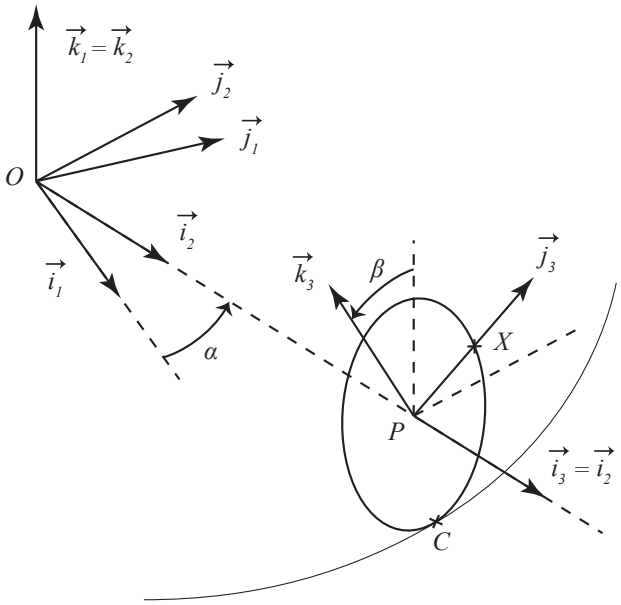
Mécanique du Solide – TD n°1

Meule – {Dérivation dans un repère tournant}

On considère le fonctionnement d'une meule, suivant ce dispositif : un bras OP, de longueur L, tourne dans un plan horizontal autour d'un axe vertical. Une roue de rayon R, dont le centre est attaché à l'extrémité P du bras, est libre de tourner autour d'un axe horizontal coïncidant avec le bras. Lorsque le bras OP tourne, la roue roule sur le sol.
On définit 3 bases orthonormées $\mathcal{B}_n = (\vec{i_n}, \vec{j_n}, \vec{k_n})$, chacune associée à un repère $\mathcal{R}_n$, telles que :

- la base $\mathcal{B}_1$ est fixe, avec $\vec{k_1}$ vertical ;
- la base $\mathcal{B}_2$ est solidaire du bras, avec $\vec{i_2}$ parallèle au bras ;
- la base $\mathcal{B}_3$ est solidaire de la roue, avec $\vec{i_3}$ parallèle au bras.

Les positions relatives des 3 bases sont décrites par 2 angles, fonction du temps : $\alpha(t)$ caractérise la position du bras et $\beta(t)$ caractérise la rotation de la roue autour du bras (voir figure).



1. Calculez les vecteurs $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}$, $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1}}$.
2. Calculez les dérivées temporelles des vecteurs des bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ dans le référentiel "absolu" $\mathcal{R}_1$.
3. Calculez la vitesse absolue du point matériel X de la périphérie de la roue caractérisé par $\overrightarrow{PX} = R.\vec{j_3}$.
4. En déduire l'expression de la vitesse de ce point lorsqu'il est en contact avec le sol.
5. Déduisez-en la condition à satisfaire pour que la roue roule sans glisser sur le sol.
6. Dans la condition de roulement sans glissement, exprimer, dans la base $\mathcal{B}_2$, le vecteur de rotation instantané de la roue $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1}}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OC}$. Que peut-on en conclure ?

Plan incliné, glissement et ressort – {Travail, énergie}

Un objet de 100 g, initialement au repos, glisse sur un plan incliné à 30°, depuis une hauteur de 40 cm. Au pied du plan incliné, il poursuit son mouvement à l'horizontale sur 50 cm, puis vient toucher un ressort de raideur k = 4 N/m. Toutes les surfaces sur lesquelles glisse l'objet sont de même nature. On note μ_s et μ_d les coefficients de frottement statique et dynamique, respectivement.

1. Si l'objet part sans vitesse initiale, on observe qu'il se met en mouvement, qu'il comprime le ressort de 10 cm, s'arrête, mais ne repart pas dans le sens inverse. Quelle est la valeur de μ_d ? Quelles valeurs de μ_s sont permises, étant données ces conditions initiales et finales ? Pour simplifier, on négligera l'action du frottement dynamique lorsque l'objet est en contact avec le ressort.
2. Quelle vitesse initiale faut-il donner à l'objet pour que celui-ci fasse un aller-retour complet, et termine son parcours dans les conditions initiales de la question précédente ?
3. Mais le frottement ne risque-t-il pas d'empêcher l'objet d'être renvoyé par le ressort ?

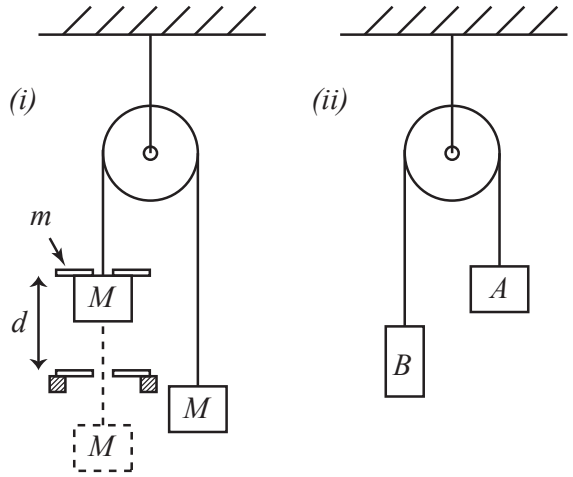
Fusée – {PFD}

On s'intéresse au fonctionnement d'une fusée utilisée pour mettre sur orbite un satellite. La fusée contient un carburant dont les produits de combustion sont dirigés, grâce à une tuyère, vers le bas. La fusée a une masse totale (fusée + carburant + charge utile) notée $m(t)$. Les gaz sont expulsés avec un débit massique constant μ et une vitesse relative u. On note $v(t)$ la vitesse de la fusée. On néglige le frottement de l'air.

1. Quelle est la masse de gaz $\mathrm{d}m$ émise pendant un petit intervalle de temps $\mathrm{d}t$? Quelle est la quantité de mouvement correspondant à cette masse de gaz ? Si la vitesse de la fusée augmente d'une quantité $\mathrm{d}v$ pendant $\mathrm{d}t$, quelle est alors la variation de quantité de mouvement de la fusée entre t et $t + \mathrm{d}t$?
2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à un système judicieusement choisi et en déduire l'expression de l'accélération de la fusée entre t et $t + \mathrm{d}t$ en fonction de u, m, g, $\mathrm{d}m$ et $\mathrm{d}t$ (on négligera les termes du second ordre en $\mathrm{d}t$). Quelle sera l'évolution de l'accélération au cours du temps ? Quel est l'intérêt du concept de fusée à étages ?
3. On néglige à présent l'influence de la pesanteur. Intégrer l'expression précédente pour donner l'expression du rapport des masses initiale et finale en fonction des vitesses initiale et finale. En supposant que la fusée ait initialement une vitesse nulle, que l'on souhaite atteindre la vitesse de libération $v_{lib} = 11.2 \times 10^3$ m/s, et que la vitesse d'expulsion des gaz est de $u = 2.5 \times 10^3$ m/s, calculer le rapport entre la masse utile m_f et la masse initiale de la fusée au lancement m_i. Reprendre le calcul pour la vitesse de satellisation minimale $v_{min} = 7.9 \times 10^3$ m/s. Commenter.

Gravimètre et voyage sur la lune – {PFD}

1. Un modèle ancien de gravimètre est la machine d'Atwood. Il s'agit d'un dispositif constitué d'une poulie et d'une corde reliée à deux masses M à chacune de ses extrémités. La poulie et la corde ont une masse négligeable et on suppose qu'il n'y a pas de frottement. Au début de l'expérience, on déplace les masses verticalement de la manière indiquée en traits pleins sur la figure (i). On ajoute ensuite un petit anneau de masse m à la masse M située le plus haut, ce qui entraîne une accélération vers le bas des deux masses combinées $(M+m)$. Lorsque les deux masses sont descendues d'une certaine distante d, la petite masse m vient se bloquer sur un aimant, et les deux masses égales M se déplacent maintenant à une vitesse constante v_f. Exprimer la valeur de l'accélération de la pesanteur g en fonction des données du problème.



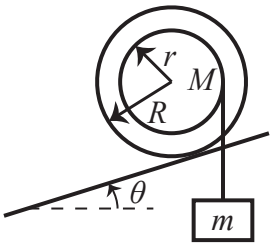
2. Un voyageur de l'espace souhaite utiliser un montage analogue sur la Lune pour y mesurer l'accélération de la pesanteur. Il sait déjà que celle-ci est de l'ordre de 1/6 de sa valeur sur Terre, mais souhaite obtenir une valeur plus précise. Il apportera avec lui une poulie, une corde et une masse A de 1.0 kg. Sur Terre, lorsqu'il pèse A à l'aide d'une balance à ressort, il obtient une lecture du poids de 9.8 N. Arrivant sur la Lune, il trouve une pierre B qui lui donne une pesée de 9.8 N avec la balance à ressort. Il attache alors A et B au système corde–poulie comme indiqué sur la figure (ii). Il observe alors que B chute avec une accélération de 1.2 $\mathrm{m.s^{-2}}$. Quelle est l'accélération de la pesanteur sur la Lune ? Quelle est la masse de B ?

Mécanique du Solide – TD n°2

Pendule tournant – {Force centrifuge, condition de stabilité}

Un pendule simple, constitué d'une masselotte de masse m, est suspendu en un point A à une tige initialement verticale de longueur l et de masse négligeable. La tige est suspendue en son sommet O, et est animée d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour de l'axe vertical Oz. La tige peut être inclinée par rapport à la verticale, de sorte que dans son mouvement elle balaie la surface d'un cône de révolution de sommet O. En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel tournant $\mathcal{R}'$ lié à la tige, et en le projetant sur une direction à la fois perpendiculaire à la tangente au mouvement et perpendiculaire à la tige, établir les conditions d'équilibre du pendule dans ce référentiel tournant. Donner la condition sur ω pour que chacun des équilibres possibles existe. En déduire l'angle α entre la tige et la verticale. Etudier la stabilité des positions d'équilibre selon la valeur de ω.

Bobine sur un plan incliné – {Moment d'une force}



Une bobine de masse $M = 3$ kg consiste en un cylindre central de rayon $r = 5$ cm encadré par deux plateaux circulaires de rayon $R = 6$ cm. Elle est placée sur un plan incliné sur lequel elle peut rouler sans glisser. Une masse $m = 4.5$ kg est suspendue à une corde enroulée autour de la bobine. On observe que le système est en équilibre statique. Quel est la pente θ du plan incliné ?

Structure interne de la Terre – {Moment d'inertie}

On cherche à calculer la masse volumique du manteau et du noyau terrestre, sachant qu'on connait la moment d'inertie de la Terre, son rayon et le rayon de l'interface noyau/manteau.

1. Démontrer que le moment d'inertie J d'une boule homogène s'écrit $J = 0.4 \times Ma^2$, où M est la masse de la boule et a son rayon.
2. Pourquoi le moment d'inertie de la Terre n'est-il que de $J = 0.3307 \times Ma^2$?
3. Calculer le moment d'inertie J_T d'un corps à symétrie sphérique de rayon r_T constitué d'une boule de masse volumique ρ_n et de rayon r_n, enveloppée d'une couche de masse volumique ρ_m et d'épaisseur constante.
4. Calculer la masse volumique du noyau et du manteau terrestre sachant que le moment d'inertie de la Terre est $J_T = 8.04 \times 10^{37}$ kg.m^2, sa masse $M_T = 5.97 \times 10^{24}$ kg, son rayon r_T= 6378 km et r_n=3486 km .

Pendule pesant amorti – {Théorème du moment cinétique}

Un pendule pesant est constitué d'un solide de centre d'inertie G mobile autour d'un axe (Δ) horizontal passant par O, tel que $OG = a$. On note J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à (Δ). On note θ l'angle entre (OG) et la verticale. On néglige les frottements au niveau de l'axe, mais on suppose que les frottement aérodynamiques ne sont pas négligeables. Ces frottements ont pour résultante une force opposée au vecteur vitesse instantané de G, proportionnelle à cette vitesse. Le coefficient de frottement fluide est noté k.

1. Faire une figure.
2. Faire le bilan des forces.
3. Calculer le moment des forces par rapport à l'axe (Δ).
4. Appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Δ).
5. En déduire l'équation du mouvement du pendule pesant amorti.
6. En négligeant maintenant les frottements aérodynamiques, quelle est la période des petites oscillations (c'est à dire pour de petites valeurs de θ) ?

Mécanique du Solide – TD n°3

Vitesse de libération

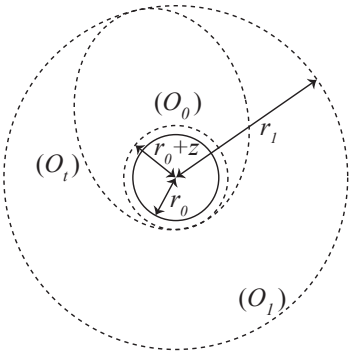
1. Quelle est l'énergie potentielle gravitationnelle d'un objet de masse m situé à la surface de la Terre ?
2. Si cet objet chutait vers la Terre à partir d'un point immobile dans le référentiel géocentrique situé à grande distance de la Terre, quelle serait sa vitesse lorsque celui-ci atteindrait la Terre ?
3. Quelle est la relation entre cette vitesse et la vitesse de libération ?

Orbite géostationnaire

On souhaite placer un satellite sur une orbite géostationnaire, c'est à dire telle que le satellite apparaisse fixe par rapport à un observateur situé à n'importe quel endroit à la surface de la Terre.

1. Quelle est la période de l'orbite géostationnaire ?
2. Pourquoi le plan de l'orbite géostationnaire doit-il nécessairement être équatorial ?
3. Pourquoi l'orbite géostationnaire doit-elle nécessairement être circulaire ?
4. Quel est le double intérêt présenté par un lancement depuis l'équateur ?

Mise sur orbite



La Terre est assimilée à un astre à symétrie sphérique de rayon $r_o = 6400$ km. L'intensité du champ de gravitation terrestre est, à la surface de la Terre : $g_o = 9.8$ m.s^{-2}. Les vitesses sont calculées relativement au référentiel géocentrique que l'on considère comme galiléen. La Terre est animée par rapport à ce référentiel d'un mouvement de rotation uniforme de période $T_1 = 24$ h.

On souhaite placer un satellite sur une orbite géostationnaire (orbite "haute", O_1). Pour cela, on le place d'abord sur une orbite "basse", O_o. Ensuite, on lui fait décrire une demi-ellipse (dite "orbite de transfert", O_t) dont un des foyers est le centre de la Terre, et qui se raccorde tangentiellement aux deux orbites circulaires précédentes (voir figure). On allume donc les propulseurs du satellite pendant une durée brève au début et à la fin de la demi-ellipse, ce qui correspond à communiquer à chaque fois au satellite un supplément de vitesse (sans changement de direction) de façon quasi-instantanée. On souhaite calculer l'énergie nécessaire pour effectuer la manœuvre de transfert de l'orbite basse à l'orbite haute.

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un objet de masse m orbitant circulairement autour de la Terre, donner la relation entre le rayon de l'orbite r et la vitesse v de l'objet. En déduire l'expression de la période de rotation T en fonction de r.
2. Un satellite S de masse m est placé sur une orbite circulaire O_o située dans le plan équatorial et d'altitude z faible devant r_o. Exprimer en fonction des données sa vitesse v_o et sa période T_o. Calculer numériquement v_o et T_o. On appelle v_o la vitesse de satellisation minimale.
3. Calculer v_E, vitesse d'un point de l'équateur terrestre ainsi que $(v_E/v_o)^2$. Dans la suite du problème, on négligera v_E^2 devant v_o^2.
4. Calculer l'énergie E_o dépensée pour placer S sur l'orbite O_o, S étant initialement au repos à la surface de la Terre.
5. On souhaite placer S sur une orbite géostationnaire O_1. Déterminer le rayon r_1 de cette orbite. Calculer numériquement $x = r_1/r_o$.
6. Calculer l'énergie E_1 dépensée pour placer S sur l'orbite O_1, S étant initialement au repos à la surface de la Terre.
7. En déduire l'énergie de transfert E_t dépensée pour déplacer le satellite de l'orbite basse à l'orbite haute. Commenter.

Première loi de Kepler – {conservation du vecteur de Runge-Lenz}

On considère une particule M de masse m, animée d'un mouvement non relativiste par rapport à un repère d'origine O. Ce mouvement est dû au champ de force gravitationnel $F(r) = -\mathcal{G}mM_T/r^2 = -\alpha/r^2$, où $r = ||\overrightarrow{OM}||$. A l'instant t, on note respectivement $\overrightarrow{v(t)}$, $\overrightarrow{a(t)}$ et $\overrightarrow{p(t)}$ la vitesse, l'accélération et la quantité de mouvement de M.
On peut montrer dans un premier temps (cf Cours) que, comme $\vec{F}$ est une force radiale, le moment cinétique $\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ est conservé au cours du mouvement, et la trajectoire appartient à un plan Π orthogonal à $\vec{\sigma}$. D'autre part, l'énergie mécanique $E = \frac{1}{2}mv^2 + U$ est une constante, $\sigma = mr^2\dot{\theta} = L_z$, et on vérifie la loi des aires : $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t = L_z/2m = \text{cste}$. On a alors $C = r^2\dot{\theta} = \dfrac{L_z}{m}$.
On définit le vecteur de Lenz (ou vecteur d'excentricité) :

$$\vec{A} = \frac{1}{\alpha\, m}\, \vec{p} \wedge \vec{\sigma} - \frac{\vec{r}}{r}$$

1. Montrer que $\vec{A}$ est un vecteur constant du plan Π.
2. Montrer que $A^2 = 1 + 2\dfrac{L_z^2 E}{m\alpha^2}$. En déduire, lorsque L_z est fixé, une borne inférieure pour l'énergie E.
3. Calculer $\vec{A}.\vec{r}$ et en déduire l'équation polaire de la trajectoire sous la forme :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

   Exprimer le paramètre p et l'excentricité e en fonction de m, α, L_z et E. Tracer le vecteur de Lenz $\vec{A}$ par rapport à la trajectoire.
4. Discuter de la nature de la trajectoire suivant la valeur de l'énergie E.

Première loi de Kepler – {formules de Binet}

Une autre méthode peut être utilisée pour mettre en évidence l'équation de la trajectoire elliptique. L'idée derrière cette méthode est de faire disparaître la variable "temps" dans les dérivées de r et θ afin de les remplacer par les dérivées de r par rapport à θ.

1. Rappeler l'expression de la vitesse et de l'accélération d'un point matériel M en mouvement plan, dans un système de coordonnées cylindriques.
2. Considérons que M, de masse m, est soumis à une attraction gravitationnelle exercée par un point matériel immobile en O de masse M_T. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que l'accélération de M est alors radiale. Projeter alors l'équation vectorielle du mouvement sur la direction (OM).
3. On introduit ici le changement de variable $u = 1/r$.
   (a) Exprimer la Constante des Aires C et le moment cinétique L_z en fonction de u et $\dot{\theta}$.
   (b) En déduire que : $r\dot{\theta}^2 = \dfrac{L_z^2}{m^2}.u^3$.
   (c) On rappelle la règle de dérivation des fonctions composées : en posant $u = f(x)$, on a :
   $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{g \circ f(x)\} = \dfrac{\mathrm{d}g(u)}{\mathrm{d}u}.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ ou, de façon plus compacte : $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u}.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.
   En déduire que : $\dot{r} = -\dfrac{L_z}{m}.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$, puis que : $\ddot{r} = -\dfrac{L_z^2}{m^2}.u^2.\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$.
   (d) En déduire que l'équation du mouvement s'écrit aussi : $\dfrac{L_z^2}{m}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right)u^2 = \alpha u^2$, où $\alpha = \mathcal{G}M_T m$. Donner alors la forme que doit prendre u pour que cette équation soit vérifiée.
   (e) En déduire l'expression de la trajectoire sous la forme : $r(\theta) = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$.

Freinage atmosphérique

Un satellite est placé sur une orbite circulaire de rayon r_o contenue dans le plan équatorial.

1. Déterminer les énergies potentielles E_p, cinétique E_c et totale E_o.
2. L'altitude du satellite étant peu élevée, il subit les frottements des hautes couches de l'atmosphère. Son énergie totale E diminue alors avec le temps suivant la loi :

$$E = E_o(1 + \alpha t) \quad \text{avec} \ \ \alpha > 0 \ \ \text{et} \ \ E_o < 0$$

On suppose que la trajectoire reste circulaire. Déterminer, en fonction du temps, le rayon r de la trajectoire, et la vitesse v du satellite. En comparant les énergies, expliquer pourquoi la vitesse du satellite augmente alors qu'il est freiné par l'atmosphère.

Un mécanisme de formation des planètes ?

On assimile le Soleil à une sphère de rayon R, de masse volumique moyenne μ_S et dont la distribution des masses est à symétrie sphérique. On examine la possibilité de formation en surface d'un petit globule sphérique de rayon $r_o \ll R$ et de masse volumique μ. En comparant d'une part l'effet de marée s'exerçant sur le globule dans le champ solaire, et d'autre part le champ gravitationnel propre du globule, établir la condition pour que le globule puisse se constituer sans dislocation. Commenter.