Électromagnétisme – TD n°1

Champ de gradient

On s'intéresse au champ scalaire U défini en coordonnées cylindriques par :

$$U(r, \theta, z) = z^2/a + r\cos^2\theta$$

où a est une constante.

1. Déterminer le champ $\vec{A}$ de gradient U.
2. Déterminer la circulation de $\vec{A}$ le long d'un cercle de rayon R, situé dans un plan orthogonal à (Oz), à une hauteur h.
3. Déterminer le flux de $\vec{A}$ à travers le disque dont le contour est défini par le cercle ci-dessus.

Dipôle électrique

On donne, en coordonnées sphériques, un champ défini par :

$$\vec{E}(M) = \frac{2k\cos\theta}{r^3}\vec{e_r} + \frac{k\sin\theta}{r^3}\vec{e_\theta}$$

où k est une constante.

1. Déterminer le potentiel V dont dérive ce champ.
2. À partir de l'expression du champ, établir l'équation des lignes de champ et des surfaces équipotentielles. Retrouver ce dernier résultat à partir de l'expression de V.
3. Représenter l'allure des lignes de champ et des surfaces équipotentielles
4. Déterminer le flux de $\vec{E}$ à travers une demi-sphère de centre O, de rayon R et d'axe (Oz).

Ecoulement laminaire

On considère un tube en forme de cylindre de révolution de rayon R, dans lequel circule un fluide. Le champ de vitesse des particules fluides est caractérisé par :

$$\begin{cases} \vec{v}(M) = v(r)\vec{k} & \text{où } \vec{k} \text{ est le vecteur unitaire de l'axe de révolution du cylindre} \\ v(r) = v_o & \text{constante pour } r \leq R' \leq R \\ v(r) = v_o\dfrac{R-r}{R-R'} & \text{pour } R' \leq r \leq R \end{cases}$$

1. Représenter le profil de vitesse à l'intérieur du tube.
2. Déterminer le flux du champ de vitesse à travers la section S du tube.
3. Physiquement, que représente le produit du flux par la masse volumique du fluide ? Comment cette quantité est-elle appelée habituellement ?

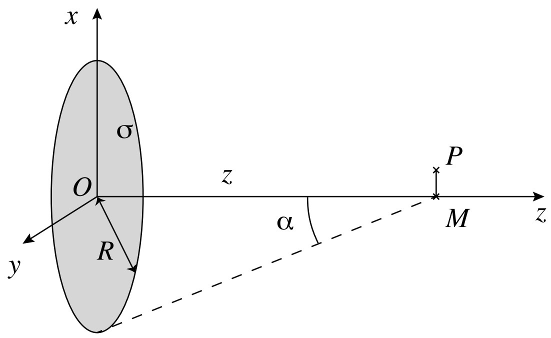
Électromagnétisme – TD n°2

Sphère uniformément chargée

On considère une sphère uniformément chargée en volume, de charge totale Q et de rayon R.

1. Déterminer $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace (on repèrera M par les coordonnées sphériques centrées sur O, centre de la sphère).
2. En déduire $V(M)$.
3. Tracer E et V en fonction de r.

Disque uniformément chargé



Un disque isolant de rayon R est électrisé uniformément avec la densité surfacique de charge σ.
Le potentiel électrique est choisi nul à l'infini.

1. M est un point de l'axe du disque ($z > 0$), α est le demi-angle au sommet du cône de révolution de sommet M, et admettant pour base le disque électrisé.
   — Calculer en fonction de σ et α le champ électrique en M.
   — Calculer en fonction de σ, α et R le potentiel électrique en M. On proposera deux méthodes de calcul.
2. Un point P est situé à la distance r de l'axe du disque et à la distance z de son plan. On suppose que r/R et r/z sont très petits devant l'unité.
   — Montrer que le champ électrique en P appartient au plan (OPM).
   On posera donc $\vec{E}(P) = E_z\vec{u}_z + E_r\vec{u}_r$. Que vaut E_z à l'ordre le plus bas ?
   — En appliquant le théorème de Gauss à un petit cylindre de centre M, d'axe (Oz), de rayon r et de longueur $2a$ ($a \ll z$), montrer que E_r est proportionnel à $\frac{\mathrm{d}E_z}{\mathrm{d}z}$ (les flux seront calculés à l'ordre le plus bas). En déduire l'expression de E_r en fonction de σ, R, α et r.
   — On fait tendre R vers l'infini. Que devient l'expression du potentiel calculé en 1. ? Comment interpréter ce résultat ? Calculer dans ce cas le potentiel en M en supposant le potentiel du disque électrisé égal à V_o.
   — Que vaut $E(M)$ si $z < 0$? Tracer $E(z)$ en fonction de z. Le champ est-il continu à la traversée de la surface chargée ?

Inverser la distribution

On considère la distribution de potentiel suivante :

$$\begin{cases} x \leq 0 & : \quad V = V_o \\ x > 0 & : \quad V = -V_o\, e^{-x/a} \end{cases}$$

Déterminer la distribution de charges $\rho(x)$ responsable de ce potentiel.

Électromagnétisme – TD n°3

Spectromètre de masse

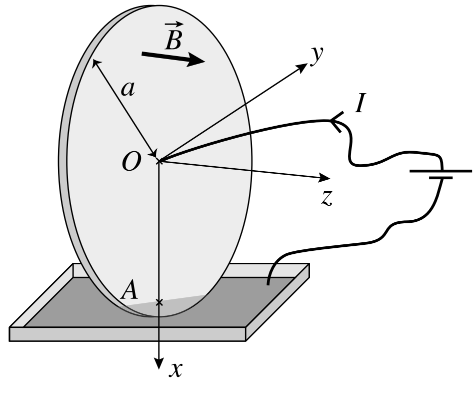
On considère ici deux types de spectromètres de masse.

1. *Spectromètre de Dempster* : un faisceau d'ions (masse m_1 et m_2, charges q_1 et q_2 positives) est émis en S, avec une vitesse initiale v_o négligeable. Les ions sont accélérés par une tension U jusqu'à une plaque P, qu'elles traversent par une fente A. Elles sont alors soumises à un champ magnétique $\vec{B}$ normal au plan de la trajectoire. On détecte leurs points d'impact C_1 et C_2 à une distance d_1 ou d_2 de A, sur la plaque P.
   — Calculer la vitesse acquise par les ions lorsqu'ils atteignent A.
   — Montrer que la trajectoire est circulaire à partir du passage de A.
   — Donner l'expression de son rayon R.
   — Exprimer la distance d entre les points d'impact C_1 et C_2.
   — Déterminer la largeur maximale des collecteurs séparant les deux isotopes du Hg ($Z = 80$) de masses atomiques $m_1 = 200\ u$ et $m_2 = 202\ u$ ($1\ u = 1,66 \times 10^{-27}\ kg$) si $B = 10^{-2}\ T$ et $U = 100\ V$.
2. *Spectromètre de Bainbridge* : le dispositif est analogue, mais on intercale sur le trajet des particules une seconde plaque P' parallèle à P, munie d'une fente en A' appartenant à la droite (SA). Entre P et P' règnent les champs $\vec{E}_1$ et $\vec{B}_1$, uniformes et orthogonaux ($\vec{B}_1$ de sens opposé à $\vec{B}$, $\vec{E}_1$ parallèle aux plaques).
   — Ces champs créent un "filtre de vitesse". Pourquoi ?
   — Exprimer la charge massique des particules arrivant en A' en fonction de U, E_1 et B_1, puis en fonction de R, B, B_1 et E_1. En déduire l'expression de R en fonction de U, B, B_1 et E_1.

Roue de Barlow

La roue de Barlow (réalisée en 1822 par l'anglais Peter Barlow) préfigure les premiers moteurs électriques. Elle permet d'illustrer le rôle de la Force de Laplace dans la conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique.

Cette roue est constituée d'un mince disque métallique d'axe (Oz) et de rayon a, et dont le bord inférieur est plongé dans un bain de mercure. Un courant continu d'intensité I entre dans la roue par son centre O, et ressort par le point inférieur A de la roue, dans le bain de mercure. Le champ magnétique $\vec{B}$ est perpendiculaire à la roue.



1. En imaginant que l'intensité I est entièrement concentrée le long du rayon OA, prédire le sens de rotation imposé par la Force de Laplace. Calculer son moment par rapport à (Oz).
2. En réalité, le courant n'est pas concentré selon OA, mais est réparti en "filets de courant" sur la surface de la roue, joignant tous O à A. Reprendre le calcul du moment des Forces de Laplace en commençant par calculer la contribution dM à M d'un filet transportant l'intensité dI.

Électromagnétisme – TD n°4

Spire de courant

Une spire (O, R) appartenant au plan (Oyz) est parcourue par un courant I. On cherche à déterminer le champ magnétique engendré par la spire en un point M situé à la distance r (i.e. $OM = r$)

1. — Rappeler les expressions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$, vecteurs caractéristiques des coordonnées polaires du plan (Oxy).
   — P est un point de la spire. Exprimer $\overrightarrow{OP}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$), puis dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$. On notera φ l'angle entre (Oy) et $\overrightarrow{OP}$. En déduire $\mathrm{d}\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{\mathrm{d}l}$ dans cette base, lorsque P se déplace sur la spire.
   — On supposera dans la suite que $R/r \ll 1$. Exprimer PM^2 dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$, si M est un point de (Oxy), en effectuant un développement limité au premier ordre en R/r.
2. — Donner l'expression des composantes de $\mathrm{d}\overrightarrow{B}$ créé par $\mathrm{d}\overrightarrow{OP}$ en M, dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$, en fonction de R, r, θ, φ et PM^3 (on appliquera à nouveau un développement limité).
3. Par intégration sur toute la spire, en déduire les composantes de $\overrightarrow{B}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.
4. En faisant apparaître $\overrightarrow{\mathcal{M}}$, moment magnétique de la spire, donner les expressions des composantes de $\overrightarrow{B}$. Quelles analogies peut-on en déduire ?

Inductance d'un solénoïde

Un solénoïde de longueur l, constitué de N spires, est parcouru par un courant d'intensité i. On cherche à donner l'expression de la tension u aux deux extrémité du conducteur constituant l'enroulement du solénoïde lorsqu'on y fait circuler du courant. On suppose qu'aucun champ magnétique extérieur n'est présent. Pour simplifier l'analyse, on supposera que le rayon du solénoïde est petit devant sa longueur.

1. Rappeler l'expression du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde, le long de son axe.
2. A l'aide du théorème d'Ampère, et en vous appuyant sur un contour de forme rectangulaire à l'intérieur du solénoïde, démontrer que le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde.
3. Reprendre l'analyse avec un contour situé à l'extérieur, puis à cheval sur les spires. Conclusion ?
4. Donner l'expression du flux magnétique φ au travers d'une section du solénoïde S, perpendiculaire à son axe (Oz). En déduire le flux magnétique total Φ à travers les N spires du solénoïde.
5. En déduire l'expression de $\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ en fonction de S, N, l et i.
6. En appliquant la loi de Lenz-Faraday, en déduire l'expression de U en fonction i sous la forme $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, où l'on donnera l'expression de l'inductance L du solénoïde.
7. Quelle est l'expression de u en régime de courant permanent ?

Dynamo de Faraday

Un disque métallique de rayon R tourne avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical dans une région de l'espace où règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, parallèle à l'axe du disque (voir la figure).

1. Effectuer un bilan des forces agissant sur les électrons libres du milieu.
2. Calculer le champ électrique en tout point du disque.
3. Calculer la différence de potentiel existant entre le centre et la circonférence du disque.