

Mathématiques 2 – Algèbre – TD N° 1

Exercice 1. Déterminer lesquels des ensembles E_1 , E_2 , et E_3 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}$$

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$$

$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}$$

Exercice 2.

- (a) L'ensemble $E = \{(x, 2x - 3y, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
- (b) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - y + z = 0)\}$. Est-ce un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
- (c) Soit $G = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$. Étudier $F \cap G$.
- (d) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $u = (1, -1, 0)$ et $v = (1, 1, -1)$. A quelle condition sur les réels a, b, c , le vecteur (a, b, c) est-il élément de $\text{Vect}\{u, v\}$?

Exercice 3.

- (a) Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.
- (b) Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.
- (c) Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\{u = (1, 1, 1); v = (0, 1, 1); w = (-1, 1, 1)\}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?
- (d) Montrer que les vecteurs $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les composantes du vecteur $w = (1, 1, 1)$ dans cette base.
- (e) Montrer que les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 0, -1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les composantes des vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ et $w = (1, 2, -3)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3) .

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on pose $V_1 = (1, 2, -1, 1)$ et $V_2 = (0, 3, 1, -1)$. On pose $F = \text{Vect}(V_1, V_2)$. Déterminer une base orthonormale de F et un système d'équations de $F^\perp$.

- Exercice 5.**
- (a) On considère l'ensemble vide $P = \emptyset$. Quel est l'espace vectoriel engendré par P ? Trouver la dimension de $\text{Vect}(P)$.
 - (b) On considère à présent l'ensemble $P = \{(1, 3, -4)\}$. Quel est l'espace vectoriel engendré par P ? Quelle est sa dimension ?
 - (c) Montrer que la dimension des espaces vectoriels $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, et $\mathbb{R}^3$ est respectivement égale à 1, 2 et 3.

Exercice bonus :

Exercice 6. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

- (a) Montrer que $F + G$ est aussi un sous-espace vectoriel de E .
- (b) Montrer que $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Mathématiques 2 – Algèbre – TD N° 2

Exercice 1. Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Montrer que :

- (a) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- (b) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- (c) $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
- (d) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{u}$
- (e) $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + (\vec{u} \wedge \vec{v})^2 = \vec{u}^2 \vec{v}^2$

Exercice 2. Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ avec :

- (a) $\vec{u} = (0, 1, 2)$ et $\vec{v} = (2, 1, 2)$
- (b) $\vec{u} = (-2, a, 0)$ et $\vec{v} = (a, 0, 2)$

Exercice 3. Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient $A = (6, 2, 4)$, $B = (2, 1, 1)$ et $C = (\alpha, 3, 7)$ trois points de l'espace, où α est un nombre réel.

- (a) À quelle condition le vecteur $\overrightarrow{OC}$ est-il unitaire ?
- (b) À quelle condition $(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BO}) \cdot \vec{k} = 1$?
- (c) À quelle condition les points A , B et C sont-ils alignés ?
- (d) À quelle condition $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils perpendiculaires ?

Exercice 4. Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A = (0, 0, 0)$, $B = (-1, 1, -2)$, et $C = (2, -2, 4)$ de l'espace.

- (a) Montrer que A , B et C sont alignés.
- (b) Montrer que l'équation de la droite qui passe par A , B et C peut s'écrire sous la forme $\vec{u} = \lambda \vec{b}$ où $\vec{u}$ varie dans $\mathbb{R}^3$, λ varie dans $\mathbb{R}$ et $\vec{b}$ est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ à déterminer.

Exercice 5. On considère le plan P d'équation $x + y - z = 0$, avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Trouver le vecteur unitaire normal au plan P .
- (b) Calculer la distance du point $(0, 0, 1)$ au plan P .

Exercice 6. Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (3, 1)$ et $D = (1, 1)$ trois points de l'espace.

- (a) Calculer l'aire du parallélogramme ABCD en utilisant un produit vectoriel.
- (b) Soit D' la projection orthogonale de D sur la droite passant par A et B. Calculer la distance AD' en utilisant un produit scalaire.

Mathématiques 2 – Algèbre – TD N° 3

Exercice 1. Notations :

$\mathcal{C}$: ensemble des fonctions numériques continues sur $[0, 1]$.

$\mathcal{C}_d$: ensemble des fonctions numériques ayant une dérivée continue sur $[0, 1]$.

$\mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$: définis de façon analogue pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

$\mathcal{P}$: ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$.

$\mathcal{P}_n$: ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$, de degré $\leq n$.

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

- (a) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 4x - 3$.
- (b) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (y, x)$.
- (c) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 3x + 5y$.
- (d) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin(3x + 5y)$.
- (e) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$.
- (f) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : M \mapsto M'$ défini par : $\overrightarrow{OM'} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ si $\overrightarrow{OM} \neq \vec{0}$ et $\vec{0}$ sinon.
- (g) $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : M \mapsto \overrightarrow{OM} \cdot \vec{V}$ où $\vec{V} = (4, -1, 1/2)$.
- (h) $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \max_{t \in [0, 1]} f(t)$.
- (i) $\mathcal{C}_d \rightarrow \mathcal{C} : f \mapsto f'$.

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- (a) Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il suffit de connaître les images de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ par f pour connaître la valeur de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
- (b) Quelle est la matrice de la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
- (c) Quelle est la matrice de la projection orthogonale sur l'axe des abscisses dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
- (d) Quelle est la matrice de la rotation d'angle θ (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) et de centre O dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
- (e) Quelle est la matrice de l'homothétie de centre O et de rapport k dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
- (f) Quelle est la matrice de la symétrie centrale de centre O dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
- (g) Est-ce qu'une translation est une application linéaire ?

Exercice 3. Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $A(\theta) \times A(\theta')$ et $(A(\theta))^n$ pour n entier supérieur à 1.

Exercice 4. Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x + y + 3z, -x - y - z).$$

- (a) Justifier que f est linéaire.
- (b) Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- (c) Déterminer une base et la dimension du noyau de f , noté $\ker f$. L'application f est-elle injective ?
- (d) Donner le rang de f et une base de $\text{Im} f$. L'application f est-elle surjective ?

Exercice 5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de f par rapport à cette base.

Exercice 6. Dans $E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe $\mathcal{B}$, soient les endomorphismes de matrice A dans $\mathcal{B}$ suivants :

$$\text{--- } A = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{--- } A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Dans chaque cas, en notant C_i la colonne i de A , calculer :

- (a) $\|C_1\|$
- (b) $\|C_2\|$
- (c) $\langle C_1 | C_2 \rangle$ (produit scalaire)
- (d) $C_1 \wedge C_2$ (produit vectoriel).

En déduire la nature de A .

Déterminer les $X \in \mathbb{R}^3$ tels que $AX = X$.

Mathématiques 2 – Algèbre – TD N° 4

Exercice 1. On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer AB puis $(AB)C$.
- (b) Calculer BC puis $A(BC)$.
- (c) Que remarque-t-on ?

Exercice 2. Calculer (s'il existe) l'inverse des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculer A^2 et montrer que $A^2 = 2I - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

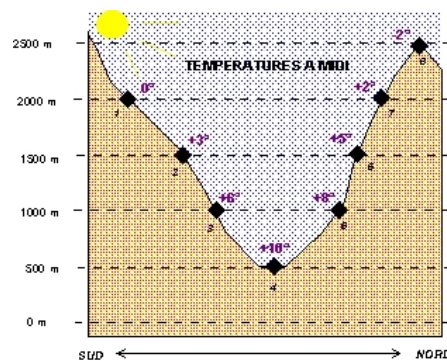
Exercice 4. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on considère le plan F d'équation $x + 2y - z = 0$.

- Trouver une base orthonormée de F .
- Donner la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan F dans la base canonique.
- Calculer la distance de $(1, 3, -1)$ au plan F .
- Donner la matrice de la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan F .

Exercice 5. Température dans une vallée alpine

Le 24 mai 2016 à 13h00, des relevés de température sont effectués à différentes altitudes au travers d'une vallée alpine. Les températures mesurées, ainsi que l'altitude des relevés, sont reportés dans le tableau et la figure ci-dessous.

Station	Température	Altitude
1	0°C	2000 m
2	+3°C	1500 m
3	+6°C	1000 m
4	+10°C	500 m
5	+8°C	1000 m
6	+5°C	1500 m
7	+2°C	2000 m
8	-2°C	2500 m



- Reporter ces mesures sur un graphique dans lequel l'altitude sera représentée en abscisses, et la température en ordonnées. Que remarque-t-on ?
- En notant x l'altitude, et y la température, établir un modèle simple, sous la forme d'une équation algébrique, permettant d'expliquer la tendance observée.
- Représenter ce modèle sous une forme matricielle, en le décomposant sur la base des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.
- Estimer les paramètres du modèle par la méthode des moindres carrés.

Mathématiques 2 – Algèbre – TD N° 4 bis

Exercice 1. Cycle sismique

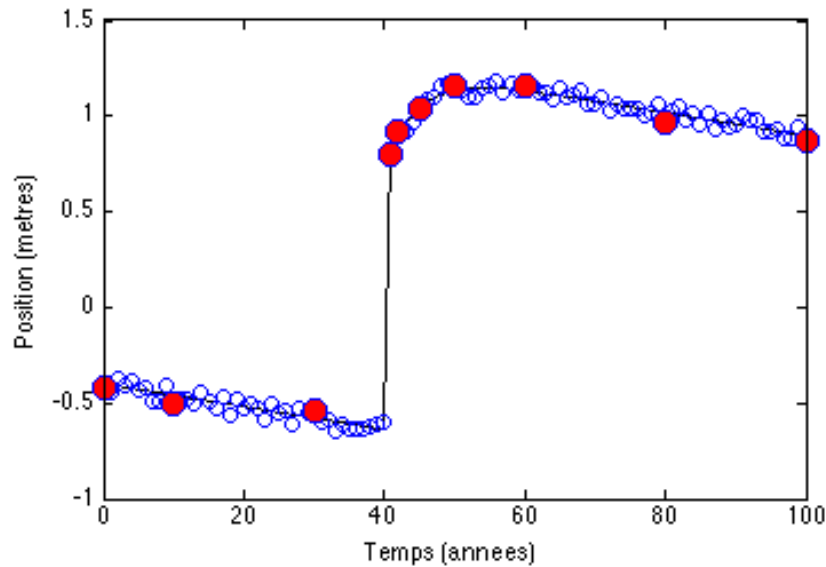
On mesure le déplacement d'un marqueur GPS au cours du temps sur plusieurs années. Les mesures sont reportées dans le tableau ci-contre et représentées dans le graphe ci-dessous (points rouges).

Sachant qu'un séisme s'est produit à la date $t_e = 40$, on souhaite modéliser les déplacements mesurés en utilisant le modèle suivant :

$$y = a + b * t + c * \mathcal{H}(t_e) + d * \mathcal{H}(t_e) * \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t - t_e}{t_r}\right) \right\} \quad (1)$$

où $\mathcal{H}$ représente la fonction de Heaviside, et $t_r = 5$.

Campagne	Date	Position
1	0	-0.4243
2	10	-0.5094
3	30	-0.5349
4	41	0.7969
5	42	0.9216
6	45	1.0342
7	50	1.1639
8	60	1.1565
9	80	0.9711
10	100	0.8678



- 1/ Que représentent, physiquement, les paramètres a , b , c et d ?
- 2/ Estimer $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ et $\hat{d}$ par la méthode des moindres carrés.
- 3/ Évaluer la norme des résidus $\|e\|$.

Réponses : $\hat{a} = -0.4023$; $\hat{b} = -0.0065$; $\hat{c} = 1.3935$; $\hat{d} = 0.5428$; $\|e\| = 0.1040$.
 "Vraies" valeurs : $a = -0.4$; $b = -0.006$; $c = 1.4$; $d = 0.5$.

Mathématiques 2 – Algèbre – TD N° 5

Exercice 1. Pour quels b au second membre les systèmes suivants ont-ils des solutions ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Déterminer le nombre q de sorte que (si possible) le rang de la matrice soit égal à (a) 1, (b) 2, (c) 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 9 & 6 & q \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ q & 2 & q \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Déterminer le nombre q de sorte que (si possible) le rang de la matrice soit égal à (a) 1, (b) 2, (c) 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 9 & 6 & q \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ q & 2 & q \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Trouver les matrices A et B vérifiant les propriétés suivantes, ou expliquer pourquoi cela n'est pas possible.

(a) L'unique solution de $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) L'unique solution de $Bx = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 5. Prouver que si $a = 0$ ou $d = 0$ ou $f = 0$ (3 cas), les colonnes de U sont liées :

$$U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Déterminer le nombre q de sorte que (si possible) le rang de la matrice soit égal à (a) 1, (b) 2, (c) 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 9 & 6 & q \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ q & 2 & q \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Ce problème a pour but de projeter $b = (b_1, \dots, b_m)$ sur la droite de vecteur directeur $a = (1, \dots, 1)$.

- (a) Résoudre l'équation $a^T a \hat{x} = a^T b$ d'inconnue $\hat{x}$.
- (b) Soit p le projeté de b sur la droite de vecteur a . On considère le vecteur erreur $e = b - p$. Exprimer le vecteur erreur e , la variance $\|e\|^2$ et l'écart type $\|e\|$ en fonction de b .
- (c) Dessiner un graphe avec $b = (1, 2, 6)$. Déterminer et représenter son projeté p sur a . Où se trouve e sur le graphe ? Vérifier que p est orthogonal à e .
- (d) Déterminer la matrice de la projection orthogonale P .

Exercice 8. Donner la matrice C des cofacteurs de A et multiplier A par C^T . En déduire A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 9. Les quatre premières *ondelettes* se trouvent dans les colonnes de la *matrice de Haar* W :

$$W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Qu'y a-t-il de spécial avec les colonnes de W ? Déterminer W^{-1} . Quelle est la relation entre W et W^{-1} ?

Exercice 10. Donner la matrice C des cofacteurs de A et multiplier A par C^T . En déduire A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$