Projet du Module Modélisation Numérique

Introduction

Ce projet final doit être rendu au plus tard le 12 Février au secrétariat de la scolarité. Il doit être fait en respectant les groupes que vous aurez déposés préalablement au secrétariat de la scolarité
Le code mathlab BURGER peut être récupéré sur le web :
http ://www.ipgp.jussieu.fr/∼vilotte/Enseignement/M2STEP-Research/Examen-2010 Par ailleurs, si au cours de ce projet vous rencontrez des problèmes, vous pouvez me contacter (*vilotte@ipgp.jussieu.fr*) ou Mathieu Landes *landes@ipgp.jussieu.fr*.

Équation de Burger unidimensionnelle

En dimension 1, l'équation de Burger s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

où ν est une viscosité cinématique, et $u = u(x,t)$ le champ de déplacement. L'équation de Burger est une équation de transport avec un terme advectif non linéaire. Cette équation est représentative des difficultés associées à la résolution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour un fluide lorsque les termes inertiels sont dominants.
En l'absence du terme visqueux, on obtient l'équation de Burger inviscible

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

- Montrer physiquement et/ou mathématiquement en quoi la non linéarité autorise le développement de solutions discontinues, et l'apparition de chocs, pour l'équation de Burger inviscid.
- Quel est l'effet du terme visqueux, équation (1) ?

Ces particularités font de l'équation de Burger un bon modèle pour tester des algorithmes adaptés àă des écoulements pour lesquels on anticipe l'apparition de forts gradients voir des chocs.
Une écriture alternative, autorisant un meilleur traitement du terme advectif non linéaire, consiste àă ré-écrire (1) sous forme conservative

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{3}$$

avec $F = \frac{1}{2}u^2$

Schémas explicites en temps et centrés en espace

Dans un premier, on cherche àă construire un schéma explicite en temps et centré en espace pour l'équation de Burger.

- Construire un tel schéma, explicite en temps et centré d'ordre 2 en espace, pour (1) et (3).
- Étudier l'erreur de troncature pour ce type de schéma explicite. Pour ce faire, on linéarise le terme non linéaire.
- En l'absence du terme visqueux, montrer que ces schémas discrets présentent un phénomène d'aliasing. Pour ce faire, on pourra considérer une condition initiale $u(x, 0)$, associée à (3), et la décomposer en composants de Fourier.
- Expliquer l'effet du terme visqueux

Un schéma de différences finies, explicite en temps, et centré d'ordre 2 en espace, pour (3) est implémenté dans le code BURGER (cas me = 1).

Malheureusement ce type de discrétisation spatiale pour le terme advectif souffre généralement d'oscillations. Des schémas de type décentré amont (upwind) sont souvent meilleurs. Dans ce qui suit on se concentrera sur la formulation conservative (3).

Schémas explicites en temps et décentrés en espace

De simples schémas décentrés à deux points sont trop dissipatifs. De meilleurs résultats sont attendus pour des schémas décentrés amont (upwind) àă 4 points pour le terme advectif. Ainsi pour $u > 0$, on cherche une approximation du type

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx a\, F_{j-2} + b\, F_{j-1} + c\, F_j + F_{j+1} \tag{4}$$

oÃź $F_j = F(x_j, t)$ avec $x_j = j\Delta x$

- Montrer pour $u > 0$, en utilisant un développement de Taylor, que l'on peut ainsi obtenir un schéma
$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx L_x^{(4)} = \frac{F_{j+1} - F_{j-1}}{2\Delta x} + q\, \frac{(F_{j-2} - 3F_{j-1} + 3F_j - F_{j+1})}{3\Delta x}$$
- Donner l'ordre de l'erreur de troncature quelles que soient les valeurs de q, que pouvez dire pour $q = 0.5$.
- Ce schéma est écrit comme une modification du schéma de différence finie centrée. En utilisant un développement de Taylor autour du noeud j dans l'expression $F_{j-2} - 3F_{j-1} + 3F_j - F_{j+1}$, interpréter physiquement cette modification.
- Montrer pour $u < 0$, en utilisant un développement de Taylor, que l'on a un schéma du type

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx L_x^{(4)} = \frac{F_{j+1} - F_{j-1}}{2\Delta x} + q\, \frac{(F_{j-1} - 3F_j + 3F_{j+1} - F_{j+2})}{3\Delta x}$$

Ce schéma est implémenté dans le code BURGER (me = 3)

Schéma de Lax-Wendroff en temps

La méthode de Lax-Wendroff a été un algorithme très performant pour résoudre les équations gouvernant les écoulements inviscid. L'extension de cette méthode pour les écoulements de type Burger est un peu plus compliquée en raison de la non linéarité du terme advectif. On considère dans un premier temps l'équation de Burger (3) sous forme conservative sans le terme visqueux

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

La méthode de Lax-Wendroff est basée sur une expansion à l'ordre 2 de la dérivée en temps

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}|_n + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_n + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

où $u^n = u(x, t_n)$ et une représentation du terme d'ordre 2.

– Montrer que l'on peut obtenir la relation suivante pour le terme d'ordre 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_n = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

avec $A = u$.

– En déduire alors, après discrétisation spatiale le schéma suivant

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = u_j^n &- \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(F_{j+1}^n - F_{j-1}^n\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left[A_{j+\frac{1}{2}}\left(F_{j+1}^n - F_j^n\right) - A_{j-\frac{1}{2}}\left(F_j^n - F_{j-1}^n\right)\right] \end{aligned}$$

où $A_{j+\frac{1}{2}} = u - j + \frac{1}{2} = 0.5(u_j + u_{j+1})$

– Montrer que l'erreur de troncature est d'ordre 2 en temps et en espace. On peut montrer que ce schéma est stable si $|u_{max}\Delta t/\Delta x| \leq 1$.

L'évaluation du jacobien, au pas de grille $j - 1/2$ et $j + 1/2$ n'est pas économique. On peut construire un algorithme de type prédicteur-correcteur plus économique, sous la forme

$$\begin{aligned} u_{j+\frac{1}{2}}^\star &= \frac{1}{2}\left(u_j^n + u_{j-1}^n\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(F_{j+1}^n - F_j^n\right) \\ u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+\frac{1}{2}}^\star - F_{j-\frac{1}{2}}^\star\right) \end{aligned}$$

Ce schéma construit une solution intermédiaire $u_{j+\frac{1}{2}}^\star$, formellement au pas de temps $(n + \frac{1}{2})\Delta t$, qui permet de construire $F_{j+\frac{1}{2}}^\star$. Cela implique de stocker les valeurs de F en $j + \frac{1}{2}$ avant de passer au pas de temps suivant.

– Montrer l'équivalence des deux schémas

Une extension directe de ce schéma au cas visqueux ne peut se faire sans réduction de l'ordre en temps $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$. Une extension peut s'écrire

$$
\begin{aligned}
u^{\star}_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(u^n_j + u^n_{j-1}\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(F^n_{j+1} - F^n_j\right) \\
&\quad + 0.5s\left[0.5\left(u^n_{j-1} - 2u^n_j + u^n_{j+1}\right) + 0.5\left(u^n_j - 2u^n_{j+1} + u^n_{j+2}\right)\right] \\
u^{n+1}_j &= u^n_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F^{\star}_{j+\frac{1}{2}} - F^{\star}_{j-\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

avec $s = \nu\Delta t/\Delta x^2$. Ce schéma est implémenté dans le code BURGER (me = 2). On peut noter que 4 points de grille sont impliqués dans l'évaluation du terme visqueux. Par pour ce schéma, la condition de stabilité peut s'écrire $\Delta t\left(A^2\Delta t + 2\nu\right) \leq \Delta x^2$. Pratiquement, on peut approcher ce critère sous la forme $\Delta t \leq \Delta x^2/(2\nu + |A|\Delta x)$

Expériences numériques

Nous appliquerons les schémas explicites en temps pour la propagation d'une onde de choc dans un domaine $\mathbf{\Omega} = [-x_{max}, x_{max}]$, gouvernée par les équations de Burger (3)

$$
\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{5}
$$

avec $F = \frac{1}{2}u^2$. Au temps $t = 0$, l'onde de choc est localisée en $x = 0$. Les conditions initiales sont

$$
u_0(x) - u(x,0) = \begin{cases} 1.0 & \text{pour } -x_{max} \leq x \leq 0 \\ 0. & \text{pour } 0 < x \leq x_{max} \end{cases}
$$

avec pour conditions aux limites

$$
\begin{aligned}
u(-x_{max}, t) &= 1.0 \\
u(x_{max}, t) &= 0
\end{aligned}
$$

Ce problème admet une solution analytique

$$
\bar{u}(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{(x-\xi)}{t}\right]\exp^{-\frac{R_e G(\xi,x,t)}{2}}\, d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty}\exp^{-\frac{R_e G(\xi,x,t)}{2}}\, d\xi}
$$

où $R_e = \frac{1}{\nu}$ et

$$
G(\xi; x,t) = \int_0^{\xi} u_0(\varphi)\, d\varphi + \frac{(x-\xi)^2}{2t}
$$

– En vous aidant du code BURGER, option me=0, visualiser l'évolution de la solution analytique pour différentes valeurs de R_e, i.e. $R_e = 10$, $R_e = 50$ ...

– L'utilisation de () implique de limiter le temps de simulation et la plu petite valeur de R_e de sorte que les conditions aux limites (**??**) soient consistantes avec la solution analytique.
– Analyser vos résultats

Pour les différentes expériences numériques, on considérera $x_{max} = 2.0$, et un domaine $\mathbf{\Omega} = [-2, 2]$.

1. On étudiera tout d'abord le problème pour une viscosité $\nu = 0.2$ avec $\Delta x = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ et $t_{max} = 1.0$. On peut définir un nombre de Reynolds discret pour ce problème $R_{cell} = \max(u_0)\Delta x/\nu = 1.0$ et un nombre de Courant de référence $C = \max(u_0)\Delta t/\Delta x = 0.25$.
   – Donner une interprétation physique du nombre de Reynolds discret.
   – On effectuera des simulations pour les différents schémas suivants : Différences Finies Centrées - FTCS (me = 1, q=0, δ = 0), Différences Finies Décentrées -EXP4PU (me =3, q=0.5, δ = 0), et Lax-Wendroff (me=2, q=0, Δ = 0).
   – Comparer les différents schémas et les analyser à partir des figures illustrant l'évolution de la solution numérique et de l'erreur par rapport à la solution analytique.
   – Comment se comporte ces schémas lorsque l'on augment le pas en temps Δt, en gardant $t_{max} = 1.0$. Analyser vos résultats à partir du Courant de référence.
2. On étudie maintenant le problème pour une viscosité $\nu = 0.03$ avec $\Delta x = 0.10$, $\Delta t = 0.10$ et $t_{max} = 1.0$.
   – Commenter vos résultats en fonction du nombre de Reynolds discret et du nombre de Courant de référence.
   – Analyser la performance des différents schémas, en fonction de la solution analytique et de la discrétisation spatiale.
3. On considère enfin le problème pour une viscosité $\nu = 0.001$ avec $\Delta x = 0.10$, $\Delta t = 0.10$ et $t_{max} = 2.0$.
   – Commenter vos résultats en fonction du nombre de Reynolds discret et du nombre de Courant de référence.
   – Analyser la performance des différents schémas, en fonction de la solution analytique et de la discrétisation spatiale.
   – Comparer les différents problèmes.

Le code BURGER

Le code BURGER implémente les différents schémas explicites discutés. Ce code implémente également d'autres méthodes qui ne sont pas considérées ici. Les paramètres du programme sont résumés dans le tableau suivant :

Paramètre	Description
me	Type de schéma
	0 - solution analytique
	1 - FTCS : différences finies explicites en temps et centrées en espace
	2 - Lax-Wendroff (**??**)
	3 - EXP4PU : différences finies 4 points décentrées amont (voir paramètre q)
	4 - non considéré ici
	5 - non considéré ici
jmax	nombre de pas en espace
ntim	nombre total de pas en temps
xmax	borne du domaine et de la solution initiale
ad	dissipation artificielle, non considée ici (ad = 0)
c	Nombre de Courant de référence
alph	viscosité ν
s	paramètre $s = \nu \Delta t / \Delta x^2$
sa	non considéré ici (sa = 0)
rcel	Nombre de Courant discret
q	paramêtre q pour les schémas décentrés amont
em	non considéré ici (em =0)
dt	pas en temps de la simulation
dx	pas de discrétisation spatial