. Thus, the modal method (with spherical harmonic expansion) is no more very well suited. We develop here a new approach for a non-radially symmetrical Earth model using a finite element method called a spectral element method. We solve the gravito-elasticity equations taking the lateral variations within the Earth into consideration by using a first order perturbation theory (Smith 1974; Dahlen and Tromp 1998). This new model allows us to take into account lateral variations of density and rheological parameters, deviatoric pre-stresses and interfaces topography.

In order to validate our calculations, we tackle a well-known problem: the impact of the hydrostatic ellipticity on the Earth solid tides. An analytical solution for this problem can be derived for a simple model where the Earth is assumed to be homogeneous and incompressible. The gravitational potential and the vertical displacement on the surface of the deformed ellipsoid were first derived by Love (1911) and then corrected by Wang (1994); we have recently extended these analytical results to the tangential surface displacement (Greff-Lefftz *et al.* 2004). We first validate our model with this analytical solution, and then we compare our results with previous numerical solutions for a slightly elliptical hydrostatic stratified compressible elastic model (PREM).

## 2 *L. Métivier, M. Greff-Lefftz and M. Diament*

The effect of the ellipticity of the Earth is usually neglected in loading deformation theories because it is argued that, for surface load, the short wavelength lateral variations would probably generate much more important perturbations. In this paper, we quantify what is the real impact of the ellipticity on the loading Love numbers. We then study the perturbations of the temporal zonal coefficients of the geopotential induced by atmospheric loading.

This paper is organized as follows. In the next section, we recall the classical elasto-gravitational theory for a spheroidal, pre-stressed planet and give some aspect of the spectral element method used in our approach. In the following section, we validate our results with previous analytical and numerical studies. The influence of the ellipticity of the Earth on the deformation induced by  $M_2$  tides and by atmospheric loading is investigated in the last section.

### 2 THEORETICAL AND NUMERICAL APPROACH

#### 2.1 Gravito-Elasticity and Perturbation Theory

To describe the deformation of a three dimensional realistic Earth model, we use a first order perturbation formalism (for more details, see *Dahlen and Tromp*, 1998).

The planet is submitted to volumic forces  $\vec{f}$  with  $\vec{f} = \rho \vec{\nabla} V$  (luni-solar attraction or surface atmospheric loading), or to surface conditions (pressure or tangential traction), which cause deformations and mass redistributions involving surface motions and gravity variations.

The problem is solved in two steps :

(i) We first solve the elasto-gravitational equation for a spherical hydrostatic pre-stressed planet submitted to  $\vec{f}$ , i.e. we determine the displacement  $\vec{u}$  and the gravitational potential  $\phi$  within the planet, using a Lagrangian parametrization. As the inertial terms are extremely small for low frequency excitation sources, we will neglect them. The system is then composed by the static momentum equation and the mass redistribution equation:

$$\begin{aligned} A\vec{u} + \rho \vec{\nabla} \phi &= \vec{f} \\ \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) + \frac{1}{4\pi G} \Delta \phi &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

where  $A$  is the elasto-dynamical differential operator, depending on the internal structural parameters of the planet;  $\rho$  is the density and  $G$  is the gravitational constant.

(ii) We then introduce lateral variations of density and rheological parameters, deviatoric pre-stresses and interfaces topography with respect to the initial reference sphere as small perturbations. We solve a first order perturbed elasto-gravitational system of equations, where the unknowns are now the additional perturbed displacement  $\delta\vec{u}$  and the additional perturbed gravitational potential  $\delta\phi$ .

$$\begin{aligned} \delta A \delta\vec{u} + \rho \vec{\nabla} \delta\phi &= \delta\vec{f} - \delta A \vec{u} - \delta\rho \vec{\nabla} \phi \\ \vec{\nabla} \cdot (\rho \delta\vec{u}) + \frac{1}{4\pi G} \Delta \delta\phi &= -\vec{\nabla} \cdot (\delta\rho \vec{u}) \end{aligned} \quad (2)$$

$\delta A$  is the first order perturbed elasto-dynamical differential operator, and  $\delta\rho$  the perturbed density. The perturbed elasto-gravitational system of equations for a 3D realistic Earth depends on the solutions for the spherical planet with hydrostatic pre-stresses.

These equations are solved taking into account boundary conditions on displacements, tractions, gravity and gravity potential, all projected onto the spherical referential Earth.

The elasto-gravitational system of equations is solved for the static approximation. There is no inertial modes, nor rotational

eigenmodes in our present model. The liquid core is at the present modeled like an elastic solid with a very small rigidity. We found that the error induced by these approximations is negligible in the perturbed solution  $\delta\vec{u}$  and  $\delta\phi$  for an Earth's made with lateral variations (see the solution for the elliptical Earth in section 3 for example).

#### 2.2 Spectral Element Method

Only the second members of the systems of equations 1 and 2 are different. We develop a numerical model to solve these systems independently of the second members. The approach is based on the so-called spectral element method, applied to theoretical seismology in the last years (*Komatitsch and Tromp* 1999; *Chaljub et al.* 2003). The Earth is discretized on the "cubed sphere" mesh based on a *Ronchi et al.* (1996) transformation extended by *Chaljub et al.* (2003) into the radial dimension. The partial derivative equations are solved using variational formulations decomposed on polynomial basis of high degree. As for finite element methods in general, the method is easily parallelized. Our program is parallelized on a Message Passing Interface (MPI).

This numerical method is used here to low frequency phenomena (regarding to seismic frequency band) taking into account mass redistribution. The method is fully detailed in *Métivier* (2004)

### 3 VALIDATION

In order to check our method, we investigate the effect of the spheroidal shape of the Earth on the semi-diurnal body tides. Indeed, for this problem there is an analytical solution for the simple case of an incompressible homogeneous planet, and in addition several authors (*Wahr* 1981; *Wang* 1994; *Mathews et al.* 1995; *Dehant et al.* 1999) have already estimated it for the PREM model. Let  $V_{M_2}$  be the degree two tidal potential induced by the semi-diurnal lunar wave  $M_2$ :

$$V_{M_2}(r, \theta, \varphi) = V_o P_2^2(\cos \theta) \cos(\sigma t + 2\varphi) \frac{r^2}{a^2}$$

where  $\theta$  is the colatitude and  $\varphi$  the longitude.  $P_n^m$  are the Legendre polynomials.  $\sigma$  is the semi-diurnal frequency and  $a$  the Earth's radius.

The solutions are expressed in terms of Love numbers. We note  $h_2$ ,  $l_2$  and  $k_2$  the spherical tidal Love numbers. We introduce perturbed tidal Love numbers  $\delta h_0$ ,  $\delta h_+$  related to the vertical displacement,  $\delta h_0$ ,  $\delta h_+$ ,  $\delta\omega_+$  related to the tangential displacement and  $\delta k_0$ ,  $\delta k_+$  related to the gravity potential (IERS conventions), because the ellipticity on  $M_2$  tide generates spheroidal deformation in  $P_2^2$  and  $P_4^2$  and a toroidal deformation in  $P_3^2$ . The displacement may be written on the deformed outer surface of the ellipsoid as:

$$\begin{aligned} \vec{u} + \delta\vec{u} &= \frac{V_o}{g_o} \left\{ \left( h_2 + \delta h_0 \right) P_2^2 + \delta h_+ P_4^2 \right\} \cos(\sigma t + 2\varphi) \vec{n} \\ &+ \vec{\nabla} \left[ \left( l_2 + \delta l_0 \right) P_2^2 + \delta l_+ P_4^2 \right] \cos(\sigma t + 2\varphi) \\ &+ \vec{e}_r \wedge \vec{\nabla} \left[ \delta\omega_+ P_3^2 \sin(\sigma t + 2\varphi) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

where  $\vec{n}$  is the outward normal of the ellipsoid. The deformation-induced Eulerian potential in the free space is:

$$V_o \left[ (k_2 + \delta k_0) \left( \frac{a}{r} \right)^3 P_2^2 + \delta k_+ \left( \frac{a}{r} \right)^5 P_4^2 \right] \cos(\sigma t + 2\varphi) \quad (4)$$

**Table 1.** Comparison of the perturbed tidal Love numbers given by our model and others in various cases (see text). The parameters used for the computation are: the Earth radius  $a = 6371 \text{ km}$ , the rigidity  $\mu = 1.15 \cdot 10^{11} \text{ Pa.s}$  and the density  $\rho = 5520 \text{ kg.m}^{-3}$ .

$\times 10^{-3}$	$\delta h_0$	$\delta h_+$	$\delta k_0$	$\delta k_+$
<i>Homogeneous Incompressible Earth<sup>a</sup></i>				
Analytical solution	1.5867	-0.3321	2.1357	-0.4066
Our solution	1.5877	-0.3324	2.1369	-0.4069
Relative error	-0.06 %	-0.09 %	-0.06 %	-0.07 %
<i>PREM Earth Model</i>				
Wang solution	2.02	-0.10	1.67	-0.19
Our solution	0.73 <sub>8</sub>	-0.10 <sub>7</sub>	1.08 <sub>5</sub>	-0.19 <sub>5</sub>

Our numerical model takes into account a compressible Earth. We impose the incompressibility condition by setting the compressibility parameter at an arbitrarily high value (typically about  $10^{14}$ ). We compute the deformation for a homogeneous incompressible Earth with a radius  $a = 6371 \text{ km}$ , a rigidity  $\mu = 1.15 \cdot 10^{11} \text{ Pa.s}$  and a density  $\rho = 5520 \text{ kg.m}^{-3}$ . Table 1 shows that our results agree with analytical solutions.

We then compute the  $M_2$  body tides for an ellipsoidal Earth model stratified following the PREM model (Dziewonski and Anderson 1981). We compared our results with the previous study of Wang (1994). Table 1 shows that we agree with his solutions for  $\delta h_+$  and  $\delta k_+$ . In addition we note that they correspond to the IERS 2003 convention. However our  $\delta h_0$  and  $\delta k_0$  significantly differ from Wang values (see the Table 1). This author started with a spherical reference model which did not take into account the radial pressure, dilation and potential induced by the radial part of the centrifugal potential, and introduced these effects in the perturbation theory. As PREM is a mean spherical Earth built from seismological observations, we think that these effects are already taken into account on the geometrical and physical parameters of the initial reference sphere (for this shape, the dilation of the Earth due to this radial centrifugal potential is about 2 km). Therefore, we believe that our results for  $\delta h_0$  and  $\delta k_0$  are more realistic.

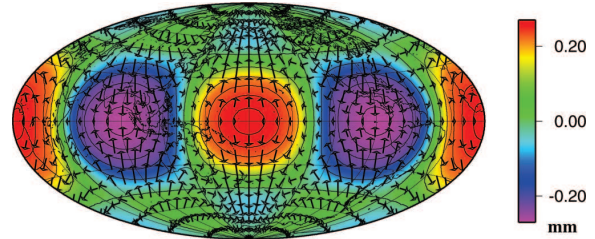
## 4 APPLICATIONS

### 4.1 The $M_2$ Tides and Earth Ellipticity

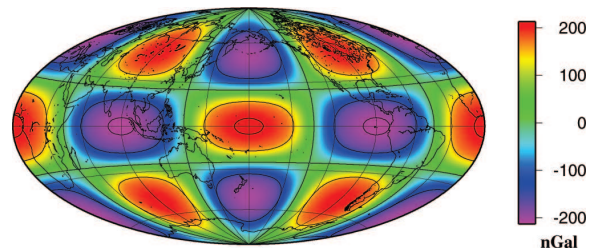
As a first application, we further investigate the predictions of our model for  $M_2$  tides. We plotted the ellipticity perturbation of the surface displacement and of the gravity (computed for PREM), respectively on Figs 1 and 2. The perturbed displacement is about one millimeter and is consequently significant, because it is well-known that for space geodesy, it is now necessary to achieve the mm level in the tidal displacements. For gravity, there is a significant degree 4 order 2 component with an amplitude of about 200 nanoGals.

### 4.2 Atmospheric Loading and Earth Ellipticity

We now investigate the response of the ellipsoidal Earth to zonal atmospheric loads because the annual component of the Earth zonal geopotential is essentially due to air mass redistribution in the atmosphere (Gegout and Cazenave 1993).



**Figure 1.** The perturbed  $M_2$  body tide displacement due to ellipticity. The color scale represents the vertical displacement in millimeters and the arrows represent the perturbed tangential displacement (maximum of 0.3 mm), on the ellipsoid. The starting Earth model is PREM.



**Figure 2.** The  $M_2$  body tide gravity intensity perturbation (in nanoGal) due to ellipticity calculated on the deformed surface, for PREM model.

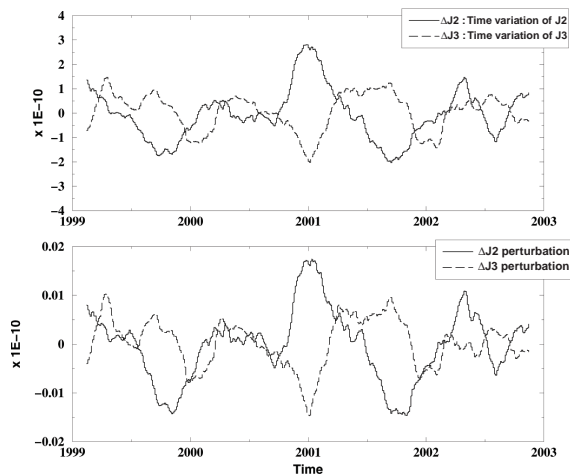
The boundary conditions for the loading gravitational potential, noted  $V^L$ , are the same as the ones for tidal potential, but there is now a boundary condition linking the external pressure acting on the ellipsoidal Earth to the traction induced by elasto-gravitational deformation. The Free Space gravitational potential may be written with the use of the  $\Delta J_n$  zonal coefficients:

$$-g_0 a \left[ \frac{a}{r} - \sum_{n=2}^M \Delta J_n \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} P_n^0(\cos \theta) \right] \quad (5)$$

The zonal loading potential is expanded in spherical harmonics, such as:  $V^L = \sum_{n=1}^M V_n^L P_n^0(\cos \theta)$ . The  $\Delta J_n$  may be expressed with the help of the spherical loading Love number  $k'_n$  and with perturbed Love numbers  $\delta k'_{n-}$ ,  $\delta k'_{n0}$  and  $\delta k'_{n+}$ :

$$\Delta J_n = \left( 1 + k'_n + \delta k'_{n0} \right) \frac{V_n^L}{g_0 a} + \delta k'_{n+2} \frac{V_{n+2}^L}{g_0 a} + \delta k'_{n-2} \frac{V_{n-2}^L}{g_0 a} \quad (6)$$

We compute the  $V_n^L$  components from a running average (with an average length of about one year) of the surface pressure coefficients, with an inverted barometer correction, from the NCEP/NCAR reanalyses (Kalnay et al. 1996). We calculate the associated  $\Delta J_2$  and  $\Delta J_3$ . The classical spherical solution (i.e.  $(1 + k'_n) \frac{V_n^L}{g_0 a}$ ) is plotted on the top of the Fig. 3 and its perturbation due to ellipticity, on the bottom. Note that the ellipticity of the Earth has two effects in the  $\Delta J_n$  coefficients: first, it weakly perturbs its amplitude (by about  $0.01 \times 10^{-10}$ ), and second, it creates a phase shift (less than one hour for the annual component) between the degree  $n$  component of the source and the degree  $n$  gravitational potential. These perturbations are smaller than the accuracy of the observations and consequently we have to conclude that for surface loads, the large wavelength lateral variations like ellipticity can be neglected in deformation theory. The next step of our work

4 *L. Métivier, M. Greff-Lefftz and M. Diament*

**Figure 3.** The computed temporal variation of  $\Delta J_2$  and  $\Delta J_3$  due to atmospheric loading calculated between 1999 and 2003. The classical spherical solutions are represented on the top of the figure and the perturbations due to ellipticity, on the bottom.

will be to test whether the short wavelength lateral variations would generate much more important perturbations for surface loads.

## 5 CONCLUSION

We have developed a new Earth elasto-gravitational model able to take into account lateral variations, deviatoric pre-stresses and topographies. This numerical model has been validated by comparison with the analytical solution of the ellipticity perturbation on  $M_2$  body tide for a homogeneous incompressible Earth, and with numerical PREM solutions. We have found some discrepancies with previous studies, essentially due to different hypothesis about the initial reference sphere, which takes into account or not the radial deformation induced by the centrifugal potential.

We have determined the response of the ellipsoidal Earth to atmospheric loading, and have found that the ellipticity has a very small impact on the time variable zonal gravity potential. We conclude that global lateral variations within the Earth will have a weak impact on the elasto-gravitational deformation induced by atmospheric loading. Local lateral variations would probably develop a more important perturbation in the Earth's response to atmospheric loading; this problem will be addressed in the future.

## ACKNOWLEDGMENTS

We thank H. Legros for fruitful discussion and Emmanuel Chaljub who gave us a part of the spectral element model he made for seismology applications. O. De Viron made useful comment on an early version of the manuscript. This study was supported by a CNRS-INSU (Dyeti) grant and is IGP contribution number 20xx.

## REFERENCES

Chaljub, E., Y. Capdeville, and J.-P. Vilotte, Solving elastodynamics in a fluid-solid heterogeneous sphere : a parallel spectral element approximation on non-conforming grids, *J. Comput. Phys.*, 187, 457–491, 2003.

- Dahlen, F. A., and J. Tromp, *Theoretical Global Seismology*, Princeton University Press, 1998.
- Dehant, V., P. Defraigne, and J. M. Wahr, Tides for a convective Earth, *J. Geophys. Res.*, 10, 41,035–1058, 1999.
- Dziewonski, A. M., and D. L. Anderson, Preliminary Referential Earth Model, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 25, 297–356, 1981.
- Farrell, W. E., Deformation of the Earth by surface loads, *Rev. of Geophys. and Space Phys.*, 10, 761–797, 1972.
- Gegout, P., and A. Cazenave, Temporal variations of the Earth gravity field for 1985–1989 derived from LAGEOS, *Geophys. J. Int.*, 114, 347–359, 1993.
- Greff-Lefftz, M., L. Métivier, and H. Legros, Analytical solutions of Love numbers for an hydrostatic ellipsoidal incompressible homogeneous Earth, using Lagrangian formulation, *submitted*, 2004.
- Kalnay, E., M. Kanamitsu, R. K., W. Collins, D. D., L. Gandin, M. I., S. Saha, G. W., J. Woollen, Y. Z., A. Leetma, R. R., M. Chelliah, W. E., W. Higgins, J. J., K. C. Mo, C. R., J. Wang, R. J., & Joseph, D., 1996. The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project, *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, 77, 437–471.
- Komatitsch, D., and J. Tromp, Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation, *Geophys. J. Int.*, 139, 806–822, 1999.
- Love, A. E. H., *Some problems of geodynamics*, Dover Publications, New York, 1911.
- Mathews, P. M., B. A. Buffet, and I. I. Shapiro, Love numbers for a rotating spheroidal Earth: New definitions and numerical values, *Geophys. Res. Lett.*, 22, 579–582, 1995.
- Métivier, L., M. Greff-Lefftz, and M. Diament, Influence des variations latérales de densité et de paramètres rhéologiques sur la réponse basse fréquence de la Terre, thesis, Institut de Physique du Globe de Paris, 2004.
- Romanowicz, B., and Y. Gung, Superplumes from the core-mantle boundary to the lithosphere: implications for heat flux, *Science*, 296, 513–516, 2002.
- Ronchi, C., R. Iacono, and P. S. Paolucci, The "Cubed Sphere" : A new method for the solution of partial differential equations in spherical geometry, *J. Comput. Phys.*, 124, 93–114, 1996.
- Smith, M. L., The scalar equations of infinitesimal elastic-gravitational motion for a rotating, slightly elliptical Earth, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 37, 491–526, 1974.
- Wahr, J., M. Molenaar, and F. Bryan, Time variability of Earth's gravity field: Hydrological and oceanic effects and their possible detection using GRACE, *J. Geophys. Res.*, 103, 30,205–30,229, 1998.
- Wahr, J. M., Body tides on an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 64, 677–703, 1981.
- Wahr, J. M., and Z. Bergen, The effects of mantle anelasticity on nutations, Earth tides, and tidal variations in rotation rate, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 64, 633–668, 1986.
- Wang, R., Effect of rotation and ellipticity on Earth tides, *Geophys. J. Int.*, 117, 562–565, 1994.

# Table des figures

1.1	Une coupe transversale du modèle de Terre P.R.E.M. ( <i>Preliminary Referential Earth Model</i> de Dziewonski & Anderson, 1981) . . . . .	15
1.2	Figure de Courtillot et al. (2003) qui schématise les grands traits de la convection dans le manteau selon les modèles proposés actuellement. . . . .	18
1.3	Variations relatives des vitesses d'ondes S pour différents modèles de tomographie sismique (figure issue de Gu et al., 2001). La figure présente ici une coupe du manteau à la latitude nulle. . . . .	21
1.4	L'attraction de marée de la Lune sur la Terre. L'attraction ressentie au point P n'est pas la même que celle ressentie au point O. . . . .	23
1.5	Signal de marée gravimétrique mesuré à l'Institut de Physique du Globe de Paris pendant une trentaine de jours (l'unité de l'axe des abscisses est le jour). . . . .	26
1.6	Variations de pression atmosphérique entre les mois de janvier et de juillet de l'année 1997 mesurées à la surface de la Terre (figure issue du rapport de stage de Florence Levy, 2004). Les données proviennent des centres européens ECMWF de mesures météorologiques, par le biais de la base de données du projet ISLSCP. . . . .	27
1.7	Échelles spatio-temporelles des différents réservoirs fluides de surface et d'autres phénomènes tels que les marées et le rebond post-glaciaire (figure de Guillaume Ramillien) . . . . .	28
1.8	Variations du $J_2$ entre 1979 et 2003 (figure issue de Cox & Chao, 2002). La droite noire correspond à la variation séculaire moyenne et la courbe rouge correspond aux variations saisonnières et interannuelles. . . . .	29
1.9	Précision attendue sur la position du géoïde pour les missions GRACE et GOCE en fonction du degré d'harmoniques sphériques considéré (Schrama, 2003). Le spectre du modèle de géoïde EGM-96 est aussi représenté (Lemoine et al., 1998). . . . .	31
1.10	Précision attendue sur la mesure du champ de pesanteur reportée sur la surface de la Terre pour différents types de missions satellitaires en fonction de la résolution spatiale (figure issue du livre "Satellite gravity and the geosphere", National Research Council, 1997). On distingue particulièrement les missions notées "GPS" (le satellite CHAMP), notées "SST" pour "Satellite to Satellite Tracking" (le satellite GRACE) et les missions notées "SGG" pour "Satellite Gravity Gradiometry" (le Satellite GOCE). . . . .	32
1.11	Le réseau mondial d'observatoires gravimétriques du Global Geodynamic Project (Aldridge et al., 1991). . . . .	33

2.1	État 0 : Terre de référence à symétrie radiale et à l'équilibre de précontraintes hydrostatique. Les couches internes de la planète représentées ici sont arbitraires	45
2.2	État 1 : Application d'une force externe (force d'attraction de la Lune ici) sur la Terre de référence	45
2.3	État 0' : Nouvelle Terre de référence exprimée comme une perturbation de l'état 0 (dont les pointillés représentent l'enveloppe)	46
2.4	État 1' : Application d'une force externe (force d'attraction de la Lune ici) sur la nouvelle Terre de référence	46
2.5	Représentation schématique du milieu de référence identifié ici au model PREM. La figure de gauche présente la structure interne de PREM, la figure de droite présente les ensembles que nous utiliserons par la suite.	47
2.6	Représentation schématique du milieu de référence perturbé. Le nombre de couches a été réduit ici par rapport à la figure 2.5 pour faciliter la lisibilité du schéma.	56
3.1	Les éléments de référence volumiques $\Lambda^3$ et surfaciques $\Lambda^2$ . Les points rouges représentent les points du maillage qui sont compris dans les éléments. Leur position et leur nombre sont dans ce schéma arbitraires. L'élément cubique comprend aussi des points internes mais par soucis de lisibilité, seul ceux du plan supérieur sont représentés sur le schéma.	67
3.2	Représentation simplifiée d'un maillage 3D. L'élément $\Omega_h^e$ du volume global s'associe à l'élément de référence cubique $\Lambda^3$ connaissant la transformation $\mathcal{F}^e$ .	68
3.3	Les 9 polynômes de Lagrange associés au 9 points de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) sur $\Lambda = [-1, 1]$ . Les points GLL correspondent aux points de coïncidence des polynômes sur l'axe des abscisses (voir la paragraphe "Intégration numérique").	69
3.4	Huit éléments cubiques et leurs points GLL	70
3.5	La transformation de Ronchi et al. (1996) : déformation d'une surface carrée de façon à ce que son quadrillage s'aligne avec les grands cercles d'une sphère.	72
3.6	La transformation de Ronchi et al. (1996) appliquée aux six faces d'un cube.	72
3.7	Schéma de construction de la sphère cubique selon une coupe transversale	73
3.8	Construction de la sphère cubique en trois dimensions, regroupement des six régions externes (figure de Capdeville, 2000)	73
3.9	Schéma de résolution du système linéaire global	78
4.1	Une coupe transversale de la triangulation élémentaire de la Terre homogène	82
4.2	Représentation d'un maillage du modèle de Terre PREM comportant 1408 éléments. La figure de gauche présente la répartition élémentaire interne du modèle selon une coupe transversale (coupe selon le plan de longitude nulle). La figure de droite présente les points de surface du maillage surimposés à une représentation de la Terre avec les continents.	83
5.1	Évolution des différents paramètres perturbés de PREM en fonction du rayon de la Terre (état 0'), déterminé selon un profil de latitude nulle. La perturbation est due à l'ellipticité.	99

5.2	La perturbation de déplacement de marée $M_2$ due à l'ellipticité (exprimée sur l'ellipsoïde). L'échelle de couleur se rapporte au déplacement normal à la surface elliptique, et les flèches au déplacement tangentiel (1 cm pour 1 mm de déplacement). Le modèle de référence de départ est PREM. . . . .	101
5.3	La perturbation de gravité de marée $M_2$ due à l'ellipticité. La gravité est ici exprimée sur la surface déformée . . . . .	101
5.4	Variations des $J_2$ et $J_3$ due à la pression atmosphérique entre 1999 et 2003. En haut les variations totales, en bas les perturbations des $\Delta J_2$ et $\Delta J_3$ due à l'ellipticité. . . . .	106
5.5	Modélisation d'un panache montant dans le manteau à l'aide d'une sphère. . .	107
5.6	Méga-panaches du manteau représentés par des hétérogénéités sphériques. . .	108
A.1	Schéma présentant les points $P$ et $P_o$ positionnés dans la planète. . . . .	119
C.1	Déraffinement de la triangulation par création d'interfaces non-conformes (technique du "mortar", Chaljub, 2000) . . . . .	136
C.2	Déraffinement conforme en déformant quelques éléments (Komatitsch & Tromp, 2002) . . . . .	136





# Liste des tableaux

1.1	Quelques ondes sélectionnées ( $g_o$ est la gravité moyenne en surface). . . . .	24
1.2	Récapitulatif des ordres de grandeurs des différentes contributions sur les déformations gravito-élastiques de la Terre. . . . .	35
1.3	Précision de quelques méthodes de mesure actuelles des déplacements de surface et de la gravité. . . . .	35
4.1	Comparaison entre les solutions en éléments spectraux et les solutions des travaux antérieurs pour la marée $M_2$ . Les paramètres utilisés pour la Terre sphérique homogène incompressible sont : le rayon $a = 6371 \text{ km}$ , le module de rigidité $\mu = 1.15 \times 10^{11} \text{ Pa}$ et la densité $\rho_o = 5520 \text{ kg.m}^{-3}$ . Les mêmes paramètres sont utilisés pour le cas compressible avec de plus $\lambda = 4.05 \times 10^{11} \text{ Pa}$ .	86
4.2	Les 30 premiers nombres de Love de surcharge de PREM, déterminés par notre méthode et comparés aux $k_l$ proposés par Wahr et al. (1998). . . . .	88
4.3	Comparaison des nombres de Love perturbés et des facteurs gravimétriques perturbés déterminés par la solution analytique et par notre solution numérique	94
5.1	Comparaison des nombres de Love perturbés de PREM déterminés par Wang (1994) et par notre solution numérique. . . . .	100
5.2	Perturbations des nombres de Love zonaux de surcharge par l'ellipticité ( $\times 10^{-3}$ )	104
5.3	Solutions analytiques des perturbations des nombres de Love de surcharges pour une Terre homogène incompressible. . . . .	104



# Références bibliographiques

- Aldridge, K., Crossley, D.J. and Mansinha, L., & Smylie, D., 1991. GGP the global geodynamics project, *Workshop : Non Tidal Gravity Changes Intercomparison between absolute and superconducting gravimeters*, ed Poitevin, C., *Cahiers du Centre Européen de Géodynamique et de Séismologie, Luxembourg*, **3**, 169–196.
- Allègre, C. J., Manhès, G., & Gopel, C., 1995. The age of the Earth, *Geoch. Cosmoch. Acta*, **59**, 1445–1456.
- Alterman, Z., Jarosch, H., & Pekeris, C. H., 1959. Oscillation of the Earth, *Proc. R. Soc. London*, **A252**, 80–95.
- Anderson, D. L., 1998. The scale of mantle convection, *Tectonophysics*, **284**, 1–17.
- Anderson, D. L., 2000. The thermal state of the Upper Mantle; no rule for mantle plumes, *Geophys. Res. Lett.*, **27**, 3623–3626.
- Bercovici, D., Schubert, G. A., & Glatzmaier, G. A., 1989. Three-dimensional spherical models of convection in the Earth's mantle, *Science*, **244**, 893–955.
- Boschi, L. & Dziewonski, A. M., 2000. Whole Earth tomography from delay times of P, PcP, and PKP phases : lateral heterogeneities in the outer core or radial anisotropy in the mantle?, *J. Geophys. Res.*, **105**, 13675–13696.
- Bunge, H. P., Richards, M., & Baumgardner, J. R., 1996. Effects of depth-dependent viscosity on the planform of mantle convection, *Nature*, **379**, 436–438.
- Busse, F. H., 1983. Quadruple convection in the lower mantle?, *Geophys. Res. Lett.*, **10**, 285–288.
- Calmant, S. & Cazenave, A., 1987. Anomalous elastic thickness of the oceanic lithosphere in the south-central Pacific, *Nature*, **328**, 236–238.
- Capdeville, Y., 2000. *Méthode couplée éléments spectraux - solution modale pour la propagation d'ondes dans la Terre globale*, Thèse de doctorat, Institut de Physique du Globe de Paris.
- Capdeville, Y., Chaljub, E., Vilotte, J.-P., & Montagnier, J.-P., 2003. Coupling the spectral element method with a modal solution for elastic wave propagation in global earth models, *Geophys. J. Int.*, **152**, 34–67.

- Chaljub, E., 2000. *Modélisation numérique de la propagation d'ondes sismiques en géométrie sphérique : application à la sismologie globale*, Thèse de doctorat, Institut de Physique du Globe de Paris.
- Chaljub, E. & Valette, B., 2004. Spectral element modeling of three dimensional wave propagation in a self-gravitating Earth with an arbitrarily stratified outer core, *Geophys. J. Int.*, **158**, 131–141.
- Chaljub, E., Capdeville, Y., & Vilotte, J.-P., 2003. Solving elastodynamics in a fluid-solid heterogeneous sphere : a parallel spectral element approximation on non-conforming grids, *J. Comput. Phys.*, **187**, 457–491.
- Chambat, F., 1996. *Figure de la Terre : Gravimétrie, régime de contraintes et vibrations propres*, Thèse de doctorat, Institut de Physique du Globe de Paris.
- Chao, B. F., 1995. Anthropogenic impact on global géodynamics due to reservoir water impoundment, *Geophys. Res. Lett.*, **22**, 3529–3532.
- Chao, B. F. & Au, A. Y., 1991. Temporal variation of the Earth's low-degree zonal gravitational field caused by atmospheric mass redistribution : 1980-1988, *J. Geophys. Res.*, **96**, 6569–6575.
- Chao, B. F., O'Connor, W. P., Chang, A. T. C., Hall, D. K., & Foster, J. L., 1987. Snow load effect on the Earth's rotation and gravitational field, 1979-1985, *J. Geophys. Res.*, **92**, 9415–9422.
- Cheng, M. & Tapley, B. D., 2004. Variations in the Earth's oblateness during the past 28 years, *J. Geophys. Res.*, **109**, B09402, doi :10.1029/2004JB003028.
- Clairaut, A. C., 1743. *Théorie de la figure de la Terre, Tirée des principes de l'hydrostatique*, Clearwater.
- Clouard, V. & Bonneville, A., 2001. How many Pacific hotspots are fed by deep-mantle plumes ?, *Geology*, **29**, 695–698.
- Courtillot, V., Davaille, A., Besse, J., & Stock, J., 2003. Three distinct types of hotspots in earth's mantle, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **205**, 295–308.
- Cox, C. & Chao, B. F., 2002. Detection of large-scale mass redistribution in the terrestrial system since 1998, *Science*, **297**, pp 831.
- Dahlen, F. A. & Tromp, J., 1998. *Theoretical Global Seismology*, Princeton University Press.
- Davaille, A., 1999. Simultaneous generation of hotspots and superswells by convection in a heterogeneous planetary mantle, *Nature*, **402**, 756–760.
- Davaille, A., Girard, F., & Le Bars, M., 2002. How to anchor hotspots in a convecting mantle ?, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **203**, 621–634.
- Daydé, M. J., L'Excellent, J.-Y., & Gould, N. I. M., 1997. Element-By-Element preconditioners for large partially separable optimization problems, *SIAM J. Sci. Comput.*, **18**, 1767–1787.

- De Becker, M., Ducarme, B., Melchior, P., Poitevin, C., & Van Ruymbeke, M., 1987. Correlation between Earth tide anomalies and tectonic features through heat flow data, *Rev. Bras. Geofis.*, **5**, 197–203.
- Deakin, A. S. & Rasmussen, H., 1996. Sparse boundary conditions on artificial boundaries for three-dimensional potential problems, *J. Comput. Phys.*, **129**, 111–120.
- Dehant, V., 1987. Tidal parameters for an inelastic Earth, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **49**, 97–116.
- Dehant, V. & Ducarme, B., 1987. Comparison between the theoretical and observed tidal gravimetric factors, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **49**, 192–212.
- Dehant, V. & Wahr, J. M., 1991. The response of a compressible, non-homogeneous Earth to internal loading : theory, *J. Geomag. Geoelectr.*, **43**, 157–178.
- Dehant, V., Defraigne, P., & Wahr, J. M., 1999. Tides for a convective Earth, *J. Geophys. Res.*, **10**, 41035–1058.
- Diament, M. & Baudry, N., 1987. Structural trends in the Southern Cook and Austral archipelagoes (South Central Pacific) based on an analysis of SEASAT data : geodynamic implications, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **85**, 427–438.
- Dickey, J. O., Marcus, S. L., de Viron, O., & Fukumori, I., 2002. Recent Earth oblateness variations : unraveling climate and postglacial rebound effects, *Science*, **298**, 1975–1977.
- Dickey, J. O., Marcus, S. L., & de Viron, O., 2003. Coherent interannual and decadal variations in the atmosphere-ocean system, *Geophys. Res. Lett.*, **30**, 1573, doi :10.1029/2002GL016763.
- Ducarme, B., 2001. International Center for Earth Tides : Report to the Earth Tide Commission, *Bulletin d'Information des Marées Terrestres*, **BIM134**, 10505–10509.
- Dziewonski, A. M. & Anderson, D. L., 1981. Preliminary Referential Earth Model, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **25**, 297–356.
- Farrell, W. E., 1972. Deformation of the Earth by surface loads, *Rev. of Geophys. and Space Phys.*, **10**, 761–797.
- Forte, A. M. & Mitrovica, J. X., 2001. Deep-mantle high-viscosity flow and thermochemical structure inferred from seismic and geodynamic data, *Nature*, **410**, 1049–1056.
- Gegout, P. & Cazenave, A., 1993. Temporal variations of the Earth gravity field for 1985-1989 derived from LAGEOS, *Geophys. J. Int.*, **114**, 347–359.
- Glatzmaier, G., Schubert, D., & Bercovici, D., 1990. Chaotic, subduction-like downflows in a spherical model of convection in the Earth's mantle, *Nature*, **347**, 274–277.
- Grand, S. P., 1994. Mantle shear structure beneath the Americas and surrounding oceans, *J. Geophys. Res.*, **99**, 11591–11621.
- Grand, S. P., 2002. Mantle shear wave tomography and the fate of subducted slabs, *Philos. Trans. R. Soc. London*, **360(1800)**, 2475–2491.

- Greff-Lefftz, M., 2004. Upwelling plumes, superswells and True Polar Wander, *Geophys. J. Int.*, **159**, 1–13, in press.
- Greff-Lefftz, M. & Legros, H., 1997. Some remarks about the degree one deformations of the Earth, *Geophys. J. Int.*, **131**, 699–723.
- Grigné, C., 2003. *Étude de l'effet des continents sur la convection du manteau*, Thèse de doctorat, Institut de Physique du Globe de Paris.
- Grote, M. J. & Keller, J. B., 1995. On nonreflecting boundary conditions, *J. Comput. Phys.*, **122**, 231–243.
- Gu, Y. J., Dziewonski, A. M., Su, W. J., & Ekström, G., 2001. Models of the mantle shear velocity and discontinuities in the pattern of lateral heterogeneities, *J. Geophys. Res.*, **106**, 11169–11199.
- Gurnis, M., Mitrovica, J. X., Ritsema, J., & Van Heijst, H. J., 2000. Constraining mantle density structure using geological evidence of surface uplift rates : The case of african superplume, *Geochem. Geophys. Geosystems*, **1**, [online].
- Hager, B. H., 1984. Subducted Slabs and the Geoid : Constraints on Mantle Rheology and Flow, *J. Geophys. Res.*, **89**, 6003–6015.
- Hager, B. H., Clayton, R. W., Richards, M. A., Comer, R. P., & Dziewonski, A. M., 1985. Lower mantle heterogeneity, dynamic topography and the geoid, *Nature*, **313**, 541–545.
- Haxby, W. F. & Weissel, J. K., 1986. Evidence for small-scale mantle convection from seafloor altimeter data, *J. Geophys. Res.*, **91**, 3507–3520.
- Hébert, H., Villemant, B., Deplus, C., & Diament, M., 1999. Contrasting geophysical and geochemical signatures of a volcano at the axis of the Wharton fossil ridge (N-E Indian Ocean), *Geophys. Res. Lett.*, **26**, 1053–1056.
- Hill, R. I., 1991. Styrting plumes and continental break-up, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **104**, 398–416.
- Hugues, T. J. R., 1987. *The finite element method, linear static and dynamic finite element analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- James, T. S. & Ivins, E. R., 1997. Global geodetic signatures of the Antarctic ice sheet, *J. Geophys. Res.*, **102**, 605–633.
- Jault, D., Gire, C., & Le Mouél, J.-L., 1988. Westward drift, core motions and exchange of angular momentum between core and mantle, *Nature*, **333**, 353–356.
- Jeffreys, H., 1916. Causes contributory to the annual variation of latitude, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **76**, 499–525.
- Johnson, T. J., Wilson, C. R., & Chao, B. F., 2001. Nontidal oceanic contributions to gravitational field changes : predictions of the parallel ocean climate model, *J. Geophys. Res.*, **106**, 11315–11334.

- Kalnay, E., M. Kanamitsu, R. K., W. Collins, D. D., L. Gandin, M. I., S. Saha, G. W., J. Woollen, Y. Z., A. Leetma, R. R., M. Chelliah, W. E., W. Higgins, J. J., K. C. Mo, C. R., J. Wang, R. J., & Joseph, D., 1996. The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project, *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, **77**, 437–471.
- Karason, H. & van der Hilst, R. D., 2001. Improving global tomography models of P-wavespeed I : incorporation of differential travel times for refracted and diffracted core phases (PKP, Pdiff), *J. Geophys. Res.*, **106**, 6569–6587.
- King, S. D. & Anderson, D. L., 1995. An alternative mechanism of flood basalt formation, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **136**, 269–279.
- King, S. D. & Ritsema, J., 2000. African hot spot volcanism ; small-scale convection in the Upper Mantle beneath cratons, *Science*, **290**, 1137–1140.
- Komatitsch, D. & Tromp, J., 2002. Spectral-element simulations of global seismic wave propagation - II. Three-dimensional models, oceans, rotation and self-gravitation, *Geophys. J. Int.*, **150**, 303–318.
- Lax, P. D. & Milgram, A. N., 1954. Parabolic equations, in *Contributions to the theory of partial differential equations*, edited by L. Bers, S. Bochner, & F. John, vol. 33 of **Annals of mathematics studies**, pp. 167–190, Princeton University Press.
- Legros, H. & Greff-Lefftz, M., 2003. Physics of the Earth's interior, deformation and rotation, *in press*.
- Lemoine, F. G., Kenyon, S. C., Factor, J. K., Trimmer, R., Pavlis, N. K., Chinn, D. S., Cox, C. M., Klosko, S. M., Luthcke, S. B., Torrence, M. H., Wang, Y. M., Williamson, R. G., Pavlis, E. C., Rapp, R. H., & Olson, T. R., 1998. The development of the joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96, Tech. Rep. NASA/TP-1996\8-206861, NASA.
- Levy, F., 2004. Déformations gravito-élastiques sous l'action des surcharges atmosphériques : influence de l'ellipticité hydrostatique, Rapport de stage de 1<sup>re</sup> année de Magistère.
- Longman, I. M., 1962. A Green's function for determining the deformation of the earth under surface mass loads, 1, Theory, *J. Geophys. Res.*, **67**, 845–850.
- Love, A. E. H., 1911. *Some problems of geodynamics*, Dover Publications, New York.
- Maia, M. & Diament, M., 1991. An analysis of the altimetric geoid in various wavebands in the Central Pacific Ocean : constraints on the origin of intraplates features, *Tectonophysics*, **190**, 133–153.
- Mc Nutt, M. K. & Judge, A. V., 1990. The superswell and mantle dynamics beneath the South Pacific, *Science*, **248**, 969–975.
- Mc Nutt, M. K., Caress, D. W., Reynolds, J., Jordahl, K., & Duncan, R. A., 1997. Failure of plume theory to explain midplate volcanism in the southern Austral islands, *Nature*, **389**, 479–482.

- McCarthy, D. D. & Petit, G., 2003. IERS Conventions, Tech. Rep. IERS Technical Note 32, BIPM, USNO.
- Mégnin, C. & Romanowicz, B., 2000. The 3D shear velocity structure of the mantle from the inversion of body, surface and higher mode waveforms, *Geophys. J. Int.*, **143**, 709–728.
- Melchior, P., 1995. A continuing discussion about the correlation of tidal gravity anomalies and heat flow densities, *Phys. of Earth and Planet. Int.*, **88**, 223–256.
- Monnereau, M. & Quéré, S., 2001. Spherical shell models of mantle convection with tectonic plates, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **184**, 575–587.
- Morgan, W. J., 1971. Convection plumes in the Lower Mantle, *Nature*, **230**, 42–43.
- Munk, W. H. & MacDonald, G. J. F., 1960. *The rotation of the Earth*, Cambridge University Press.
- National Research Council, 1997. *Satellite gravity and the geosphere*, National Academy Press, Washington D. C. 1997.
- Ni, S. & Helmberger, D. V., 2003. Seismological constraints on the South African superplume ; could be the oldest distinct structure on earth, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **206**, 119–131.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P., 1992. *Numerical Recipes, in fortran*, Pergamom Press.
- Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F., 2000. *Numerical Mathematics*, Springer.
- Rabbell, W. & Zschau, J., 1985. Static deformations and gravity changes at the earth's surface due to atmospheric loading, *Journ. of Geophysics*, **56**, 81–99.
- Raviart, P. A. & Thomas, J. M., 1998. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, DUNOD.
- Ricard, Y. & Wuming, B., 1991. Inferring the viscosity and the 3-D density structure of the mantle from the geoid, topography and plate velocities, *Geophys. J. Int.*, **105**, 561–571.
- Richards, M. C., Duncan, R. A., & Courtillot, V. E., 1989. Flood basalts and hot-spots tracks : plume heads and tails, *Science*, **246**, 103–107.
- Ritsema, J., van Heijst, H. H., & Woodhouse, J. H., 1999. Complex shear wave velocity structure imaged beneath Africa and Island, *Science*, **286**, 1925–1928.
- Robinson, E. S., 1989. Tidal gravity, heat flow, and the upper crust, *Phys. of Earth and Planet. Int.*, **56**, 181–185.
- Romanowicz, B., 2003. Global Mantle Tomography : Progress status in the past 10 years, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, **31**, 303–328.
- Romanowicz, B. & Gung, Y., 2002. Superplumes from the core-mantle boundary to the lithosphere : implications for heat flux, *Science*, **296**, 513–516.



- Ronchi, C., Iacono, R., & Paolucci, P. S., 1996. The "Cubed Sphere" : A new method for the solution of partial differential equations in spherical geometry, *J. Comput. Phys.*, **124**, 93–114.
- Rubicam, D. P., 1984. Postglacial rebound observed by Lageos and the effective viscosity of the Lower Mantle, *J. Geophys. Res.*, **89**, 1077–1087.
- Rummel, R., Flury, J., Haagmans, R., Hughes, C., Le Grand, P., Riegger, E., Schrama, E., Sneeuw, N., Vermeesen, B., & Woodworth, P., 2003. Scientific objectives for future geopotential missions, Tech. rep., study for ESA contract 3962/01/NL/GS.
- Rydelek, P. A., Zürn, W., & Hinderer, J., 1991. On tidal gravity, heat flow and lateral heterogeneities, *Phys. of Earth and Planet. Int.*, **91**, 215–229.
- Sabadini, R., Yuen, D. A., & Widmer, R., 1985. Constraints on short-term mantle rheology from the  $J_2$  observation and the dispersion of the 18.6 y tidal Love number, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **38**, 235–249.
- Schrama, E. J. O., 2003. Error characteristics estimated from Champ, GRACE and GOCE derived geoids and from satellite altimetry derived mean dynamic topography, *Space Science Reviews*, **108**, 179–193.
- Schwartz, L., 1965. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris.
- Schwiderski, E., 1980. On charting global ocean tides, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **18**, 243–268.
- Smith, M. L., 1974. The scalar equations of infinitesimal elastic-gravitational motion for a rotating, slightly elliptical Earth, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **37**, 491–526.
- Sotin, C. & Labrosse, S., 1999. Three-dimensional thermal convection in an iso-viscous, infinite Prandtl number fluid heated from within and from below : applications to the transfer of heat through planetary mantles, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **112**, 171–190.
- Tackley, P. J., Stevenson, G. A., Glatzmaier, G., & Schubert, D., 1993. Effects of an endothermic phase transition at 670 km depth in a spherical model of convection in the Earth's mantle, *Nature*, **361**, 699–704.
- Takeuchi, H., 1950. On the Earth tides of the compressible Earth of variable density and elasticity, *Trans. Amer. Geophys. Union*, **31**, N<sup>o</sup> 5, 651–689.
- Tamisiea, M. E., Mitrovica, J. X., J., T., & Milne, G. A., 2002. Present-day secular variations in the low-degree harmonics of the geopotential : sensitivity analysis on spherically symmetric Earth models, *J. Geophys. Res.*, **107**, B12, 2378, doi :10.1029/2001JB000696.
- Tapley, B. D., Bettadpur, S., Watkins, M., & Reigber, C., 2004. The gravity recovery and climate experiment : mission overview and early results, *Geophys. Res. Lett.*, **31**, No. 9, L09607 :10.1029/2004GL019920.
- Thomson, S. W., 1862. Dynamical Problems regarding Elastic Spheroidal Shells and Spheroids of Incompressible Liquid, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **153**, 583–608.

- Turcotte, D. L. & Oxburgh, E. R., 1973. Mid plate tectonics, *Nature*, **244**, 337–339.
- Valette, B., 1986. About the influence of pre-stress upon adiabatic perturbations of the Earth, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **85**, 179–208.
- Valette, B., 1987. *Spectre des oscillations libres de la Terre, Aspects mathématiques et géophysiques*, Thèse d'état, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI.
- Van Dam, T. M. & Wahr, J. M., 1987. Displacements of the Earth's surface due to atmospheric loading : effects on gravity and baseline measurements, *J. Geophys. Res.*, **92**, 1281–1286.
- Van Dam, T. M., Wahr, J., Chao, Y., & Leuliette, E., 1997. Predictions of crustal deformation and of geoid and sea-level variability caused by oceanic and atmospheric loading, *Geophys. J. Int.*, **129**, 507–517.
- van der Hilst, R. & Karason, H., 1999. Compositional heterogeneity in the bottom 1000 kilometers of Earth's mantle : towards a hybrid convection model, *Science*, **283**, 1885–1888.
- Vidal, P., 1994. *Géochimie*, DUNOD.
- Vidal, V., 2004. *Intéraction des différentes échelles de convection dans le manteau*, Thèse de doctorat, Institut de Physique du Globe de Paris.
- Wahr, J., Molenaar, M., & Bryan, F., 1998. Time variability of Earth's gravity field : Hydrological and oceanic effects and their possible detection using GRACE, *J. Geophys. Res.*, **103**, 30205–30229.
- Wahr, J. M., 1981. A normal mode expansion for the forced response of a rotating Earth, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **64**, 651–675.
- Wahr, J. M., 1981. Body tides on an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **64**, 677–703.
- Wahr, J. M., 1981. The forced nutations on an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **64**, 705–727.
- Wahr, J. M., 1995. Earth tides, in *Global earth physics : a handbook of physical constants*, edited by T. J. Ahrens, AGU reference shelf 1, pp. 40–46, American Geophysical Union.
- Wahr, J. M. & Bergen, Z., 1986. The effects of mantle anelasticity on nutations, Earth tides, and tidal variations in rotation rate, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **64**, 633–668.
- Wang, R., 1991. *Tidal deformations of a rotating, spherically asymmetric, visco-elastic and laterally heterogeneous Earth*, Ph.D. thesis, Univ. of Kiel, Kiel, Germany.
- Wang, R., 1994. Effect of rotation and ellipticity on Earth tides, *Geophys. J. Int.*, **117**, 562–565.
- Yamaji, A., 1992. Periodic hotspot distribution and small-scale convection in the upper mantle, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **109**, 107–116.

Yoder, C. F., Williams, J. G., Dickey, J. O., Schutz, B. E., Eanes, R. J., & Tapley, B. D., 1983. Secular variations of Earth's gravitational harmonic  $J_2$  coefficient from Lageos and nontidal acceleration of Earth rotation, *Nature*, **303**, 757–762.

Zürn, W., Beaumont, C., & Slichter, L. B., 1976. Gravity tides and ocean loading in southern Alaska, *J. Geophys. Res.*, **81**, 4923–4932.



## Résumé

À l'heure du développement de la gravimétrie spatiale (satellites GRACE et GOCE), de nouveaux modèles de déformation gravito-élastique de la Terre deviennent indispensables.

La Terre se déforme à chaque instant sous l'action de la Lune et du Soleil (la marée luni-solaire), et sous l'action des surcharges de surface engendrées par les enveloppes fluides de la planète (l'atmosphère, les océans et les eaux continentales). Actuellement, ces déformations élastiques sont modélisées en supposant la Terre comme un solide sphérique (ou ellipsoïdal) dont la structure interne est hydrostatique et à symétrie radiale. Or, la planète contient des variations latérales de densité et de paramètres rhéologiques, engendrées par sa dynamique interne, qui sont négligées dans ces modèles.

Nous avons réalisé un modèle de déformation de la planète qui, pour la première fois, tient compte des variations latérales internes des paramètres physiques de la Terre, de son état de précontraintes non-hydrostatique et de ses topographies dynamiques aux interfaces de discontinuité. Ces aspects sont intégrés dans les équations de la gravito-élasticité utilisant la théorie des perturbations. Le système d'équations est résolu à l'aide d'une méthode numérique : les éléments spectraux associés au maillage de la "sphère cubique".

Le modèle a été validé avec une bonne précision sur des problèmes géodynamiques connus. Nous avons dans ce but repris les travaux analytiques réalisés par Love concernant une Terre homogène incompressible. Nous nous consacrons ensuite à de premières applications. Nous réévaluons l'impact de l'ellipticité de la Terre sur sa réponse de marée solide, et sur sa réponse aux surcharges de surface. Nous prenons l'exemple de la surcharge de pression atmosphérique et son influence sur les variations zonales de la gravité (les coefficients  $J_2$  et  $J_3$ ).

Enfin nous discutons des applications de ce modèle à la détermination de l'influence des mégapanaches mantelliques sur la réponse de marée et la réponse de surcharges de la Terre.

## Abstract

Nowadays with the development of space gravimetry (GRACE and GOCE satellites), new elasto-gravity deformation models become essential.

Earth is continuously deformed by the Sun and the Moon attraction (luni-solar tides), and under the action of surface loading due to external fluid layers (atmosphere, ocean and continental water). Presently these elastic deformations are modeled assuming that the Earth is a spherical solid (or ellipsoidal) with a radially symmetrical hydrostatic structure. However, the internal dynamics of the planet induces lateral variations of density and rheological parameters that are neglected into these models.

We built an Earth deformation model which, for the first time, takes into account the internal lateral variations of the planet physical parameters, its no-hydrostatic prestresses, and the dynamical topographies of its discontinuity interfaces. These particularities are integrated into the elasto-gravitational equations using the perturbation theory. The equation system is solved with a numerical method : the spectral element method associated to the "cubed sphere" mesh.

The model has been validated on known geophysical problems with a good accuracy. With this aim, we recovered the Love analytical work concerning a homogeneous incompressible Earth. We then made first applications. We appraised the impact of Earth ellipticity on solid tides and on the Earth response to surface loadings. We took the example of the influence of atmospheric pressure on zonal gravity variations ( $J_2$  and  $J_3$  coefficients).

Finally, we discuss the ability of the model to determine the influence of mantellic superplumes on the tidal response and the loading response of the Earth.