Travaux dirigés de mécanique des fluides (2)

1 Retour sur le tenseur des contraintes

Revenons sur la modélisation des efforts de contact par la notion de densité surfacique de force qu'on appelle contrainte notée $\overrightarrow{T}\left(P,t,\overrightarrow{N}\right)$. Essayons de démontrer que, pour qu'elle soit compatible avec le principe fondamental de la dynamique et la continuité des grandeurs, il est nécessaire que $\overrightarrow{T}$ dépende linéairement de $\overrightarrow{N}$. Pour cela, on utilise le fait que

$$\iiint_{\mathcal{D}_t} \rho \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} dV = \iiint_{\mathcal{D}_t} \rho \overrightarrow{g}\, dV + \iint_{\Sigma_t} \overrightarrow{T}\, dS$$

est valable pour tout ensemble matériel, donc en particulier pour la matière occupant un petit domaine de volume δV. On peut alors considérer pour ce dernier

- un petit cylindre limité par des sections droites d'aire dS et normales unitaires extérieures respectives $\overrightarrow{N}$ et $-\overrightarrow{N}$, et par une surface latérale $\delta\Sigma_L$. Sa hauteur δh tend vers zéro, alors que dS reste inchangé. Montrer que si M repère le centre d'une des sections droites, on doit avoir nécessairement
$$\overrightarrow{T}(M,t,\overrightarrow{N}) = -\overrightarrow{T}(M,t,-\overrightarrow{N}).$$
Quel théorème usuel de mécanique retrouve-t-on ?
- un petit tétraèdre dont trois cotés sont parallèles aux vecteurs de base du référentiel, et dont le sommet M est repéré par $\overrightarrow{x}$. On note $\overrightarrow{N}$ la normale unitaire extérieure à la face opposée à M, et on fait tendre vers zéro la longueur des côtés tout en conservant $\overrightarrow{N}$. En déduire qu'il exite nécessairement une application linéaire $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}(\overrightarrow{x},t)$ telle que
$$\overrightarrow{T}(\overrightarrow{x},t,\overrightarrow{N}) = \overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}(\overrightarrow{x},t)\cdot\overrightarrow{N}.$$

Il s'agit dans les deux exercices suivants de résoudre les équations de Navier–Stokes pour un fluide newtonien incompressible

$$\rho\left[\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\overrightarrow{v}\right] = \rho\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}p + \mu\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{v}, \quad (1)$$

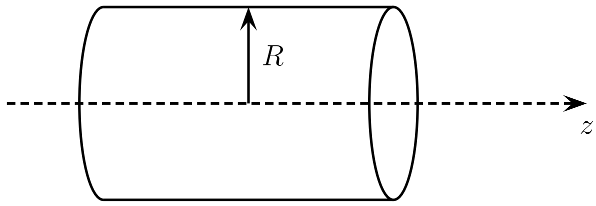
$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{v} = 0. \quad (2)$$

en utilisant au mieux les symétries du problème, et en supposant l'écoulement stationnaire. Dans ces équations, ρ est la masse volumique, $\overrightarrow{v}$ la vitesse du fluide, p sa pression, $\overrightarrow{g}$ l'accélération de la gravité, et μ la viscosité dynamique. L'expression des différents opérateurs intervenant se trouve dans le formulaire compagnon.

 Alexandre.Fournier@ujf-grenoble.fr

2 Solutions de NS : Écoulement de Poiseuille cylindrique

Considérons l'écoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien dans une conduite cylindrique

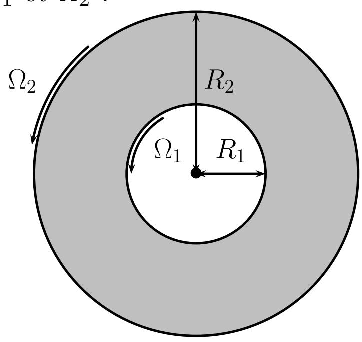


La variation de pression sur une longueur L de cylindre est notée ΔP. Cherchons une solution stationnaire respectant les symétries des conditions aux limites, c'est-à-dire une écoulement unidirectionnel selon z. On néglige l'action de la pesanteur.

1. Calculer le champ de vitesse à l'intérieur de la conduite.
2. En déduire le débit volumique. [Comparer ce débit avec celui obtenu avec 100 conduites cylindriques de rayon $R/10$ pour un même ΔP].
3. Calculer la force et le moment s'exerçant sur une longueur L de cylindre.

3 Solutions de NS : Écoulement de Couette cylindrique

Nous allons chercher une solution de l'équation de Navier–Stokes respectant les symétries des conditions aux limites pour l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux en rotation à des vitesses angulaires constantes Ω_1 et Ω_2 :



Plus particulièrement, on cherche un écoulement stationnaire dans le plan perpendiculaire à l'axe des cylindres, en négligeant les effets de la gravité.

1. Calculer le champ de vitesse entre les deux cylindres.
2. Calculer la force et le moment s'exerçant sur une longueur L du cylindre.
3. Stabilité rotatoire $\star$: dans l'écoulement non perturbé chaque élément de fluide décrit une trajectoire circulaire de rayon s, $R_1 \leq s \leq R_2$, autour de l'axe des cylindres. Posons

   $$\sigma(s) = ms^2\dot{\phi}$$

   le moment cinétique d'un élément de fluide de masse m et de vitesse angulaire $\dot{\phi}$; la force centrifuge, égale à σ^2/ms^3, est équilibrée par le gradient de pression radial qui apparaît dans le fluide en rotation. L' énergie cinétique de l'élément vaut $(1/2)\sigma^2/ms^2$.

Pour étudier la stabilité de la solution que nous avons obtenue, on suppose qu'on échange la position de deux éléments de fluide se trouvant initialement en $s = s_1$ et $s = s_2$, ayant la même masse m. Si l'on néglige les forces de frottement visqueux, le moment cinétique de chaque élément fluide se conserve lors de l'échange.

(a) En raisonnant sur la différence d'énergie du système formé par ces deux éléments entre les configurations finale et initiale, montrer qu'une condition nécessaire de stabilité est

$$(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\left(\frac{1}{s_1^2} - \frac{1}{s_2^2}\right) > 0,$$

soit encore

$$\sigma \frac{d\sigma}{ds} > 0.$$

Il s'agit du critère de Rayleigh.

(b) Donner l'expression de $\dot{\phi} = \dot{\phi}(s)$ à l'aide des paramètres du problème. En déduire que la condition précédente (critère de Rayleigh) peut s'écrire

$$(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) > 0.$$

(c) Discuter les cas particuliers où les deux cylindres tournent en sens opposé, puis dans le même sens. Étudier plus particulièrement le cas où l'un des deux cylindres est immobile.

(d) Tracer les zones de stabilité dans le plan (Ω_1, Ω_2). Discuter qualitativement l'effet de la viscosité.

Lorsque l'écoulement devient instable, il apparaît des tourbillons toriques, dits tourbillons de Taylor [1], disposés de façon régulière le long des génératrices des cylindres.
Le critère de Rayleigh est bien connu des astrophysiciens s'intéressant aux disques d'accrétion (cf. les travaux de Pierre-Yves Longaretti au LAOG).

[1] Taylor, G.I, 1923 : Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **223**, 289–343.