

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité

CHAMPS, PARTICULES, MATIÈRE

Présentée par

Eric LAJEUNESSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

DÉPLACEMENT ET INSTABILITÉS DE FLUIDES MISCIBLES ET IMMISCIBLES EN CELLULE DE HELE-SHAW

Thèse soutenue le 25 JUIN 1999 devant le jury composé de:

Mme Martine Ben Amar	Rapporteur
M. Yves Couder	Examineur
M. Michel Lance	Examineur
M. Laurent Limat	Rapporteur
M. Maurice Rossi	Examineur
M. Dominique Salin	Directeur de thèse

Remerciements

Ce travail de thèse a été effectué au laboratoire Fluide, Automatique et Systèmes thermiques. Je remercie l'ensemble du personnel du FAST dont la sympathie et la gentillesse ont rendu très agréables les trois années passées au laboratoire.

Je souhaite ensuite exprimer toute ma reconnaissance à Dominique Salin qui m'a accueilli au sein de son équipe de recherche et a dirigé ce travail avec dynamisme, bonne humeur et enthousiasme tout en me laissant une grande liberté dans l'orientation de mon travail de recherche. Cette étude doit également beaucoup à Nicole Rakotomalala et Jérôme Martin. Merci à tous les trois pour votre aide, votre disponibilité, votre patience, votre soutien et pour le plaisir et la satisfaction que m'a procurés le travail au sein de votre équipe.

Je remercie également Martine Ben Amar, Laurent Limat, Michel Lance, Maurice Rossi et Yves Couder qui m'ont fait l'honneur d'accepter de participer à mon jury de thèse et plus particulièrement les deux premiers qui ont, de plus, accepté la tâche de rapporter ce travail.

Je remercie vivement Gérard Chauvin, Christian Frenois et Christian Saurine pour leur aide et leur efficacité dans la réalisation des différents dispositifs expérimentaux.

Un grand merci à l'équipe des thésards, stagiaires, ATER et (plus ou moins) jeunes chercheurs du FAST: Pascal Berest, Jean-Marc Boffa, Georges Gauthier, Frédérique Giorgetti, Philippe Gondret, Eric Janiaud, Laurent Megnin, François Parisse, Ludovic Pauchard, Florence Rouyer, David Senis, Philippe Watzky et tous les autres. Merci donc à tous pour (chacun se reconnaitra!) l'aide latex "on line", les grandes discussions de la pause chocolat, les crises de fou rire, les parties de descent (version I et II), et tout le reste ...

Une partie de cette étude a été initiée à l'occasion de mon service militaire effectué au sein du groupe de Yves Couder au laboratoire de Physique statistique de L'ENS. Je tiens à remercier ce dernier de m'avoir accueilli et dirigé avec enthousiasme et optimisme. Je remercie également toute son équipe: Bruno Andreotti (merci pour tes conseils sur les problèmes de "pipe flow"), Adrien Daerr, Stéphane Douady et Laurent Quartier pour leur gentillesse et leur disponibilité.

Ma recherche a largement bénéficié de discussions avec Catherine Allain, Juan Elezgaray, "Bud" Homsy, Jean-Pierre Hulin, Daniel Lhuillier, Marc Rabaud (merci également pour l'entraînement physique) et Yanis Yostsos. Qu'ils soient remerciés pour leur disponibilité et l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mon travail.

Merci à tous les amis qui m'ont entouré de leur soutien chaleureux ces quatre dernières années: Thomas, Élodie, Katharina (bon courage et bonne chance pour vos thèses à tous les trois!), Jeff, Fabrice, Christophe, Céline, Arnaud, Philippe (les deux!), France, Solange, Michelle et tout l'atelier jazz, Manu (les deux également!), Nathalie, Alain, Plume, Pénélope et tous les autres ...

Je souhaite également remercier mes parents, mes frères Matthieu et Bruno et toute ma famille dont le soutien fut déterminant tout au long de mes études.

Enfin, "last but not least", je veux exprimer toute ma reconnaissance et mon affection à mon épouse, Marielle, dont les nerfs furent souvent mis à rude épreuve par un Eric à l'humeur soumise aux aléas de la recherche. Merci, donc, pour ta patience et ton soutien sans faille!

Table des matières

Introduction	5
I Etude de la déstabilisation des doigts de Saffman-Taylor	8
1 Le problème de Saffman-Taylor	9
1.1 Réduction du problème de Saffman-Taylor à un problème à deux di- mensions	9
1.1.1 Equation du mouvement d'un fluide en cellule de Hele-Shaw .	9
1.1.2 Mise en équation du problème de Saffman-Taylor dans le cadre de l'approximation de Darcy	11
1.1.3 Les limites de la loi de Darcy	12
1.2 Instabilité de Saffman-Taylor en géométrie linéaire	14
1.2.1 Analyse de stabilité linéaire d'un front plan	14
1.2.2 Évolution non-linéaire: le doigt de Saffman-Taylor	17
1.2.3 Stabilité du doigt de Saffman-Taylor	21
1.3 Le problème de Saffman-Taylor en géométrie radiale	22
1.3.1 Cellule circulaire	22
1.3.2 Secteur angulaire	24
1.4 Le problème de Saffman-Taylor dans la limite des régimes développés	26
1.5 Conclusion	29
2 Etude de la déstabilisation des doigts de Saffman-Taylor	31
2.1 Montage et protocole expérimental	31
2.1.1 Cellule de Hele-Shaw	31
2.1.2 Caractéristiques des fluides utilisés	32
2.1.3 Conditions d'injection et protocole expérimental	33
2.1.4 Acquisition des données	34
2.2 Seuil de déstabilisation des doigts de Saffman-Taylor en secteur an- gulaire	35
2.2.1 Mesure du seuil de déstabilisation des doigts de Saffman-Taylor	35
2.2.2 Introduction d'un nouveau paramètre de contrôle	37

2.3	Etude de la forme des fjords	40
2.3.1	Observations expérimentales	40
2.3.2	Modèle phénoménologique	41
2.3.3	Comparaison expérience/modèle de la forme des trajectoires des fjords	46
2.4	De la forme des fjords à la forme des branches: généralisation de la notion de cellule virtuelle	48
2.4.1	Cellules virtuelles en géométrie circulaire	48
2.4.2	Cellules virtuelles en secteurs angulaires	48
2.4.3	Généralisation à la description de structures de plus en plus complexes	50
2.4.4	Application à l'obtention de motifs d'instabilité reproductibles	51
2.4.5	Remarques sur la notion de mur virtuel	53
2.5	Evaluation de la distribution de la taille des branches secondaires . .	55
2.5.1	Fonction de distribution de la taille des fjords en géométrie linéaire	55
2.5.2	Calcul de la fonction de distribution de la taille des fjords en secteur angulaire	56
2.5.3	Analyse des résultats et comparaison avec les observations ex- périmentales	57
2.6	Conclusion	61

II Etude de l'instabilité visqueuse de fluides miscibles en cel- lule de Hele-Shaw 63

1	Digitation visqueuse de fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw	64
1.1	Déplacement d'un traceur passif entre deux plaques	65
1.1.1	Définition du nombre de diffusion transverse	65
1.1.2	Régime non diffusif: $N_{dt} \gg 1$	67
1.1.3	Régime diffusif $N_{dt} \ll 1$	69
1.1.4	Remarque	70
1.2	Déplacement de deux fluides miscibles différents entre deux plaques .	70
1.2.1	Régime diffusif: $N_{dt} \ll 1$	71
1.2.2	Régime non diffusif $N_{dt} \gg 1$	71
1.2.3	Effet de la gravité	73
1.2.4	Conclusion	74
1.3	Digitation visqueuse de fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw en régime diffusif	75

1.3.1	Equation du déplacement de deux fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw en régime diffusif	75
1.3.2	Analogie avec un milieu poreux	76
1.3.3	Analyse de stabilité linéaire sans diffusion	76
1.3.4	Analyse de stabilité linéaire avec diffusion	77
1.4	Digitation visqueuse en cellule de Hele-Shaw en régime non diffusif . .	80
1.4.1	Etudes expérimentales	80
1.4.2	Calcul de la longueur d'onde par minimisation de la dissipation visqueuse	81
1.5	conclusion	83
2	Montage et protocole expérimental	84
2.1	Description de la cellule de Hele-Shaw	84
2.2	Caractéristiques des fluides utilisés	85
2.3	Condition d'injection et protocole expérimental	85
2.4	Mesure des coefficients de diffusion	87
2.5	Acquisition des données et mesure de la concentration moyennée dans l'épaisseur de la cellule	91
3	Etude expérimentale du déplacement de fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw aux grands nombres de Péclet	96
3.1	Paramètres de contrôle	96
3.2	Définition des régime 2D et 3D	97
3.3	Description expérimentale du régime 2D	99
3.3.1	Mesure des profils de la vitesse de propagation des concentrations	99
3.3.2	Classement des différents types de profils de concentration . .	101
3.4	Description expérimentale du régime 3D	104
3.4.1	Diagramme de stabilité	104
3.4.2	Mesure de la longueur d'onde au seuil de stabilité	105
3.4.3	Description du régime non linéaire	108
3.5	Conclusion	109
4	Modélisation du régime 2D aux grands nombres de Péclet	110
4.1	Hypothèses et formulation du modèle	111
4.1.1	Hypothèses et notations	111
4.1.2	Calcul de la fonction de flux	112
4.2	Théorie des ondes cinématiques	115
4.2.1	Vitesse de propagation d'une concentration dans un profil . .	115
4.2.2	Evolution locale d'un profil de concentration aux temps courts	116

4.2.3	Evolution d'un profil de concentration aux temps longs	118
4.3	Applications de la théorie des ondes cinématiques à la description du régime 2D	124
4.3.1	Différents types de profil de vitesse	124
4.3.2	Détermination des frontières dans le plan (M, U)	127
4.3.3	Remarques: limites de validité de la théorie des ondes cinématiques	128
4.4	Comparaison théorie/expérience	129
4.4.1	Profils de vitesse	129
4.4.2	Evolution du choc en fonction de U	131
4.4.3	Diagramme de phase dans le plan (M, U)	132
4.4.4	Transition vers le régime 3D	133
4.5	Déplacement de fluides miscibles en tube vertical dans la limite des grands nombres de Péclet	134
4.5.1	Dispositif expérimental et traitement des données	134
4.5.2	Modélisation du régime 2D en tube axisymétrique vertical . .	136
4.5.3	Comparaison théorie/expérience	140
4.6	Effets de la diffusion	146
4.6.1	Effet de la diffusion sur la forme des fronts de concentration en régime 2D	146
4.6.2	Effet de la diffusion sur le régime 3D	148
4.7	conclusion	149

Conclusion	151
-------------------	------------

Bibliographie	154
----------------------	------------

Chaque fois que l'on peut voir de
petits arbres dans des pierres qui se
fendent facilement, qui ont l'air d'avoir
été peints artificiellement et dont les
petites branches se séparent les unes
des autres sans jamais s'intersecter,
alors il faut attribuer cette
arborescence à l'injection d'un fluide.

Jean Jacques Scheuzer, 1709

Introduction

Le terme de "digitation visqueuse" désigne l'instabilité observée lors du déplacement d'un fluide par un autre moins visqueux. L'interface entre les deux fluides est en effet instable et prend la forme de "doigts" de fluide moins visqueux qui envahissent le plus visqueux. La première étude scientifique de la digitation visqueuse fut effectuée par un minéralogiste suisse du début du XVIII^{ème} siècle, Jean Jacques Scheuzer. Ce dernier avait remarqué que lorsqu'on place un liquide entre deux plaques et qu'on les écarte, l'air construit naturellement, en pénétrant entre les plaques un motif arborescent très complexe¹ analogue à celui que l'on peut observer sur certaines pierres "en formes de branchages" et qu'on appelle aujourd'hui des dendrites géologiques. Il faut ensuite attendre le XX^{ème} siècle pour observer un regain d'intérêt pour la digitation visqueuse. Ce phénomène intervient en effet dans de nombreux procédés industriels, notamment dans l'industrie pétrolière, à qui on doit nombre de publications sur le sujet. On peut également citer en exemple les problèmes associés à la chromatographie ou encore à la pollution des sols.

La digitation visqueuse est à l'origine d'une multitude de formes et de comportements complexes qui diffèrent suivant la nature des fluides (miscibles ou non miscibles, newtoniens ou non newtoniens, ...), la géométrie de l'écoulement (injection radiale ou linéaire,...) et le milieu dans lequel il se produit (milieux poreux, tube, cellule de Hele-Shaw,...).

Au cours du travail présenté dans ce mémoire, nous nous sommes principalement intéressé à l'écoulement de deux fluides en cellule de Hele-Shaw, c'est-à-dire entre deux plaques séparées par une faible épaisseur. Le faible rapport d'aspect de cette géométrie permet, lorsque les fluides sont suffisamment visqueux, de travailler dans le cadre de l'approximation de lubrification, c'est-à-dire de négliger les composantes transverses de la vitesse et du gradient de pression.

1. Le lecteur intéressé trouvera un excellent historique de la recherche sur les phénomènes de croissance dans le livre de V. Fleury [25].

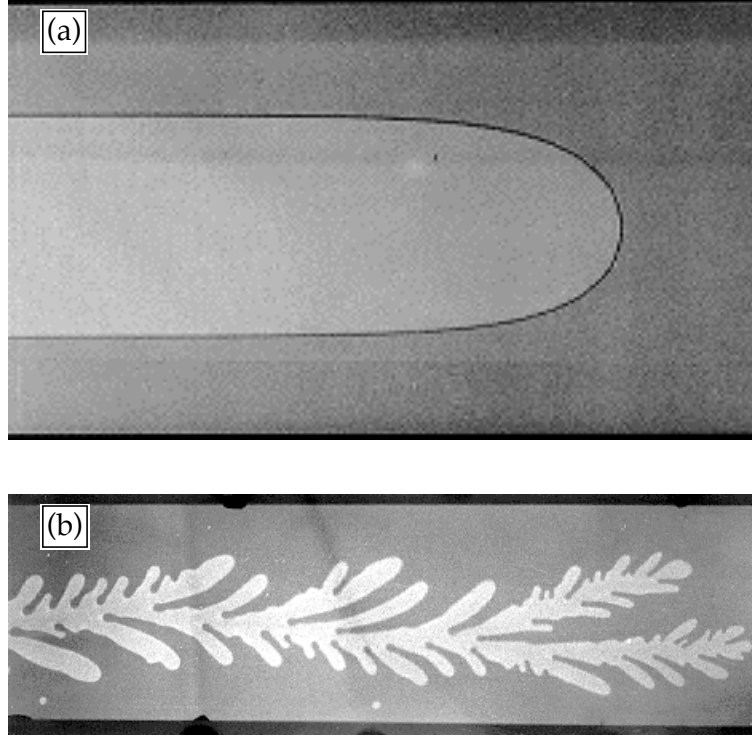


FIG. 1 – (a) *Doigt de Saffman-Taylor* (b)

La première partie de ce mémoire est consacrée au problème de Saffman-Taylor, c'est à dire à l'étude de la digitation visqueuse en cellule de Hele-Shaw dans le cas où les deux fluides ne sont pas miscibles. Dans cette configuration, la croissance du motif d'instabilité est gouvernée par l'équation de Laplace qui intervient dans de nombreux autres phénomènes physiques, parmi lesquels les problèmes d'agrégation limitée par la diffusion ou tout simplement l'électrostatique. De manière plus générale, le problème de Saffman-Taylor présente des similitudes avec de nombreux autres phénomènes de croissance tels que la croissance cristalline, l'évolution des colonies de bactéries, la forme des fronts de flamme, les phénomènes de corrosion... Ceci explique le très grand nombre d'études qui lui ont été consacrée. Ces dernières ont conduit à l'identification de deux régimes asymptotiques, en fonction de l'importance du confinement, défini comme le rapport entre la largeur de la cellule W et l'échelle caractéristique de déstabilisation naturelle de l'interface l_c . A fort confinement ($W \approx l_c$), l'instabilité conduit à la formation d'un "doigt" de fluide injecté dont la forme et la largeur sont bien définies (Fig.1a): le "doigt de Saffman-Taylor" du nom des deux physiciens qui l'ont caractérisé. Lorsque le confinement est faible ($W \gg l_c$), le doigt de Saffman-Taylor se déstabilise en se scindant en deux branches secondaires, elles-mêmes susceptibles de se déstabiliser et ainsi de suite jusqu'à former un motif ramifié très complexe (Fig.1b). Dans la limite des très faibles confinements, ce motif est fractal.

La formation d'un motif fractal suppose l'existence d'un mécanisme capable de générer

des branches sur une large échelle de tailles caractéristiques. Le travail présenté dans la première partie du mémoire a pour objet d'identifier et de décrire le mécanisme de sélection de la taille des branches secondaires issues de la première déstabilisation du doigt de Saffman-Taylor. Cette partie comporte deux chapitres. Dans le premier chapitre, nous donnerons un aperçu des principaux résultats obtenus sur l'instabilité de Saffman-Taylor. Nous exposerons dans le second chapitre une série de travaux expérimentaux consacrés à l'étude de la déstabilisation des doigts de Saffman-Taylor. A partir des observations expérimentales, nous avons développé un modèle simple permettant de décrire la forme et la taille des branches secondaires issues de la déstabilisation du doigt de Saffman-Taylor.

La seconde partie de ce mémoire est consacrée à l'étude de la digitation visqueuse en cellule de Hele-Shaw dans le cas où les deux fluides sont miscibles. Dans ce cas, la tension de surface est nulle mais il faut tenir compte de la diffusion moléculaire qui mélange les fluides aux temps longs. On peut alors distinguer deux régimes asymptotiques différents en fonction de l'importance relative des effets convectifs et diffusifs.

Le travail présenté dans cette partie du mémoire est centré sur l'étude du régime non diffusif. La vitesse d'écoulement est alors suffisamment importante pour que les deux fluides, bien que miscibles, n'aient pas le temps de se mélanger. Il est donc possible de définir une interface entre les fluides, de sorte que cette situation est formellement semblable à l'écoulement de deux fluides non miscibles avec une tension de surface rigoureusement nulle. Nous verrons que l'absence de forces capillaires permet le développement d'une langue de fluide injecté dans l'épaisseur entre les plaques de la cellule. La déstabilisation de cette langue pour certaines valeurs des paramètres de contrôle conduit à la formation d'un motif d'instabilité tridimensionnel.

Cette seconde partie du mémoire comporte quatre chapitres. Le premier consiste en une synthèse des différents travaux consacrés à la digitation visqueuse de fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw. Nous décrivons dans le second chapitre le montage et les techniques expérimentaux que nous avons utilisés au cours de cette étude. Les observations expérimentales, et notamment la mesure du seuil d'instabilité visqueuse, sont rapportées dans le troisième chapitre. Cette instabilité semblant liée à une modification de la forme de la langue de fluide injecté, nous nous sommes alors consacré à l'étude de cette dernière. Ceci nous a conduit à la formulation d'un modèle permettant de décrire la forme de la langue de fluide injecté en fonction des valeurs des paramètres de contrôle. Ce modèle est exposé et comparé aux observations expérimentales dans le quatrième chapitre.

Première partie

Etude de la déstabilisation des doigts de Saffman-Taylor

They liked to have books filled with things that they already knew, set out fair and square with no contradiction.

The lord of the rings, J.R.R. Tolkien

Chapitre 1

Le problème de Saffman-Taylor

Bien que l'instabilité de Saffman-Taylor ait fait l'objet de très nombreuses études depuis les premiers travaux de Hill [27], Saffman et Taylor [67] et Chuoke *et al.* [16], notre compréhension du problème, notamment en ce qui concerne la sélection et la stabilité du doigt de Saffman-Taylor, provient pour l'essentiel de travaux réalisés dans les années 80. Dans ce premier chapitre, nous nous proposons de rappeler les principaux résultats obtenus sur l'instabilité de Saffman-Taylor. Nous ne prétendons pas recenser l'ensemble des travaux (fort nombreux) dont cette instabilité a été l'objet, mais seulement donner un aperçu des principaux résultats qui nous seront utiles par la suite. Nous passerons en particulier sous silence les travaux sur les doigt de Saffman-Taylor anormaux ainsi que ceux consacrés à l'instabilité de l'imprimeur. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux nombreuses revues sur le sujet et en particulier à celle de D. Bensimon *et al.* [13], G.M. Homsy [28], Pelcé [56] et celles plus récentes de Y. Couder [21] et K.V. McLoud et J.V. Maher [45].

1.1 Réduction du problème de Saffman-Taylor à un problème à deux dimensions

1.1.1 Equation du mouvement d'un fluide en cellule de Hele-Shaw

A. Loi de Darcy

Une cellule de Hele-Shaw est constituée par deux plaques séparées par un intervalle dont l'épaisseur b est faible devant les autres dimensions (Fig. 1.1). Si la viscosité η d'un fluide en écoulement dans une cellule de Hele-Shaw est suffisamment importante pour que les effets inertiels soient négligeables (le nombre de Reynolds de l'écoulement est petit $Re = q\rho b/\eta \ll 1$ où ρ est la densité du fluide et q la vitesse caractéristique de l'écoulement), le profil de vitesse entre les plaques est parabolique (profil de Poiseuille) (Fig. 1.1). En considérant la vitesse moyennée sur l'épaisseur de la cellule, on se ramène

à un écoulement bidimensionnel dans le plan des plaques (oxy) [26], dont la dynamique est gouvernée par la loi de Darcy:

$$\vec{V} = -\frac{b^2}{12\eta} (\vec{\nabla} P - \rho \vec{g}) \quad (1.1)$$

où η et ρ désignent la viscosité et la densité du fluide. Si la cellule est horizontale, le terme de gravité $\rho \vec{g}$ est nul. $\vec{\nabla} P = (\partial P/\partial x, \partial P/\partial y)$ et $\vec{V} = (V_x, V_y)$ désignent respectivement le gradient de pression et la vitesse moyennée sur l'épaisseur de la cellule. Ce sont des vecteurs à deux dimensions, dont les composantes sont parallèles au plan (oxy). Notons que l'équation (1.1) est identique à celle qui décrit le mouvement d'un fluide en milieu poreux. Nous reviendrons sur cette analogie dans la seconde partie de ce mémoire.

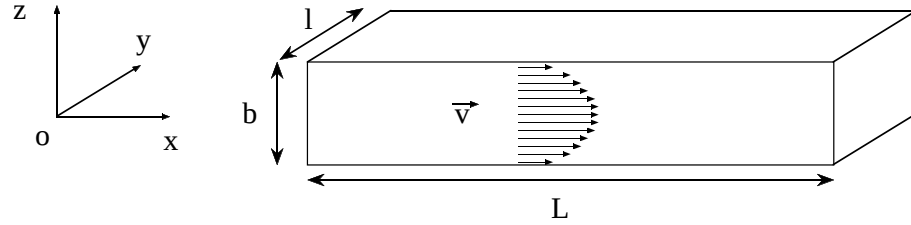


FIG. 1.1 – *Cellule de Hele-Shaw. Si l'épaisseur b est très petite devant les autres dimensions de la cellule L et l et dans la limite des faibles nombres de Reynolds (écoulement dominé par la viscosité), le profil de vitesse V entre les plaques est parabolique (profil de Poiseuille).*

B. Conditions aux limites

La loi de Darcy met en jeu des quantités moyennées sur l'épaisseur b . Elle ne peut donc décrire que des phénomènes se produisant sur des échelles de longueur supérieures à b . Au voisinage d'un mur ou d'une interface, le raccord de vitesse se fait sur une taille caractéristique inférieure à b et n'est donc pas pris en compte par la loi de Darcy. Cela explique que, bien que l'écoulement soit dominé par la viscosité, les conditions aux limites au voisinage d'un mur ou d'une interface sont semblables à celle d'un fluide parfaitement non visqueux: seule la composante normale de la vitesse est continue à l'interface. Un saut de composante tangentielle n'est pas interdit.

C. Equation de Laplace

L'équation 1.1 peut se mettre sous la forme:

$$\vec{V} = -\vec{\nabla} \phi \quad (1.2)$$

où $\phi = b^2 P / 12\eta - \rho(\vec{g} \cdot \vec{x})x$. Dans le cadre de l'approximation de Darcy, l'écoulement dérive donc du potentiel ϕ . L'écoulement d'un fluide visqueux en cellule de Hele-Shaw est

donc paradoxalement décrit par les mêmes équations que l'écoulement potentiel à deux dimensions d'un fluide parfaitement non visqueux. De plus, en combinant la loi de Darcy et la condition d'incompressibilité:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1.3)$$

il vient:

$$\Delta P = 0 \quad (1.4)$$

Le mouvement d'un fluide en cellule de Hele-Shaw se ramène donc à la résolution de l'équation de Laplace pour le champ de pression bidimensionnel.

1.1.2 Mise en équation du problème de Saffman-Taylor dans le cadre de l'approximation de Darcy

Dans le cas de l'instabilité de Saffman-Taylor, on s'intéresse au déplacement d'un fluide 1 par un fluide 2 moins visqueux et non miscible avec 1 dans une cellule de Hele-Shaw (Fig.1.2). Les viscosités des fluides 1 et 2 sont notées η_1 et η_2 ($\eta_1 > \eta_2$). En appliquant la loi de Darcy dans chacun des deux fluides, on se ramène à un problème à deux dimensions dans le plan (ox,oy) décrit par le système d'équations:

$$\Delta P_1 = 0 \quad (1.5)$$

$$\Delta P_2 = 0 \quad (1.6)$$

$$(1.7)$$

où P_1 et P_2 désignent les pressions dans les fluides 1 et 2.

Il reste à écrire les conditions aux limites à l'interface entre les deux fluides. En paramétrisant l'interface par une équation de la forme $F(x,y,t) = 0$, la continuité des vitesses normales à l'interface s'écrit:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla} F = \vec{V}_2 \cdot \vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial t} \quad (1.8)$$

La tension de surface γ impose un saut de pression à l'interface entre les deux fluides:

$$P_2 - P_1 = \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (1.9)$$

où r_1 et r_2 sont les deux rayons de courbures de l'interface respectivement dans les plans (oxy) et (oxz) (Fig.1.2). Cette condition pose un problème subtil. En effet, elle réintroduit à travers r_2 la troisième dimension oz (celle de l'épaisseur) éliminée par l'approximation de Darcy. L'hypothèse couramment utilisée [67] consiste alors à supposer que le ménisque entre les deux plaques a un rayon de courbure constant imposé par la cellule: $r_2 = b/2$. Le saut de pression se réécrit:

$$P_2 - P_1 = \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{2}{b} \right) \quad (1.10)$$

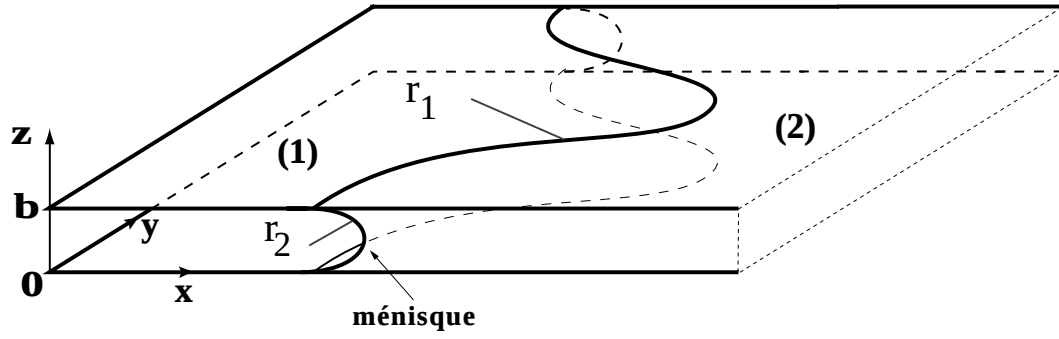


FIG. 1.2 – Écoulement de deux fluides non miscibles en cellule de Hele-Shaw. r_1 et r_2 sont les deux rayons de courbure de l'interface dans les plans (oxy) et (oxz) .

Avec cette hypothèse, le problème de Saffman-Taylor se ramène à la résolution de l'équation de Laplace pour le champ de pression bidimensionnel avec des conditions aux limites données. Bien que sa formulation soit simple, la résolution complète du problème de Saffman-Taylor est extrêmement complexe du fait de la modification continue des conditions aux limites au fur et à mesure de la déformation de l'interface.

Notons que plusieurs autres phénomènes de croissance sont décrits par la même équation: croissance électrolytique, agrégation limitée par la diffusion, ... Les différentes formes générées par ces phénomènes présentent de nombreuses analogies et notamment une extrême sensibilité aux conditions aux limites.

1.1.3 Les limites de la loi de Darcy

Nous avons supposé dans la section précédente que le problème de Saffman-Taylor peut être traité comme un problème bidimensionnel décrit par la loi de Darcy. En pratique, la situation est plus complexe [45, 56] et dépend notamment des conditions de mouillage des fluides par rapport aux plaques. Dans le cas où le fluide déplacé mouille complètement les plaques, il laisse derrière lui un film d'épaisseur t (Fig.1.3). Ce film diminue le rayon de courbure r_2 et augmente donc le saut de pression à l'interface. Des travaux expérimentaux [75] et théoriques [14, 49, 65, 66] ont démontré que, dans la limite où la viscosité du fluide injecté est très faible devant celle du fluide déplacé ($\eta_2 \ll \eta_1$), la dynamique du film de mouillage dépend de l'importance relative des forces visqueuses par rapport aux forces

capillaires, exprimée par le nombre capillaire¹:

$$Ca = \frac{\eta_1 V}{\gamma} \quad (1.11)$$

où V est la vitesse du ménisque, c'est-à-dire de l'interface.

Le saut de pression à l'interface induit par le film de mouillage a été calculé par Park et Homsy [49] dans la limite des faibles nombres capillaires. Leur résultat s'écrit:

$$P_2 - P_1 = \frac{2\gamma}{b} \left(1 + 3,8 Ca^{\frac{2}{3}}\right) + \frac{\gamma}{r_1} \frac{\pi}{4} \approx \frac{2\gamma}{b} + \frac{\gamma}{r_1} \frac{\pi}{4} \quad (1.12)$$

La loi de Darcy peut donc être utilisée à condition de tenir compte de cette correction au saut de pression. Le nombre capillaire et, par conséquent, le saut de pression dépendent alors de la vitesse locale de l'interface, ce qui complique les conditions aux limites pour la résolution du problème de Saffman-Taylor. Notons que la correction au saut de pression (1.12) a été vérifiée expérimentalement par Paterson *et al.* [51, 52].

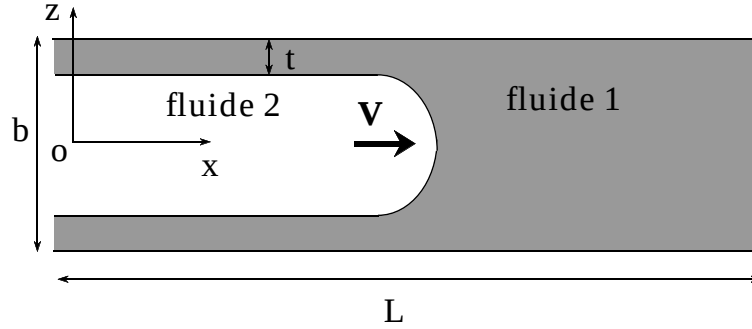


FIG. 1.3 – *Schéma de l'écoulement entre les plaques de la cellule de Hele-Shaw (plan (oxz)) : le fluide déplacé laisse en arrière un film de mouillage dont l'épaisseur t dépend du nombre capillaire Ca .*

Dans la limite des grands nombres capillaires ($Ca \gg 1$) ou des grands nombres de Reynolds ($Re \gg 1$), la loi de Darcy ne peut plus être utilisée pour décrire le problème de Saffman-Taylor [65, 66, 75]. Il faut alors tenir compte de la structure de l'écoulement entre les plaques dans l'étude de l'instabilité. Dans ce chapitre et le suivant, nous ne considérerons que des situations où la loi de Darcy est applicable et nous négligerons le terme correctif introduit par Park et Homsy (équation (1.12)). La structure de l'écoulement entre les plaques sera étudiée dans la seconde partie de ce mémoire pour le cas où les deux fluides sont miscibles.

1. La dynamique du film de mouillage dans le cas où la viscosité du fluide injecté est très grande devant celle du fluide déplacé ($\eta_2 \gg \eta_1$) est actuellement étudié par L. Meignin, P. Gondret et M. Rabaud au laboratoire F.A.S.T. (Orsay).

1.2 Instabilité de Saffman-Taylor en géométrie linéaire

1.2.1 Analyse de stabilité linéaire d'un front plan

Qualitativement, le mécanisme de l'instabilité de Saffman-Taylor est semblable à celui de l'effet de pointe en électrostatique. Considérons, pour simplifier, le déplacement d'huile par de l'air. Côté air (viscosité supposée nulle), la pression est constante et égale à la pression d'injection P_0 . Côté huile, la pression obéit à la loi de Laplace: $\Delta P = 0$. Une petite protubérance dirigée vers l'huile sur l'interface initialement plane déforme les isobares (Fig.1.4a). Le champ de pression étant laplacien, une perturbation de taille caractéristique l affecte les isobares sur une profondeur de l'ordre de l . Le gradient de pression et, par conséquent, la vitesse sont donc plus grands au voisinage de la protubérance: l'amplitude de la déformation augmente et l'interface se déstabilise. Le gradient de pression et donc la vitesse de la protubérance seront d'autant plus grands que la protubérance est pointue: ce mécanisme d'instabilité favorise donc la croissance des petites perturbations (petites longueurs d'onde).

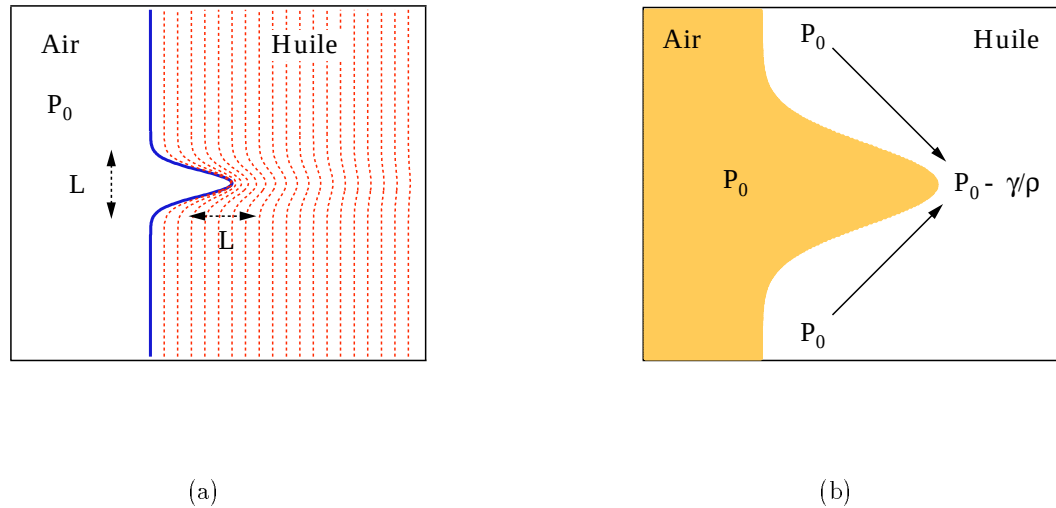


FIG. 1.4 – (a) Schéma des isobares (traits pointillés) au voisinage de l'interface air/huile (trait plein). Le gradient de pression et donc la vitesse de l'interface sont plus forts au voisinage de la perturbation. (b) Effet de la tension de surface: la déformation de l'interface crée un gradient de pression dans l'huile. En réponse à ce gradient de pression, le fluide s'écoule de la base vers l'extrémité de la perturbation, ce qui résorbe en partie la protubérance.

Il faut cependant tenir compte de l'effet de la tension de surface. Considérons la protubérance précédente. Pour simplifier, on suppose cette fois que la vitesse de l'interface air/huile est nulle (Fig.1.4b). Côté air, la pression est constante et égale à la pression d'injection P_0 . Côté huile, la pression dépend localement du rayon de courbure de l'inter-

face ρ à travers la loi de Laplace: $P = P_0 - \gamma/\rho$. La déformation de l'interface crée un gradient de pression dans l'huile. En réponse à ce gradient de pression, le fluide s'écoule de la base vers l'extrémité de la perturbation. Cet écoulement a pour effet de résorber la protubérance. Cet effet est d'autant plus important que la perturbation est pointue. La tension de surface s'oppose donc à la croissance des petites perturbations.

En pratique, la compétition entre ces deux effets antagonistes (contraste de viscosité et tension de surface) conduit, comme dans beaucoup d'autres instabilités, à la sélection d'une longueur de déstabilisation préférentielle.

La première analyse de stabilité linéaire d'un front plan dans une cellule de Hele-Shaw rectangulaire horizontale est due à Chuoke *et al.* [16] (1959). La technique consiste à déformer l'interface initialement plane par une perturbation sinusoïdale (Fig. 1.5). L'équation de l'interface est alors de la forme:

$$\zeta = Vt + \epsilon e^{\sigma t} \sin(ky) \quad (1.13)$$

où V est la vitesse de déplacement du front plan, t est le temps, ϵ est l'amplitude (infinitésimale) de la perturbation, $l = 2\pi/k$ sa longueur d'onde et σ son taux de croissance. Si σ est négatif, la perturbation est atténuée au cours du temps et l'écoulement reste stable. Au contraire si σ est positif, la perturbation est amplifiée et l'interface se déstabilise.

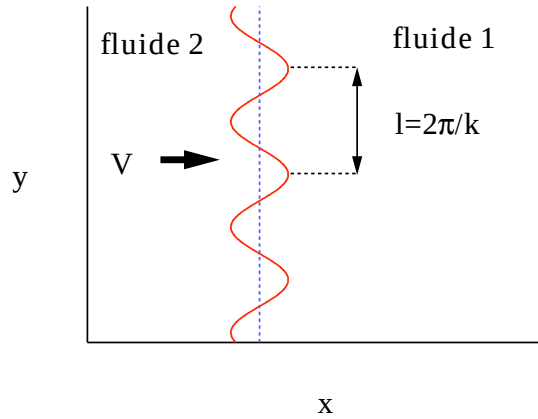


FIG. 1.5 – Principe de l'analyse de stabilité linéaire: l'interface initialement plane (traits pointillés) est déformée par une perturbation sinusoïdale (trait plein) de longueur d'onde $l = 2\pi/k$ et d'amplitude infinitésimale ϵ (le schéma ne respecte pas l'échelle).

La résolution des équations du mouvement (loi de Darcy dans chaque fluide et conditions aux limites à l'interface) dans le cas général où les deux fluides sont visqueux conduit à la relation de dispersion:

$$\sigma = \frac{k}{\eta_1 + \eta_2} \left[V(\eta_1 - \eta_2) - \frac{\gamma b^2}{12} k^2 \right] \quad (1.14)$$

où η_1 est la viscosité du fluide déplacé et η_2 celle du fluide injecté. La figure 1.6 représente le taux de croissance σ en fonction du nombre d'onde de la perturbation k dans les deux cas possibles.

Si le fluide injecté est le plus visqueux ($\eta_1 - \eta_2 < 0$), le taux de croissance est négatif quelle que soit la valeur de k (Fig. 1.6a). L'interface est donc stable.

Au contraire, si le fluide injecté est le moins visqueux ($\eta_1 - \eta_2 > 0$), le taux de croissance de la bande de vecteurs d'onde compris entre 0 et $k_0 = \sqrt{12(\eta_1 - \eta_2)Ub/\gamma}$ est positif avec un maximum en $k_c = k_0/\sqrt{3}$ (Fig. 1.6b). L'écoulement est donc instable.

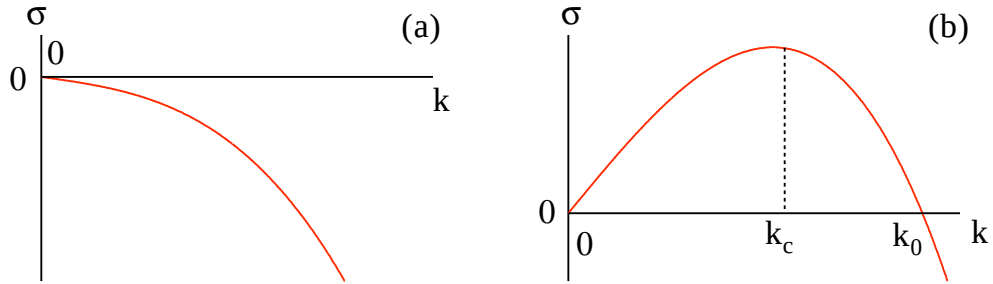


FIG. 1.6 – Taux de croissance σ d'une perturbation en fonction du nombre d'onde k . (a) le fluide déplacé est moins visqueux que le fluide injecté ($\eta_1 - \eta_2 < 0$), (b) le fluide déplacé est plus visqueux que le fluide injecté ($\eta_1 - \eta_2 > 0$).

Ce résultat confirme l'analyse qualitative précédente. Le mécanisme de base de l'instabilité (contraste de viscosité) favorise la croissance des petites longueurs d'onde c'est à dire des grands nombres d'onde (terme linéaire en k). Au contraire, la tension de surface s'oppose à la croissance des petites longueurs d'onde (terme d'ordre 3 en k). La compétition entre ces deux effets antagonistes conduit à la sélection d'un mode de déstabilisation préférentiel correspondant au taux de croissance maximum et dont la longueur d'onde est:

$$l_c = \frac{2\pi}{k_c} = \pi b \sqrt{\frac{\gamma}{V(\eta_1 - \eta_2)}} \quad (1.15)$$

l_c est appelée "longueur capillaire dynamique". Dans la suite de ce mémoire, nous l'appellerons simplement longueur capillaire. Dans le cas fréquemment rencontré expérimentalement où la viscosité du fluide injecté est négligeable (le fluide injecté est un gaz), l'expression de la longueur capillaire se simplifie:

$$l_c = \pi b \sqrt{\frac{\gamma}{V\eta_1}} \quad (1.16)$$

Cette longueur définit l'échelle de déstabilisation naturelle du problème. En l'absence de forçage particulier, les doigts qui se forment à l'interface au tout début de l'instabilité

ont une taille de l'ordre de l_c (Fig. 1.7a,b,c). Aux échelles de longueur inférieures à l_c , les effets de tension de surface l'emportent sur les effets visqueux. Au contraire, aux échelles de taille supérieures à l_c , l'écoulement est dominé par les effets visqueux.

La relation de dispersion (1.14) n'a pas été vérifiée expérimentalement car il est difficile de forcer un mode particulier de l'instabilité de Saffman-Taylor, comme on peut le faire pour d'autres instabilités hydrodynamiques. Les études expérimentales se sont donc contentées de mesurer la taille caractéristique des doigts au tout début de leur croissance. Ces mesures confirment la prédiction sur le mode de déstabilisation préférentielle [24, 48, 83].

En ce qui concerne le taux de croissance, l'accord entre la théorie et les expériences n'est qu'approximatif [24, 48]. En 1986, Schwartz a montré [69] que l'accord théorie/expérience est amélioré à condition de tenir compte dans l'analyse de stabilité linéaire de la correction au saut de pression (1.12) introduite par le film de mouillage.

Notons au passage que Chuoke *et al.* [16] ont également étudié le cas où la cellule est verticale. La prise en compte de la différence de densité entre les deux fluides conduit alors à la relation de dispersion:

$$\sigma = \frac{k}{\eta_1 + \eta_2} \left[V(\eta_1 - \eta_2) - \frac{\Delta \rho g b^2}{12} \right] - \frac{\gamma b^2}{12} k^3 \quad (1.17)$$

où $\Delta \rho = \rho_{bas} - \rho_{haut}$ est la différence de densité entre le fluide du "bas" et le fluide du "haut". La situation est alors beaucoup plus complexe: quatre cas sont à considérer suivant que les différences de viscosité et de densité sont stabilisantes et/ou déstabilisantes. Dans le cas où la différence de densité est stabilisante (fluide le plus dense sous le moins dense) et la différence de viscosité déstabilisante (fluide déplacé le plus visqueux), la compétition entre ces deux effets antagonistes conduit à l'existence d'une vitesse critique V_c :

$$V_c = \frac{b^2 \Delta \rho g}{12 (\eta_1 - \eta_2)} \quad (1.18)$$

L'écoulement est instable si la vitesse de l'interface V est supérieure à V_c .

1.2.2 Évolution non-linéaire: le doigt de Saffman-Taylor

A. Evolution de l'interface aux temps courts

L'analyse de stabilité linéaire permet de prédire la taille caractéristique l_c des "bosses" qui déforment l'interface au tout début de l'instabilité (Fig. 1.7a). Mais elle ne décrit pas l'évolution ultérieure de l'interface. Expérimentalement, on constate que les bosses les plus grandes inhibent la croissance de leurs voisines (Fig. 1.7b et c).

Cette compétition, qui se poursuit jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule bosse, s'explique qualitativement de la façon suivante. A un instant donné, la détermination du champ de pression dépend des conditions aux limites et donc de la forme de l'interface

air/huile. Le déplacement de l'interface, parce qu'il change les conditions aux limites, modifie le champ de pression et donc en retour la vitesse de l'interface. Cette rétroaction est à l'origine de la compétition des "bosses" et des motifs d'instabilité observés.

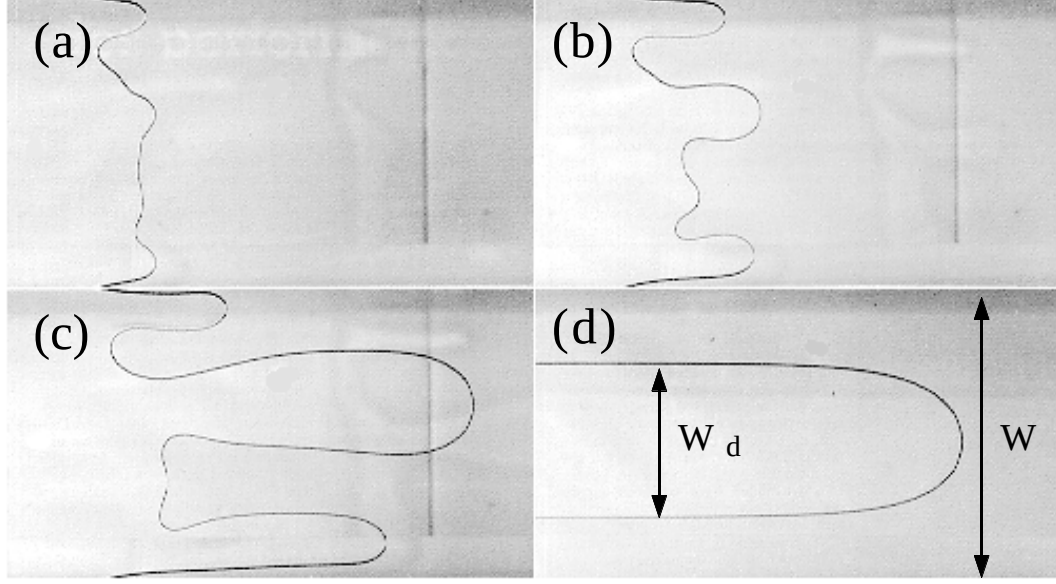


FIG. 1.7 – Évolution de l'interface air/huile en cellule de Hele-Shaw. Au premier stade de l'instabilité (a), des bosses de taille caractéristique l_c déforment l'interface. Rapidement la compétition entre ces "bosses" (b) et (c) conduit à la sélection d'un seul doigt, caractérisé par sa largeur relative λ (d).

B. Définition du paramètre de contrôle B

Les expériences et les simulations numériques montrent que l'évolution ultérieure de l'interface dépend du paramètre B défini par [21, 45, 56]:

$$B = \frac{\gamma}{12(\eta_1 - \eta_2)V} \left(\frac{b}{W} \right)^2 \approx 8,45 \cdot 10^{-3} \left(\frac{l_c}{W} \right)^2 \quad (1.19)$$

où W est la largeur du canal. Notons que ce paramètre mesure l'écart entre la petite échelle de longueur du problème l_c (la longueur de déstabilisation naturelle) et la grande échelle de longueur W (imposée par la cellule de Hele-Shaw). Il décrit donc l'importance du confinement subi par l'interface. On observe expérimentalement deux types de comportement de l'interface en fonction de l'importance du confinement.

C. Evolution de l'interface fortement confinée: le doigt de Saffman-Taylor

Si le confinement est fort, c'est à dire si B est grand, (typiquement pour $B > 1,4 \cdot 10^{-4}$), l'instabilité conduit à la formation d'une interface stationnaire et invariante par translation, qui a la forme d'un "doigt" centré sur l'axe du canal, se déplaçant à vitesse constante

et dont la largeur et la forme sont bien définies: le "doigt de Saffman-Taylor " (Fig. 1.7 d).

Le doigt de Saffman-Taylor est caractérisé par sa largeur relative λ , définie comme le rapport entre la largeur du doigt W_d et la largeur du canal W : $\lambda = W_d/W$ (Fig. 1.7 d). Lorsque B diminue (c'est à dire lorsque la vitesse du doigt augmente), λ diminue très rapidement jusqu'à tendre vers la valeur limite $\lambda = 0,5$ [67] (Fig.1.8).

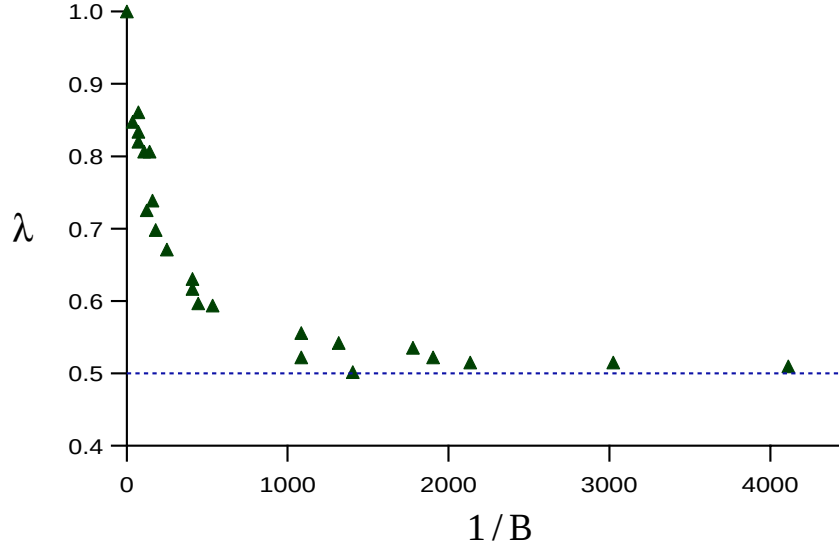


FIG. 1.8 – Largeur relative λ du doigt de Saffman-Taylor en fonction de $1/B$. Lorsque $1/B$ augmente (i.e. B diminue), λ tend rapidement vers la valeur asymptotique 0,5. (D'après les mesures de Saffman et Taylor [67]).

Forme du doigt de Saffman-Taylor. En utilisant une transformation conforme, Saffman et Taylor [67] ont calculé la forme possible du doigt en l'absence de tension de surface. Cela revient à négliger le saut de pression due à la courbure de l'interface dans le plan de la cellule (plan xoy) par rapport aux pertes de charge d'origine visqueuse. Ce faisant, ils trouvent une famille de solutions analytiques paramétrisées par λ ($0 \leq \lambda \leq 1$):

$$x = \frac{1 - \lambda}{\pi} \ln \left[\cos \left(\frac{\pi y}{\lambda} \right) \right] \quad (1.20)$$

où x et y sont les coordonnées des points de l'interface normalisées par la largeur de la cellule et exprimées dans le référentiel de l'extrémité du doigt. Les formes de quelques solutions sont représentées sur la figure 1.9a. Pour les doigts de largeur proche de 0,5, l'accord est très bon. Pour les doigts plus larges, correspondant à des vitesses plus faibles (B plus grand), la tension de surface ne peut plus être négligée et l'équation (1.20) n'est plus vérifiée. Notons que Pitts [60] a proposé une nouvelle expression de la forme du doigt qui rend compte de cet effet, mais dépend elle aussi d'un paramètre ajustable.

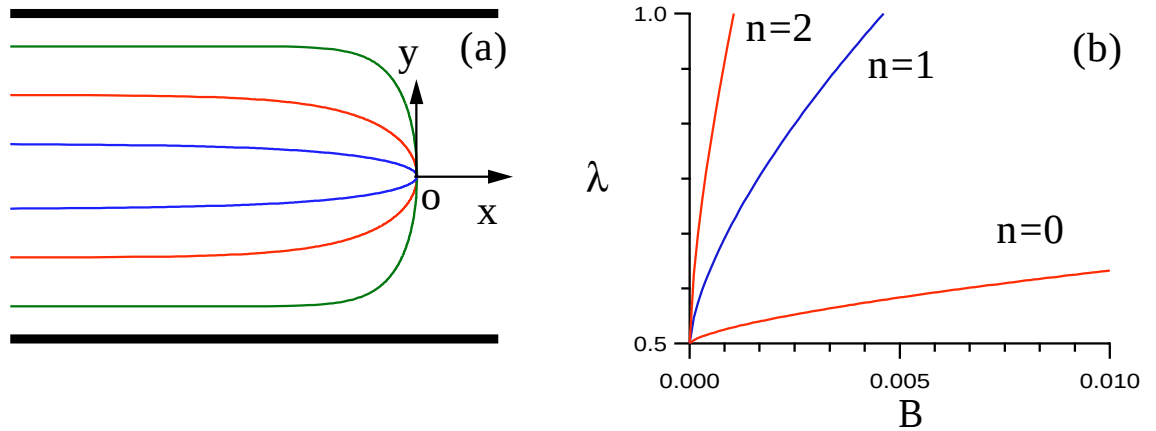


FIG. 1.9 – (a) Interface calculée par Saffman et Taylor pour $\lambda = 0,4$, $\lambda = 0,6$ et $\lambda = 0,8$. (b) Branches $\lambda_n(B)$ pour $n = 0,1$ et 2 .

Sélection de la largeur du doigt de Saffman-Taylor. Bien que l'équation (1.20) prédise correctement la forme des doigts pour $\lambda = 0,5$, elle n'explique pas pourquoi cette valeur en particulier est sélectionnée. De plus, Saffman et Taylor ont également montré que la forme de l'interface donnée par (1.20) est linéairement instable pour toute valeur de B , ce qui ne correspond pas aux observations expérimentales [67]. Les études de la sélection et de la stabilité du doigt de Saffman-Taylor prenant en compte la tension de surface ont d'abord été numériques [44, 81]. Ce n'est qu'en 1986 que trois équipes: Combescot *et al.* [18, 19], Hong et Longer [30] et Shraiman [70] publient simultanément dans la même revue une démonstration analytique de la sélection de la largeur du doigt de Saffman-Taylor. Leurs travaux montrent que la prise en compte de la tension de surface impose une condition de solvabilité supplémentaire. Bien que faible, le terme dû à la tension de surface ne peut pas être traité comme une simple perturbation. En effet, il introduit des termes à tous les ordres de développement dans les équations integro-différentielles qui décrivent l'interface (on parle de terme transcendantal). Lorsqu'il est pris en compte, ce dernier provoque l'apparition d'une discontinuité non physique au bout du doigt. Seules les solutions qui ne présentent pas cette discontinuité sont conservées. Pour une valeur de B donnée, un sous ensemble discret de solutions parmi le continuum proposé par Saffman et Taylor vérifie cette condition. Quelques unes de ces solutions sont représentées sur la figure 1.9b. Leur largeur $\lambda_n(B)$ tendent toutes vers la valeur 0,5 lorsque b se rapproche de 0. L'étude de la stabilité des différentes branches $\lambda_i(B)$ a montré que la plus étroite ($n = 0$) est linéairement stable pour toutes les valeurs de B tandis que les autres branches sont toutes instables [12]. C'est cette branche qui est observée expérimentalement.

Notons que dans la limites des faibles valeurs de B , les effets 3D liés à l'existence du film de mouillage sont susceptibles de modifier la largeur du doigt de Saffman-Taylor [75].

Avant de clore cette section, on se doit de mentionner que les résultats concernant le

rôle de la tension de surface dans la sélection de la largeur du doigt de Saffman-Taylor ont été récemment remis en question par Mineev-Weinstein [46] qui trouve un doigt de largeur $\lambda = 0,5$ sans avoir recours à la tension de surface. Cependant, ce résultat est contesté [68] et fait actuellement l'objet d'une controverse.

D. Evolution de l'interface faiblement confinée

Lorsque le confinement est faible, c'est à dire lorsque B est petit, (typiquement pour $B < 1,4 \cdot 10^{-4}$ d'après [75]), le doigt de Saffman-Taylor se déstabilise. Dans la limite des très faibles valeurs de B , la forme de l'interface devient très complexe. Nous reviendrons sur ce régime de croissance particulier à la fin de ce chapitre.

1.2.3 Stabilité du doigt de Saffman-Taylor

Contrairement à la théorie qui prévoit que le doigt de Saffman-Taylor sélectionné (correspondant à la branche $n = 0$) reste linéairement stable pour toutes les valeurs de B , on observe expérimentalement qu'il se déstabilise lorsque B devient suffisamment petit [50, 75]. L'extrémité du doigt se scinde alors en deux branches, séparées par une zone de fluide au repos appelée "fjord" (Fig.1.10). En anglais, cette instabilité est appelée "tip-splitting". Nous l'appellerons "division" ou "instabilité de division" dans la suite de ce mémoire.

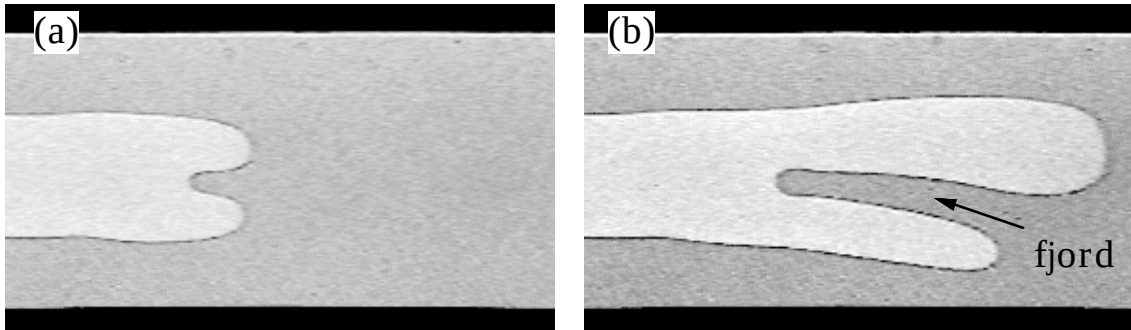


FIG. 1.10 – *Instabilité de division (ou "tip-splitting")*: (a) le doigt de Saffman-Taylor se déstabilise en se scindant en deux branches séparées par un fjord. (b) Après un moment, une des deux branches secondaires est rejetée sur le côté et arrête de croître.

La plupart des études expérimentales ou numériques se sont centrées sur la mesure du seuil de cette instabilité. Toutes observent de fortes variations du seuil avec le niveau de bruit dans la cellule, de sorte que la valeur du seuil fluctue énormément d'une expérience à l'autre [23, 50, 75]. Park et Homsy [50] trouvent un seuil $B_c \approx 1,7 \cdot 10^{-3}$. Tabeling *et al.* [75], en réduisant le bruit dans leurs expériences, abaissent le seuil jusqu'à $B_c \approx 1,4 \cdot 10^{-4}$, ce qui correspond à $W \approx 8l_c$.

La variation du seuil avec le niveau de bruit peut se comprendre de la façon suivante: lorsqu'une perturbation apparaît sur le doigt de Saffman-Taylor, elle est advectée vers l'arrière du front. Cette advection a été observée expérimentalement par Tabeling *et al.* [75] et Rabaud *et al.* [62] et numériquement par DeGregoria et Schwartz [23]. L'effet de l'advection est doublement stabilisant. D'une part, elle déplace la perturbation vers des zones où la vitesse normale et donc le taux de croissance sont plus faibles (dans le cas limite où une perturbation est rejetée sur le côté, sa vitesse s'annule et elle cesse de grandir). D'autre part, l'advection élargit la perturbation par un effet cinématique d'étirement, ce qui contribue également à diminuer son taux de croissance. Pour que le doigt se déstabilise, il faut donc que le temps nécessaire pour expulser la perturbation soit supérieure au temps nécessaire pour la croissance de celle-ci. Dans cette compétition, la taille initiale de la perturbation est un paramètre important. Ce mécanisme, qui explique l'exceptionnelle stabilité des fronts courbes comparé aux fronts plans dans le problème de Saffman-Taylor, est totalement identique à celui proposé par Zel'dovich *et al.* [89] pour décrire la stabilité des fronts de flammes. En 1986 Bensimon [12] a montré que l'amplitude de la perturbation nécessaire pour déstabiliser le doigt décroît exponentiellement avec $1/B$, démontrant ainsi la nature sous critique de la bifurcation en $B = 0^2$.

Peu d'études se sont intéressées à l'évolution ultérieure de cette instabilité. Leur conclusions restent très qualitatives. Expérimentalement, on constate l'existence d'une compétition entre les deux branches issues de la division. Après un moment, la plus petite des deux (la branche secondaire) est écrantée par l'autre et rejetée sur le côté. Elle arrête alors de croître [50, 75] (Fig.1.10). Parallèlement, la branche survivante s'élargit et subit une nouvelle division. Ce phénomène se poursuit tout au long de l'expérience. Kopf-Sill *et al.* [35] ont constaté que les branches secondaires survivent d'autant plus longtemps qu'elles apparaissent initialement près du centre de la cellule. A mesure qu'on s'éloigne du seuil (B diminue), les branches secondaires sont elles-mêmes susceptibles de se déstabiliser avant d'être écrantées et la forme de l'interface finale devient très complexe.

1.3 Le problème de Saffman-Taylor en géométrie radiale

1.3.1 Cellule circulaire

Dans une cellule circulaire (géométrie radiale), l'injection peut se faire du centre vers les bords (cas divergent) ou des bords vers le centre (cas convergent). Dans ce mémoire, nous nous intéresserons uniquement au cas divergent. Par rapport à la géométrie linéaire,

2. Notons que le problème de l'influence de l'amplitude de la perturbation se pose aussi dans l'étude de la stabilité des dendrites. Ce problème est actuellement étudié par l'équipe de Pocheau à Marseille.

la différence essentielle est que la grande échelle du problème (l'analogie de la largeur de la cellule rectangulaire) est alors donnée par la taille caractéristique du motif d'instabilité. Au cours de la croissance, la grande échelle augmente continûment de sorte que l'on atteint jamais un régime stationnaire. Au contraire, l'interface devient de plus en plus complexe.

L'analyse de stabilité linéaire en cellule circulaire montre qualitativement [7, 53, 88] peu de changements par rapport au front plan. Au tout début de l'injection, l'interface est circulaire. Lorsque le périmètre de ce cercle est suffisamment grand, l'interface se déstabilise spontanément. Des creux, régulièrement espacés d'une distance de l'ordre de la longueur capillaire l_c , apparaissent sur l'interface (Fig.1.11 a). Au niveau de ces creux, la vitesse de l'interface s'annule de sorte que plusieurs doigts (typiquement 5 ou 6) se forment (Fig.1.11 b).

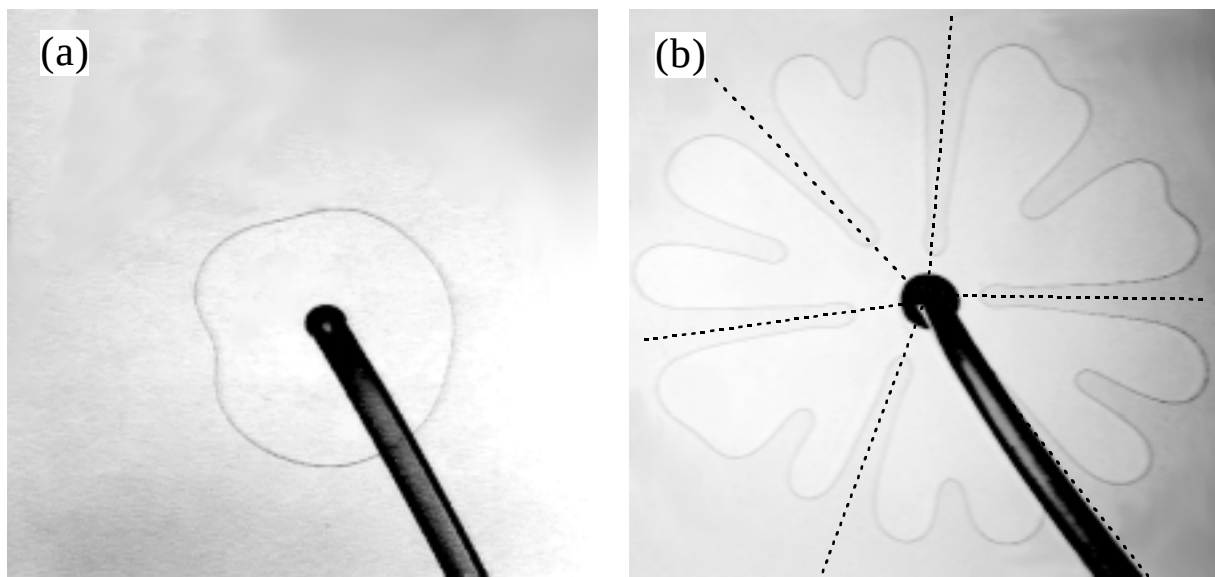


FIG. 1.11 – *Croissance en cellule circulaire. (a) au début de la croissance, des creux se forment sur l'interface initialement circulaire (b) Des pétales apparaissent et évoluent dans des secteurs virtuels dont les bords sont représentés en traits pointillés.*

Thomé *et al.* [79] ont montré expérimentalement que la croissance des doigts issus de la première déstabilisation se produit comme si chaque doigt évoluait dans une cellule virtuelle en forme de secteur angulaire. Les murs de ce secteur correspondent aux axes centraux des fjords séparant les doigts. Ils sont représentés en pointillé sur la figure 1.11b. La forme et les règles de sélection de chacun de ces doigts peuvent donc être prédites à partir des résultats obtenus dans des cellules en forme de secteur angulaire. Ces résultats seront exposés dans la section suivante.

Durant la suite de la croissance, les déstabilisations successives des doigts forment un motif ramifié très complexe. Cependant, même lorsque la croissance conduit à un objet fractal, la brisure de symétrie initiale persiste et est responsable de la formation de grandes "branches" indépendantes, comme sur la figure 1.14a.

1.3.2 Secteur angulaire

En secteur angulaire, l'injection se fait entre deux murs latéraux formant un angle θ_0 . Par analogie avec la géométrie linéaire, le paramètre de contrôle est défini en remplaçant dans la définition (1.19) du paramètre B la largeur de la cellule linéaire W par la largeur locale du secteur angulaire $R\theta_0$:

$$B = 8,45 \cdot 10^{-3} \left(\frac{l_c}{R\theta_0} \right)^2 \quad (1.21)$$

où R est la longueur du doigt c'est-à-dire la distance de l'extrémité du doigt au sommet du secteur (Fig.1.12a). La largeur relative du doigt est alors définie localement par:

$$\lambda = \frac{\theta}{\theta_0} \quad (1.22)$$

où θ est la largeur angulaire du doigt.

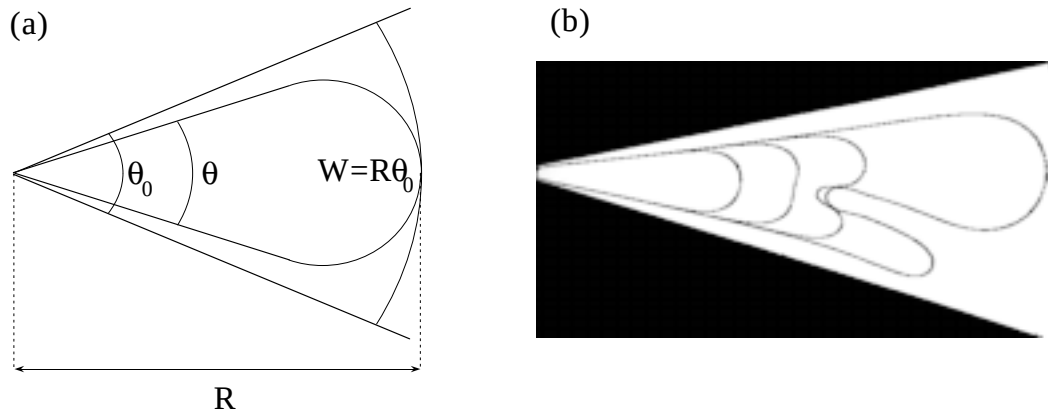


FIG. 1.12 – (a) Schéma d'un doigt de Saffman-Taylor stable en secteur angulaire. (b) Evolution expérimentale de l'interface air/huile dans une cellule d'angle $\theta = 30^\circ$ à quatre instants successifs.

Pour des valeurs de B modérées, on observe expérimentalement un seul doigt caractérisé par sa largeur angulaire λ [79]. La largeur relative λ ne dépend que de B et de l'angle du secteur θ_0 . Pour des secteurs divergents, la largeur des doigts est plus grande qu'en canal linéaire $\lambda > 0,5$ et tend vers $\lambda = 0,5$ lorsque θ_0 tend vers 0. Le mécanisme de sélection des doigts en secteur angulaire est donc en continuité avec celui à l'oeuvre en canal linéaire [79].

La forme de ces doigts stables a été calculée analytiquement par Ben Amar [8] en l'absence de tension de surface. Comme en canal linéaire, on trouve une famille de solution

paramétrisée par leur largeur λ . Le problème de la sélection de la largeur des doigts a été abordé numériquement et analytiquement [9, 10, 17]. De manière analogue au cas linéaire, la tension de surface a pour effet de sélectionner un sous ensemble discret $\lambda_n(B)$ au sein de la famille continue. La stabilité de ces différentes branches n'a pas été étudiée de manière théorique. Cependant, la comparaison avec les expériences de Thomé *et al.* [79] confirme les calculs théoriques et montre que le doigt observé expérimentalement correspond, comme en canal linéaire, à la branche de largeur la plus faible. Quelques unes de ces branches sont représentées sur la figure 1.13. A angle θ_0 fixé, il existe une valeur critique $B_{th}(\theta_0)$ de B pour laquelle les branches $n = 0$ et $n = 1$ coalescent. Pour $B < B_{th}(\theta_0)$, il n'existe plus de solution.

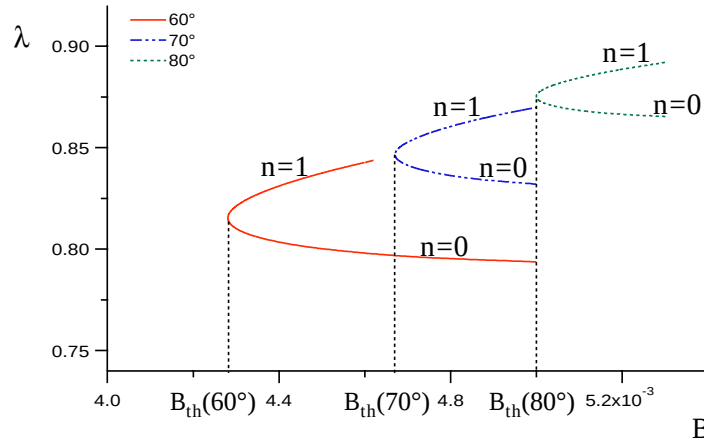


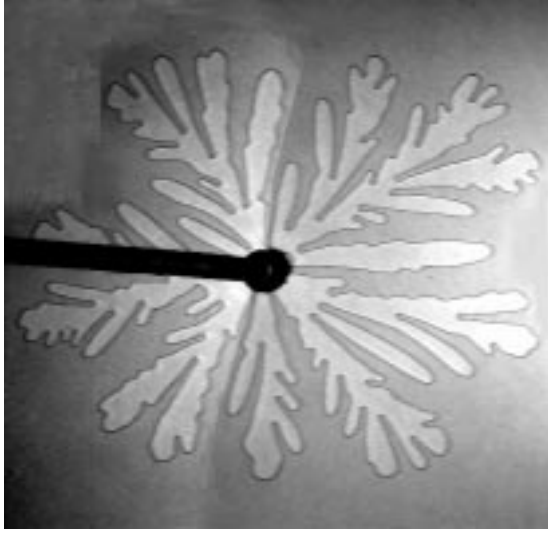
FIG. 1.13 – Branches $\lambda_n(B)$ pour $n = 0$ et $n = 1$ en secteurs angulaires d'angle $\theta_0 = 60, 70$ et 80° . A angle θ_0 fixé, les deux branches $n = 0$ et $n = 1$ coalescent en $B = B_{th}(\theta_0)$. Pour $B < B_{th}(\theta_0)$, il n'existe plus de solution.

Si B était maintenu constant durant l'expérience (i.e. si la vitesse diminuait en $1/R^2$), la croissance du doigt serait autosimilaire. Cependant dans la plupart des situations expérimentales, la vitesse de l'interface est constante. R augmente donc continûment au cours de la croissance d'un doigt de sorte que B diminue [79]. Expérimentalement, on constate qu'en-dessous d'une valeur B_c de B dépendant de l'angle de la cellule, le doigt se déstabilise. La figure 1.12b représente l'évolution au cours du temps d'un doigt en secteur angulaire ($\theta_0 = 30^\circ$). Au fur et à mesure que le doigt avance dans la cellule, B diminue. Lorsqu'il atteint la valeur $B_c(\theta_0)$, il se déstabilise en se scindant en deux branches. Comme en canal linéaire, il s'agit d'une instabilité de division.

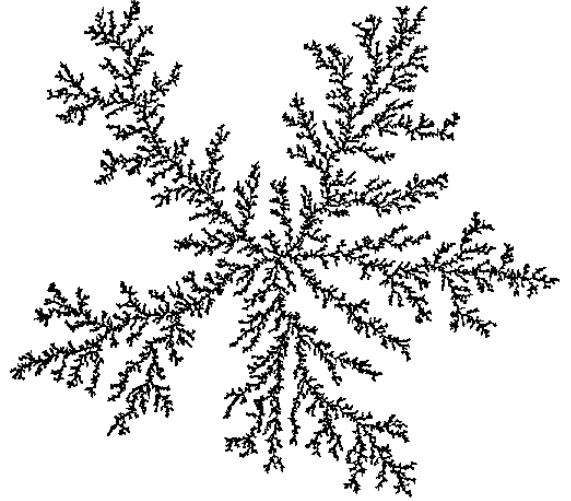
La théorie permet d'interpréter cette observation expérimentale. Au fur et à mesure que le doigt avance dans la cellule, B diminue. Lorsqu'il atteint la valeur $B_{th}(\theta_0)$, il n'existe plus de solution stable et le doigt se déstabilise. Ce comportement correspond qualitativement aux observations expérimentales. Cependant la vérification systématique de l'accord quantitatif entre les prédictions théoriques et les mesures expérimentales du

seuil de stabilité des doigts en secteurs angulaires n'a pas été faite. Cette étude représente une partie du travail présenté dans ce mémoire.

1.4 Le problème de Saffman-Taylor dans la limite des régimes développés



(a)



(b)

FIG. 1.14 – Motifs fractals obtenus en (a) *digitation visqueuse* (b) *agrégation limitée par la diffusion*.

Dans la limite des très faibles confinements (faibles B), les deux échelles de longueur du problème l_c et W (W caractérisant la taille de la cellule) sont très éloignées l'une de l'autre. L'interface est alors très instable et les déstabilisations successives forment un motif ramifié très complexe (Fig.1.14a). Les propriétés statistiques de ce motif ont été abondamment étudiées tant expérimentalement que théoriquement. Ben Jacob *et al.* [11] ont conclu à la formation d'un motif dense, remplissant complètement l'espace aux temps longs et auquel ils donnent le nom de "dense branching morphology". Au contraire, Rauseo *et al.* [64], Couder *et al.* [20] et May et Maher [43] ont observé expérimentalement la formation d'un motif fractal entre les deux échelles de longueur l_c et W .

Comme la plupart des fluides ont des tensions de surface comparables, un faible niveau de confinement implique de travailler avec des cellules de très faible épaisseur, un grand rapport de viscosité entre les deux fluides et de grandes vitesses du front. Dans tous les cas de figure, les pressions appliquées sont donc très fortes et des précautions particulières

doivent être prises pour éviter des problèmes de flexion des plaques. Si les conditions expérimentales ne sont pas parfaites (flexion des plaques, problème de mouillage, ...), le motif transite rapidement vers une morphologie du type "dense branching morphology". Couder [20] a montré que des problèmes expérimentaux de ce type pourraient être à l'origine des résultats de Ben Jacob.

En régime fractal, des structures de toutes les tailles sont constamment générées au cours de la croissance. D'un point de vue qualitatif, cela se comprend de la façon suivante. D'une part, l'instabilité de division ("tip-splitting") des doigts génère des structures à petites échelles. D'autre part, la compétition et l'écrantage entre les différentes branches contribuent à générer des structures aux grandes échelles. Toutefois, les détails de ce mécanisme ne sont absolument pas compris.

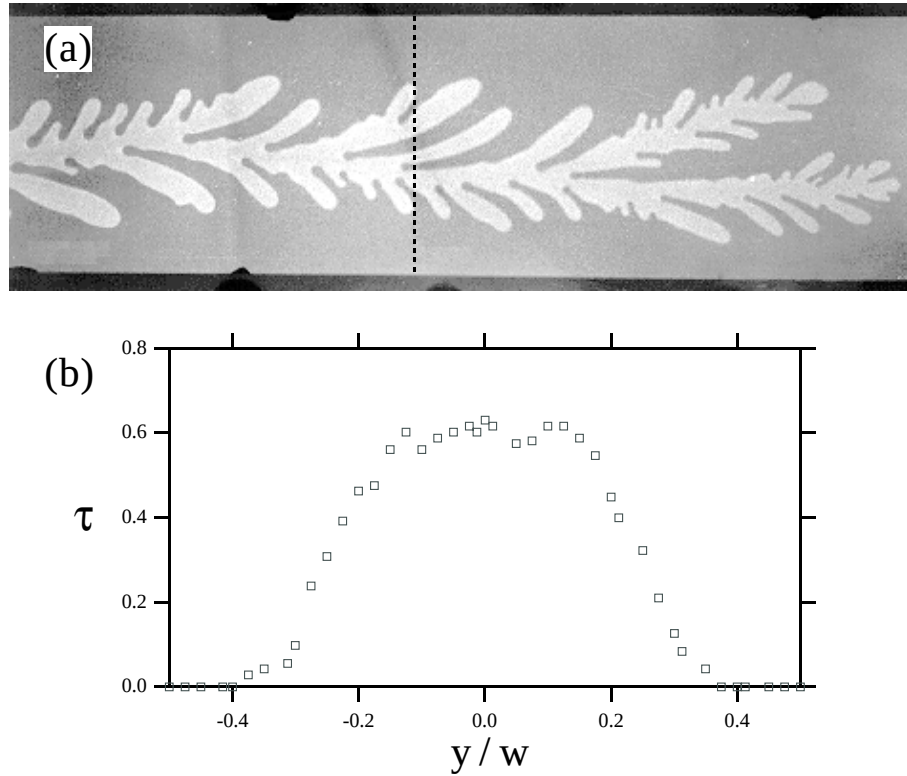


FIG. 1.15 – (a) Interface air/huile en canal linéaire pour un confinement très faible. (b) Histogramme du taux d'occupation de la cellule le long d'une section du canal (trait pointillé sur la figure (a)). Le taux d'occupation a été calculé pour 75 réalisations de doigts instables (d'après les mesures de Arneodo et al. [4]).

Le premier à remarquer l'analogie très forte entre les motifs de digitation visqueuse en régime développé et les agrégats fractals générés par le modèle numérique d'agrégation limité par la diffusion (DLA) fut Paterson [54]. Ce modèle de physique statistique a été introduit par Witten et Sander [85, 86] pour décrire la formation des agrégats colloïdaux. Les règles en sont les suivantes: une particule effectue une marche au hasard sur un réseau

à l'origine duquel se trouve un germe. Si la particule rencontre le germe, elle s'arrête et une seconde particule démarre en périphérie. Cette dernière s'arrête lorsqu'elle rencontre l'agrégat et ainsi de suite. Ce modèle conduit à la formation d'agrégats fractals comme ceux représentés sur les figures 1.14b en géométrie radiale et 1.16a en géométrie linéaire. La dimension fractale de ces agrégats ($d_f = 1,67$ selon [85] et $d_f = 5/3$ selon [47, 80]) est très proche de celles mesurées pour la digitation de Saffman-Taylor: $d_f = 1,79 \pm 0,07$ selon [64] et $d_f = 1,62 \pm 0,02$ selon [20].

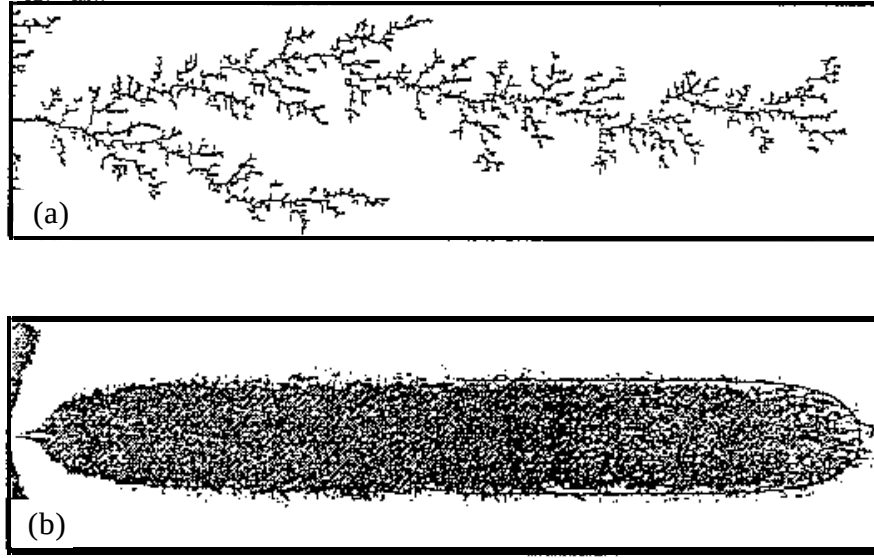


FIG. 1.16 – (a) Motif fractal obtenu par agrégation limitée par la diffusion en canal linéaire (b) Ensemble des sites dont le taux d'occupation est supérieur à la moyenne. Son contour correspond au doigt de Saffman-Taylor stable de largeur $\lambda = 0,5$, tracé en trait continu.

L'analogie digitation visqueuse/DLA est liée au fait que ces deux phénomènes sont décrits par la même loi de croissance laplacienne:

$$\Delta P = 0 \quad (1.23)$$

Dans le cas de la digitation de Saffman-Taylor, P correspond au champ de pression et la tension de surface impose une échelle de coupure l_c en-dessous de laquelle le motif n'est plus fractal. Dans le cas de l'agrégation limitée par la diffusion, P est la probabilité d'occupation d'un site du réseau par une particule et l'échelle de coupure correspond au pas du réseau.

Les résultats les plus spectaculaires sur le régime développé sont ceux obtenus par Arneodo *et al.* [2–4] en canal linéaire. Ces derniers ont réalisé un grand nombre d'expériences de digitation visqueuse à de très faibles valeurs de B , comprises entre 10^{-4} et 10^{-6} . La figure 1.15a représente un motif correspondant à l'une de ces expériences. Puis, choisissant

une section du canal où l'interface n'évolue plus, les auteurs ont construit l'histogramme du taux d'occupation de cette section par le fluide injecté (Fig.1.15b). Le résultat remarquable est que la largeur à mi-hauteur de cet histogramme est identique à celle du doigt de Saffman-Taylor stable: $\lambda = 0,5$.

Cette étude a été complétée par des travaux numériques en DLA [2–4]. Les auteurs ont fait à nouveau des mesures de taux d'occupation moyen en géométrie linéaire mais pour des motifs fractals obtenus en DLA. La figure 1.16a représente une réalisation d'un de ces motifs. Le taux d'occupation de chaque site a été calculé pour 512 réalisations. La figure 1.16b représente la région correspondant à un taux d'occupation supérieur au taux d'occupation moyen. Le résultat remarquable est que sa forme correspond à celle du doigt de Saffman-Taylor stable de largeur $\lambda = 0,5$. Les motifs très instables conservent donc en quelque sorte la mémoire du doigt stable.

Qualitativement, on peut expliquer ce résultat comme une conséquence de la loi de Laplace. En effet, dans un champ laplacien, une perturbation de taille caractéristique l affecte le champ sur une profondeur de l'ordre de l . Les branchements successifs de l'interface affectent donc le champ (de pression ou de probabilité) sur une taille caractéristique de l'ordre de la taille des branches. Mais à grande échelle, suffisamment loin de l'interface, les lignes de champs ne sont pas modifiées et imposent une forme générale qui correspond à la forme du doigt stable.

Notons que Arneodo, Elezgaray et Tallet [5] ont également étudié la croissance d'agrégats DLA en secteurs angulaires. Comme en canal linéaire, la largeur de la région correspondant à un taux d'occupation supérieur au taux d'occupation moyen est identique à la largeur du doigt de Saffman-Taylor stable dans le secteur correspondant. Sa forme est cependant légèrement différente. On observe en effet une baisse du taux d'occupation au voisinage de la bissectrice du secteur qui traduit une tendance à la division des doigts ("tip-splitting") [5].

1.5 Conclusion

Les travaux sur le problème de Saffman-Taylor se sont donc essentiellement concentrés dans deux directions:

1. la compréhension de la forme et des règles de sélection des motifs non linéaires stables, obtenus pour des confinements importants (grandes valeurs de B);
2. l'étude statistique des structures fractales très instables, générées dans la limite des très faibles valeurs de B , correspondant à un faible confinement.

Dans ce dernier cas, des structures de toutes tailles sont constamment générées au cours de la croissance. Deux phénomènes en sont à l'origine. D'une part, l'instabilité de division des doigts génère les structures à petites échelles du fractal. D'autre part, la compétition et

l'écrantage entre les différentes branches contribuent à générer des structures aux grandes échelles.

Ces deux mécanismes, qui jouent un rôle important dans la formation des motifs fractals, sont déjà à l'oeuvre dans les premières déstabilisations du doigt de Saffman-Taylor. Très peu d'études leur ont pourtant été consacrées. Le travail présenté dans la suite de cette première partie du mémoire a pour objet de comprendre le mécanisme de sélection de la taille des branches secondaires issues des premières déstabilisations du doigt.

Les figures de ces branchages sont d'ordinaire aussi parfaites que si elles avaient été dessinées avec soin; avec cette différence que les ramifications les plus déliées échappent à la meilleure vue, et que si on les examine avec une loupe, on en découvrira un grand nombre de plus petites au-delà de celles que l'on pouvait à peine distinguer à la vue simple.

Sur une nouvelle espèce de végétation métallique, C. M. de La Condamine.

Chapitre 2

Etude de la déstabilisation des doigts de Saffman-Taylor

Nous présentons dans ce chapitre une série de travaux expérimentaux consacrés à l'étude de la déstabilisation des doigts de Saffman-Taylor. L'objectif de ce travail est de caractériser la forme et la taille des branches secondaires générées par l'instabilité de division ("tip-splitting") [37].

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Après une description du montage et du protocole expérimental, nous nous intéresserons à la mesure de la valeur du paramètre de contrôle au moment de la déstabilisation du doigt de Saffman-Taylor. Nous présenterons ensuite un modèle susceptible de décrire la forme de l'axe des fjords et nous le comparerons aux observations expérimentales. Nous montrerons enfin dans la dernière partie comment ce modèle peut être utilisé pour estimer qualitativement la fonction de distribution de la taille des branches secondaires.

2.1 Montage et protocole expérimental

2.1.1 Cellule de Hele-Shaw

Nos cellules expérimentales sont composées chacune de deux plaques de verre, séparées par un joint. L'ensemble est maintenu par quatre mâchoires métalliques de manière à appliquer une pression de serrage uniforme. Le joint est constitué par une feuille de Mylar d'épaisseur calibrée. Ce matériau ne s'écrase pas ce qui permet d'obtenir une cellule d'épaisseur b très uniforme. Nos expériences ont été réalisées pour deux épaisseurs différentes: $0,35mm$ et $0,48mm$. L'épaisseur des plaques de verre ($1,2cm$) est assez importante pour éviter la flexion des plaques.

Nous avons utilisé trois cellules expérimentales différentes. La première cellule, destinée aux expériences de croissance radiale, est composée de deux plaques de verre circulaires. Le rayon de la plaque supérieure est égal à $24cm$ tandis que celui de la plaque inférieure

est de 25cm . Les deux plaques sont séparées l'une de l'autre par six disques de Mylar de 1cm de diamètre, disposés à intervalles réguliers le long du périmètre des plaques.

Les deux autres cellules ont été utilisées pour les expériences en secteur angulaire. L'une, destinée aux expériences en angle $\theta_0 < 80^\circ$, est composée de deux plaques de verre en forme de secteur angulaire. Le rayon de la plaque supérieure est égal à 57cm et celui de la plaque inférieure à 62cm . Pour ce montage, les feuilles de Mylar servent de joint et forment également les murs latéraux de la cellule. Elles sont découpées de façon à construire une cellule en forme de secteur angulaire d'ouverture θ_0 (Fig. 2.1). Le rayon de l'arc est imposé par la taille des plaques de verre. Avec les mêmes plaques de verres, on peut réaliser des expériences dans des secteurs d'angles variés en changeant simplement la forme du cache de Mylar.

La dernière paire de plaques, composée de deux demi-cercles, permet de travailler jusqu'à $\theta_0 = 180^\circ$. Le rayon de la plaque supérieure est de 25cm et celui de la plaque inférieure vaut 28cm .

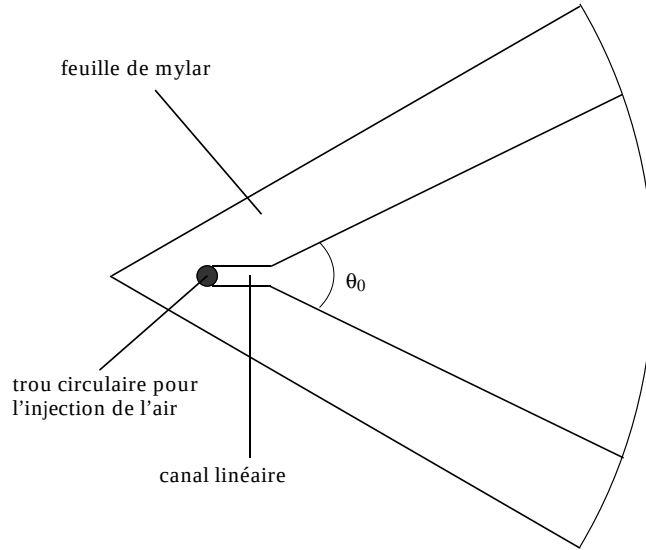


FIG. 2.1 – Schéma d'une cellule de Hele-Shaw en forme de secteur angulaire. La feuille de Mylar sert de joint et forme également les murs latéraux de la cellule. Elle est découpée de façon à construire une cellule en forme de secteur angulaire d'angle θ_0 .

2.1.2 Caractéristiques des fluides utilisés

Toutes nos expériences ont été réalisées en remplaçant de l'huile par de l'air. Nous avons utilisé quatre types d'huiles silicones Rhodorsil: R47V10, R47V20, R47V100 et R47V500.

Leurs caractéristiques sont données dans le tableau 2.1. Les viscosités ont été mesurées avec un rhéomètre à gradient de vitesse imposé¹. En ce qui concerne la tension de surface, nous avons pris les valeurs indiquées par le fabricant.

Huile Rhodorsil	Viscosité dynamique à 20°C ($Pa \cdot s$)	Tension de surface à 25°C ($N \cdot m^{-1}$)
R47 V 10	$(8,7 \pm 0,1) 10^{-3}$	$(20,1 \pm 0,1) 10^{-1}$
R47 V 20	$(19,9 \pm 0,1) 10^{-3}$	$(20,6 \pm 0,1) 10^{-1}$
R47 V 100	$(106,2 \pm 0,5) 10^{-3}$	$(20,9 \pm 0,1) 10^{-1}$
R47 V 500	$(496,0 \pm 1,0) 10^{-3}$	$(21,1 \pm 0,1) 10^{-1}$

TAB. 2.1 – Viscosité dynamique, η , et tension de surface, γ , des huiles Rhodorsil.

2.1.3 Conditions d’injection et protocole expérimental

Nous avons vu au chapitre précédent (section 1.3.2) que les études théoriques de la croissance des doigts de Saffman-Taylor en secteur angulaire ont été réalisées en supposant que le paramètre de contrôle B reste constant durant la croissance. Cette condition implique que la vitesse de l’extrémité du doigt diminue proportionnellement à $1/R^2$, R étant la longueur du doigt, i.e. la distance du sommet du doigt au centre du secteur (cf. chapitre 1, figure 1.12a). Expérimentalement, cette condition est cependant assez difficile à réaliser. On a alors le choix entre injecter l’air à pression constante ou bien à débit constant. Nous avons choisi d’injecter l’air à pression constante. Nous avons observé expérimentalement que, dans ce cas, le doigt de Saffman-Taylor ralentit légèrement au début de la croissance et accélère en approchant de la fin de la cellule. Mais, dans la majeure partie de la cellule, la vitesse du doigt et par conséquent la longueur capillaire, peuvent être considérées comme constantes. Comme la largeur locale de la cellule augmente au cours de la croissance du doigt, le paramètre B décroît de manière continue.

L’air est injecté dans la cellule par un trou percé dans la plaque supérieure. Il traverse ensuite un petit canal linéaire (8mm de large sur 3cm de long) destiné à stabiliser le doigt avant son entrée dans le secteur (Fig.2.1).

La pression d’injection est contrôlée par un système de vases communicants (Fig.2.2). Le premier vase, rempli d’huile en contact avec l’air extérieur à la pression atmosphérique P_{atm} , est relié par un tuyau à un second vase. Ce dernier est en contact avec l’air injecté dans la cellule. Pour éviter toute contamination, l’huile utilisée pour imposer la pression d’injection est identique à celle utilisée dans l’expérience.

Si l’on néglige la viscosité de l’air, la pression côté air est constante et égale à la pression d’injection P_0 . Cette dernière est contrôlée par la différence de hauteur h entre les niveaux

1. Contraves, low shear 30. Le gradient de vitesse imposé varie de 10^{-3} à 118 s^{-1} .

d'huile dans les deux vases: $P_0 = P_{atm} + \rho gh$ où ρ est la densité de l'huile et g la gravité. Le diamètre des vases est assez grand pour que la variation de h , et par conséquent celle de P_0 , soient négligeables à l'échelle d'une expérience. Ce système permet de monter jusqu'à des surpressions de l'ordre de $P_0 - P_{atm} \approx 0,1 \text{Atm}$ pour $h \approx 1 \text{m}$. Quelques expériences consacrées à l'étude des régimes développés (i.e. très instables), pour lesquels de fortes pressions d'injection sont nécessaires, ont été réalisées en injectant de l'azote sous pression. La pression d'injection est alors contrôlée par un manomètre.

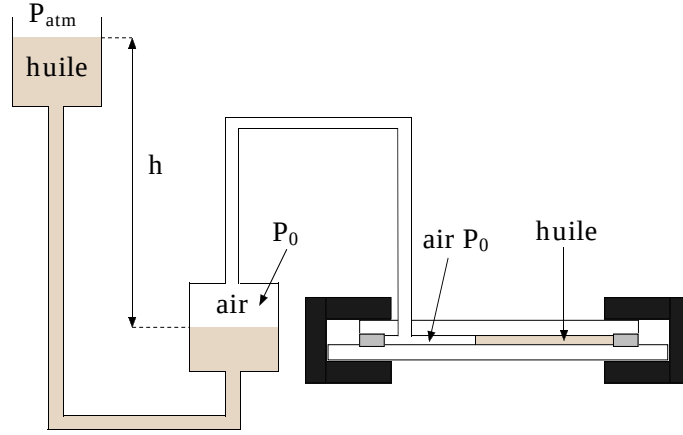


FIG. 2.2 – *Système d'injection d'air dans la cellule: la pression d'injection P_0 est imposée par la différence de hauteur h entre les niveaux d'huile dans les deux vases.*

Le protocole expérimental est le suivant. La cellule est d'abord saturée en huile, injectée par le même orifice que l'air. Cette opération permet de vérifier la qualité des plaques et l'homogénéité de l'épaisseur. La présence éventuelle de poussières, de rayures ou d'inhomogénéités de l'épaisseur se traduit par une déformation locale du front d'huile (dans ce cas, il faut refaire le montage expérimental). Lorsque la cellule est remplie d'huile, l'air est injecté à la pression choisie. Un doigt d'air se forme dans le canal linéaire et pénètre dans le secteur angulaire. Pendant la croissance du doigt, l'huile chassée de la cellule est récupérée dans un réservoir au niveau de la plaque inférieure. La pression de l'huile au niveau de la sortie de la cellule est donc constamment égale à la pression atmosphérique. En fin d'expérience, l'huile est réaspirée dans la cellule au moyen d'une poire et on peut recommencer une nouvelle manipulation.

2.1.4 Acquisition des données

Les expériences ont été filmées avec une caméra CCD. Les images, enregistrées sur des bandes vidéo, ont été digitalisées en utilisant une carte d'acquisition Scion, connectée à un ordinateur (Macintosh Power G3). Ce système nous permet d'acquérir jusqu'à 25 images par seconde, codées en noir et blanc sur 256 niveaux de gris.

Pour éviter des reflets et assurer un éclairage le plus uniforme possible, la cellule est

éclairée de manière indirecte par un écran blanc, placé sous la cellule et qui réfléchit la lumière issue d'un projecteur.

Pour renforcer le contraste optique entre les fluides et pour éviter des reflets sur le ménisque à l'interface air/huile, nous avons coloré les huiles Silicones avec du Bleu Vif Organol². Ce colorant bleu se présente sous forme de poudre à dissoudre dans l'huile. Le protocole de coloration est le suivant: on dissout, à température ambiante, du Bleu Vif Organol dans l'huile Rhodorsil jusqu'à saturation (précipitation et sédimentation du colorant). Le mélange est ensuite filtré de façon à éliminer les agrégats de colorant non dissous. De cette façon, la concentration en colorant est proche de sa valeur de saturation et le contraste est maximum. Nous avons vérifié que l'ajout de colorant ne modifie pas la viscosité des huiles et qu'il n'y a pas précipitation de colorant en cours d'expérience.

Les images digitalisées ont été utilisées pour mesurer la vitesse et la largeur des doigts, ce qui permet de calculer à un instant donné le paramètre B et la largeur relative λ . Les images digitalisées ont également servi à étudier la forme des doigts et notamment à comparer la forme des fjords aux prédictions du modèle que nous présentons dans ce chapitre.

2.2 Seuil de déstabilisation des doigts de Saffman-Taylor en secteur angulaire

2.2.1 Mesure du seuil de déstabilisation des doigts de Saffman-Taylor

Dans nos expériences en secteur angulaire, B diminue à mesure que le doigt de Saffman-Taylor avance. Lorsque B devient inférieur à une valeur critique B_c , l'interface se déstabilise par division. On observe alors près de l'extrémité du doigt la formation d'une zone où la courbure de l'interface s'inverse. Au niveau de ce "creux", la vitesse de l'interface s'annule de sorte que le doigt initial se scinde en deux branches (Fig.2.3 et Fig.2.4).

Nous avons réalisé une première série d'expériences destinée à mesurer la valeur expérimentales B_{exp} de B au moment de la déstabilisation du doigt de Saffman-Taylor dans plusieurs cellules d'angles différents. Comme il est assez difficile de repérer avec précision le déclenchement de l'instabilité (c'est-à-dire le moment exact à partir duquel l'extrémité du doigt commence à s'aplatir), nous avons adopté le critère suivant. On repère sur l'enregistrement vidéo d'une expérience donnée le moment où la courbure de l'interface s'annule au voisinage de l'extrémité du doigt. On distingue alors un méplat au niveau de l'extrémité du doigt. Ce critère est arbitraire mais assure une bonne reproductibilité des mesures d'une expérience à l'autre. La largeur locale de la cellule au seuil est évaluée par

2. Bleu Vif Organol J.N., C-I-61520, commercialisé par Prolabo.

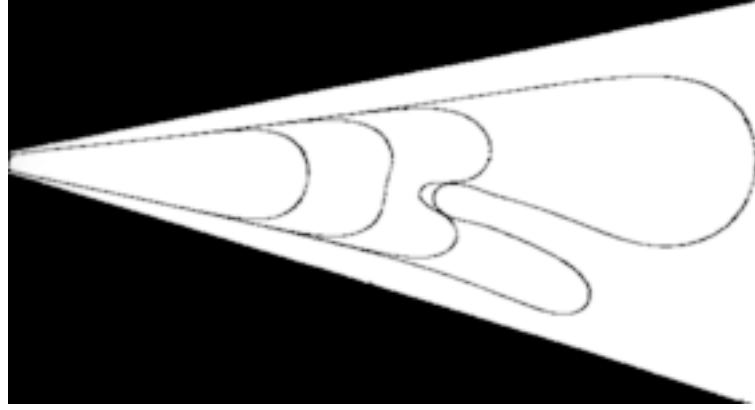


FIG. 2.3 – *Evolution de l'interface air/huile dans un secteur d'angle 30° . L'instabilité ne réussit pas à créer deux structures de grande taille: une des deux branches arrête de croître et meurt. La division est "imparfaite".*

$W = R\theta_0$ où R est la longueur du doigt au moment de la déstabilisation. Pour éviter un biais provoqué par le ralentissement de l'interface au voisinage du creux, la vitesse V de l'extrémité du doigt est mesurée juste avant la formation de ce dernier. Celle-ci permet de déterminer la longueur capillaire l_c :

$$l_c = \pi b \sqrt{\frac{\gamma}{V\eta}} \quad (2.1)$$

où b est l'épaisseur de la cellule et η et γ sont respectivement la viscosité et la tension de surface de l'huile Rhodorsil. B_{exp} est ensuite calculé à partir des valeurs de l_c et W :

$$B_{exp} \approx 8,45 \cdot 10^{-3} \left(\frac{l_c}{W} \right)^2 \quad (2.2)$$

Pour chaque secteur angulaire, nous avons réalisés entre 20 et 40 mesures du seuil en variant la pression d'injection et donc la vitesse de l'interface. $B_{exp}(\theta_0)$ est estimé par la moyenne de ces mesures tandis que leur dispersion permet de calculer la barre d'erreur.

Les mesures expérimentales sont comparées aux prédictions théoriques de Ben Amar [8] sur la figure 2.5a. L'accord entre les deux est relativement satisfaisant. Notons cependant que la théorie prévoit le moment exact de déstabilisation. Expérimentalement, il faut, au contraire, attendre que l'amplitude de la perturbation soit assez grande pour pouvoir la déceler. Cet effet explique très certainement le décalage systématique vers le bas des valeurs expérimentales B_{exp} par rapport aux valeurs théoriques.

Notons également que nous avons négligé l'effet du film de mouillage dans le calcul de la longueur capillaire (cf. chapitre 1, section 1.1.3, équation (1.12)). La prise en compte de cet effet augmente la longueur capillaire d'environ 10% et réduit quelque peu le décalage entre les valeurs expérimentales et théoriques.

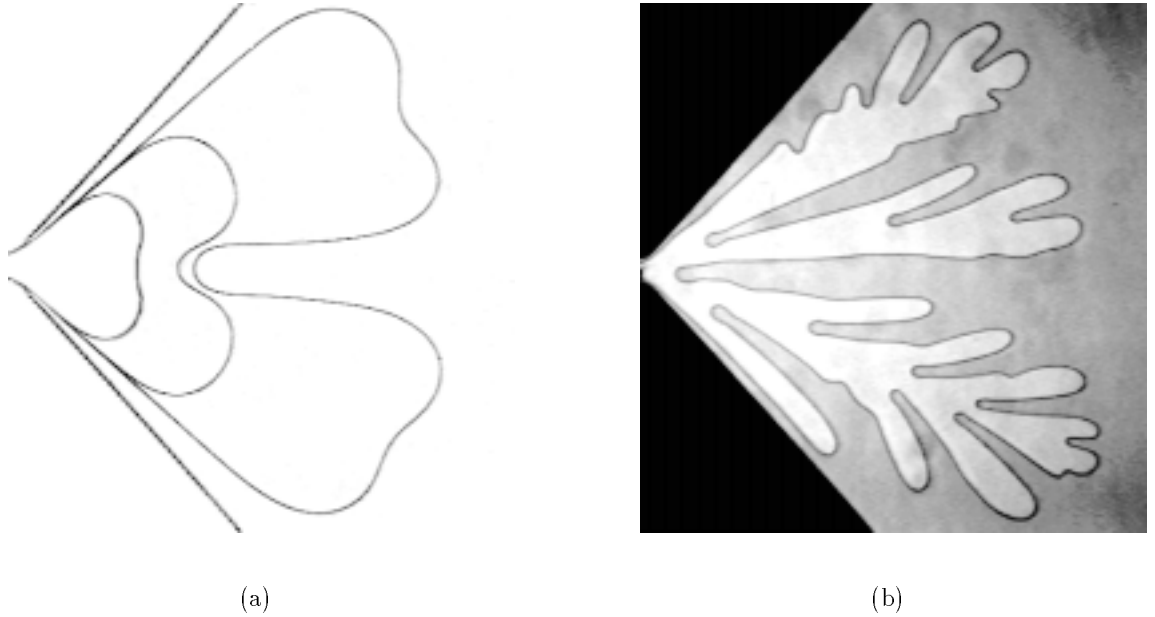


FIG. 2.4 – (a) *Evolution de l'interface air/huile dans un secteur d'angle 100°* (b) *Le même motif observé à temps long: les deux branches continuent à croître indépendamment et forment deux structures de grande taille. La division est "parfaite".*

La figure 2.5a montre que B_c augmente avec l'angle de la cellule. Les doigts sont donc de plus en plus instables lorsque θ_0 augmente.

Nous avons également mesuré la largeur relative du doigt λ au moment de la déstabilisation. Conformément aux observations de Thomé *et al.* [79], les résultats correspondent aux prédictions théoriques (Fig.2.5b). En secteur divergent, les doigts sont plus larges qu'en canal linéaire et leur largeur augmente avec l'angle du secteur.

Notons que les calculs théoriques, effectués à B constant, concernent des doigts dont la vitesse décroît en R^{-2} . Or dans nos expériences, la vitesse du doigt est constante et B décroît constamment. Thomé *et al.* [79] ont cependant observé expérimentalement que le doigt de Saffman-Taylor s'adapte de manière quasi-statique à la valeur du paramètre B . Ce résultat autorise la comparaison de nos expériences avec les calculs théoriques.

2.2.2 Introduction d'un nouveau paramètre de contrôle

Le paramètre B utilisé traditionnellement dans la description des doigts de Saffman-Taylor ne donne pas une vision très intuitive de la situation expérimentale pour deux raisons:

- il compare le carré de la longueur capillaire au carré de la largeur de la cellule;
- Il est précédé d'un préfacteur très petit.

Au cours de sa croissance, le doigt s'élargit et son extrémité ressemble de plus en plus à un front plan. On s'attend donc intuitivement à ce que le doigt se déstabilise comme un front

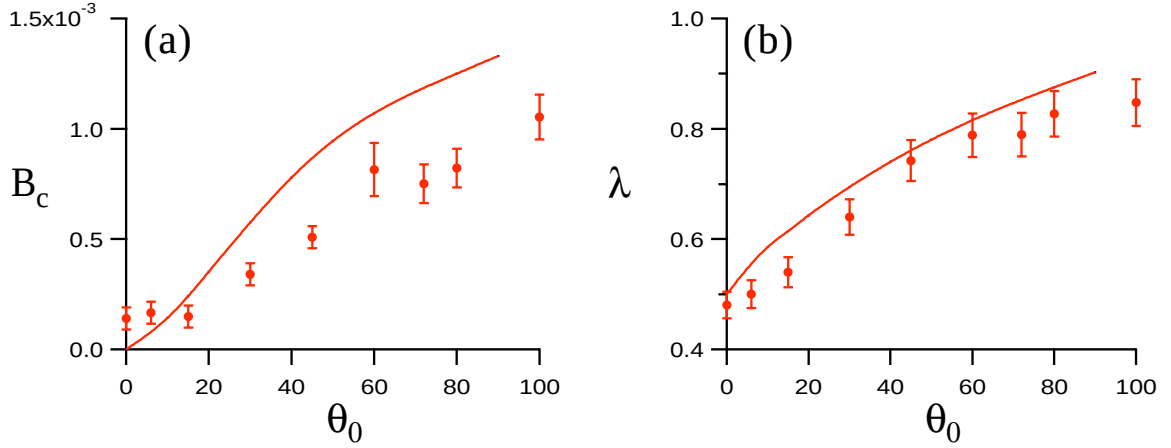


FIG. 2.5 – (a) Seuil B_c de déstabilisation du doigt en fonction de l'angle du secteur θ_0 . (b) Largeur relative du doigt λ au seuil de déstabilisation en fonction de l'angle du secteur θ_0 . Les cercles correspondent aux mesures expérimentales B_{exp} et λ_{exp} et les traits pleins aux prédictions théoriques B_{th} et λ_{th} de Ben Amar [8].

plan, c'est à dire avec une longueur de déstabilisation naturelle de l'ordre de l_c . Si cette hypothèse est vraie, la déstabilisation se produirait dès que la largeur du doigt devient de l'ordre de grandeur de l_c . Pour cette raison, nous avons trouvé utile d'introduire un nouveau paramètre de contrôle ω , défini comme le rapport de la largeur du doigt $W_d = \lambda W$ à la longueur capillaire:

$$\omega = \frac{W_d}{l_c} = \frac{\lambda W}{\pi b} \sqrt{\frac{\eta v}{\gamma}} \approx \lambda \sqrt{\frac{8,45 \cdot 10^{-3}}{B}} \quad (2.3)$$

où W est la largeur locale de la cellule (pour un doigt de longueur R en secteur d'angle θ_0 , $W = R\theta_0$).

A partir des valeurs théoriques λ_{th} et B_{th} en secteur angulaire, nous avons calculé la valeur théorique de ce nouveau paramètre au seuil de stabilité, ω_{th} . La courbe correspondante est représentée en trait plein sur la figure 2.6. ω_{th} diverge en $\theta_0 = 0$. Lorsque l'angle du secteur augmente, ω_{th} décroît rapidement jusqu'à atteindre une valeur limite $\omega_l \approx 2$ autour de $\theta_0 \approx 70^\circ$. La théorie prévoit donc que dans des secteurs d'angle supérieur à 70° , le doigt se déstabilise dès que sa largeur devient de l'ordre de l'ordre de $2l_c$.

Les valeurs expérimentales ω_{exp} du paramètre ω au seuil de stabilité sont également reproduites sur la figure 2.6. Ces valeurs et leurs barres d'erreur ont été mesurées en suivant la démarche adoptée pour la mesure de B_{exp} . Les points correspondant à $\theta_0 = 0^\circ$ et $\theta_0 = 6^\circ$ ont été calculés à partir des mesures expérimentales de Tabeling *et al.* [75] en canal linéaire et Thomé *et al.* [79] en secteur angulaire. Les valeurs expérimentales sont en bon accord avec les prédictions théoriques sauf pour les petits angles, $\theta_0 = 0^\circ$ et $\theta_0 = 6^\circ$.

Ces observations théoriques et expérimentales peuvent s'interpréter de la façon suivante. Nous avons expliqué au chapitre précédent (section 1.2.2, paragraphe D) que la

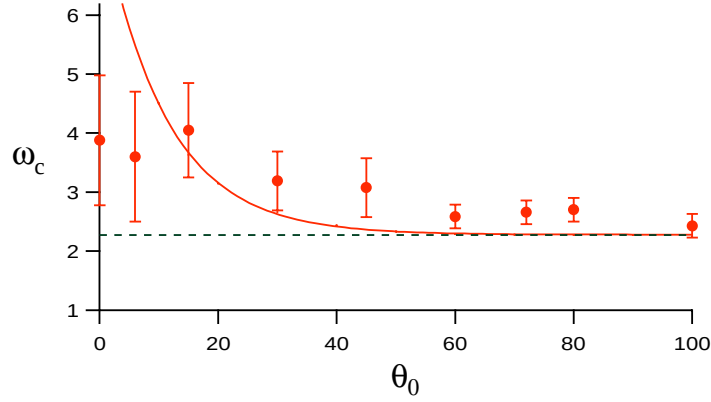


FIG. 2.6 – Largeur du doigt normalisée par la longueur capillaire au seuil de déstabilisation, ω_c . Les cercles correspondent aux mesures expérimentales ω_{exp} et les traits pleins aux valeurs ω_{th} calculées à partir des résultats théoriques de Ben Amar sur λ_{th} et B_{th} .

courbure des doigts joue un rôle stabilisant. Elle favorise, en effet, l'advection des perturbations vers l'arrière du front où la vitesse normale et donc le taux de croissance sont plus faibles (dans le cas limite où une perturbation est rejetée sur le côté, sa vitesse s'annule et elle cesse de grandir). Pour que le doigt se déstabilise, il faut que le temps nécessaire pour expulser une perturbation sur l'interface soit supérieur à son temps caractéristique de croissance. Dans cette compétition, la taille initiale de la perturbation est un paramètre important.

Aux grands angles, la courbure de l'interface au voisinage de l'extrémité du doigt est faible (le doigt est "aplati"). Par conséquent, la vitesse d'advection d'une perturbation vers l'arrière du front est faible. Le doigt se déstabilise donc, aussi petite que soit la taille de la perturbation, et à condition que $\omega > \omega_{th}$. Autrement dit, le doigt est linéairement instable.

Aux faibles angles, la courbure de l'interface au voisinage de l'extrémité du doigt, et par conséquent, la vitesse d'advection vers l'arrière du front sont importantes. Le seuil de stabilité des doigts dépend alors de l'amplitude de la perturbation [12, 23, 50, 75]. Seules les perturbations d'amplitudes suffisamment importantes déstabilisent le doigt. Les seuils théoriques, B_{th} et ω_{th} , ne tiennent pas compte de cet effet et surévaluent donc le seuil de stabilité dans les secteurs d'angles θ_0 faibles. Dans le cas particulier du canal linéaire, le doigt est linéairement stable pour toutes les valeurs de B , ce qui explique la divergence de ω_{th} en $\theta_0 = 0^\circ$.

2.3 Etude de la forme des fjords

2.3.1 Observations expérimentales

Le premier signe visible de déstabilisation d'un doigt est l'apparition d'une zone près de l'extrémité où la courbure de l'interface s'inverse. Au voisinage de ce "creux", la vitesse de l'interface diminue puis s'annule (Fig.2.3 et 2.4a). Ce creux marque le début de la séparation du doigt en deux branches, séparées par une région appelée fjord, dans laquelle l'huile reste bloquée. Bien que l'instabilité commence toujours de la même façon, on observe par la suite deux types de comportements différents aux temps longs:

1. Dans le premier cas, observé pour tous les secteurs d'angle $\theta_0 < 70^\circ$ (incluant le canal linéaire), l'instabilité ne réussit pas à créer deux structures de grande taille. Une des deux branches arrête de croître et meurt (Fig.2.3). Dans la suite, nous appellerons ce processus division "imparfaite". La branche qui meurt sera appelée "branche secondaire", tandis que la branche " survivante " sera appelée "branche principale".
2. Dans le second cas, observé aux grands angles $\theta_0 > 90^\circ$, les deux branches continuent de croître indépendamment et forment deux structures de grande taille (Fig.2.4b). Nous appellerons ce processus division "parfaite".

La transition entre ces deux types de comportement n'est pas brutale. Pour les secteurs d'angles intermédiaires ($70^\circ < \theta_0 < 90^\circ$), nous avons en effet observé les deux types de comportement d'une expérience à l'autre. Il est intéressant de remarquer que cette gamme d'angles correspond à peu près à celle pour laquelle la valeur du paramètre ω au seuil de stabilité atteint sa valeur limite $\omega_l \approx 2$ (Fig. 2.6). Nous proposerons une interprétation possible de cette transition à la fin de ce chapitre.

La possibilité de l'existence d'un angle limite dans les problèmes de croissance laplacienne a déjà donné lieu à plusieurs études notamment en agrégation limitée par la diffusion [2, 34, 61]. Ces études concluent à l'existence d'un angle critique $\theta_c \approx 120 - 140^\circ$. En secteurs d'angle θ_0 supérieur à θ_c , deux branches peuvent coexister et former deux structures de grandes tailles (division parfaite). Au contraire, si $\theta_0 < \theta_c$, une seule branche peut "survivre" à long terme (division imparfaite). Notons que, en géométrie radiale, la déstabilisation (en digitation visqueuse comme en DLA) du front conduit à la formation spontanée de cinq à six branches principales de grandes tailles (on parle de "symétrie à cinq lobes"), ce qui correspond à peu près à un angle de $60 - 72^\circ$ pour chaque branche. Cette observation supporte l'idée selon laquelle l'angle d'un secteur doit être supérieur à $120 - 140^\circ$ pour que deux branches puissent coexister sans que la croissance de l'une se fasse au détriment de l'autre.

Nos observations expérimentales semblent confirmer l'existence d'un angle critique mais sa valeur est à peu près deux fois plus faible que celle prévue par les études théoriques. Toutefois, nos expériences mettent en jeu des longueurs finies. Une division qui semble

parfaite à l'échelle de notre cellule pourrait se terminer par la mort d'une des branches si la cellule était plus grande.

Les tentatives pour quantifier ces observations nous ont amené à étudier la forme des fjords plutôt que celle des branchements secondaires. Dans le cas de la division parfaite observée aux grands angles, on constate expérimentalement que l'axe du fjord est radial et qu'il passe par le sommet du secteur (Fig.2.4). C'est également le cas en cellule circulaire (qui n'est qu'un cas particulier de secteur angulaire, d'angle 360°). Au contraire, dans le cas d'une division imparfaite, l'axe du fjord s'incurve progressivement et s'éloigne de l'axe du secteur jusqu'à ce que la branche secondaire cesse de croître (Fig.2.3).

2.3.2 Modèle phénoménologique

Pour interpréter la forme des fjords, nous avons développé un modèle basé sur les deux hypothèses suivantes:

1. La déstabilisation du doigt de Saffman-Taylor se produit par amplification d'une perturbation qui n'a pas de mouvement propre. Son mouvement est uniquement provoqué par son advection le long de l'interface. Nous avons vu au chapitre précédent que cette hypothèse, introduite par Zel'dovich *et al.* [89] pour expliquer la stabilité des fronts de flammes, a également été utilisée pour étudier la réponse du doigt de Saffman-Taylor à des perturbations d'amplitude finie [56].
2. La formation du creux près de l'extrémité du doigt affecte les isobares sur une distance caractéristique de l'ordre de grandeur de la taille du creux. Nous supposons donc que les isobares plus éloignées ne sont pas modifiées par la perturbation et imposent à l'interface une enveloppe globale dont la forme reste celle du doigt stable.

Compte tenu de ces deux hypothèses, nous supposons que le mouvement de la perturbation est identique à la trajectoire d'une particule fluide localisée sur l'interface du doigt stable. Nous considérerons de plus que la tension de surface est négligeable. L'interface air/huile est alors une isobare et la vitesse d'une particule fluide à l'interface est égale à la vitesse normale au front stable. La trajectoire de cette particule correspond donc simplement à la courbe normale aux fronts stables successifs et se calcule relativement simplement.

A. Calcul de la trajectoire des fjords en géométrie linéaire

Considérons le déplacement en canal linéaire d'un doigt de Saffman-Taylor stable, de largeur relative λ et de vitesse U dans le référentiel du laboratoire (Fig. 2.7). L'axe ox correspond à l'axe de la cellule. L'origine du repère est choisie de sorte que, à l'instant t , les coordonnées du point M situé à l'extrémité du doigt sont $x_M = Ut$ et $y_M = 0$.

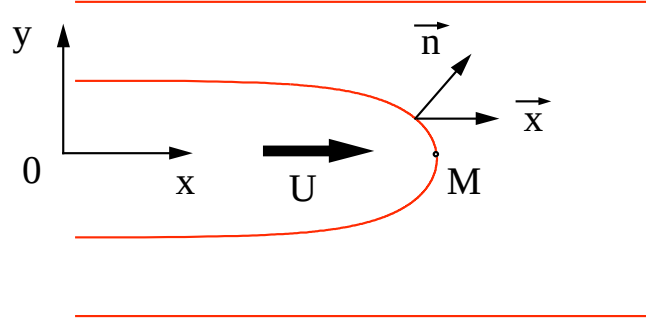


FIG. 2.7 – Schéma du doigt de Saffman-Taylor en canal linéaire.

Le déplacement élémentaire $\vec{dl} = (dx, dy)$ d'une particule fluide localisée à l'interface est colinéaire au vecteur normal à l'interface $\vec{n} = (n_x, n_y)$. Le produit vectoriel $\vec{dl} \times \vec{n}$ est donc nul, ce qui se traduit par la condition:

$$n_x dy - n_y dx = 0 \quad (2.4)$$

d'où:

$$dx = \frac{n_x}{n_y} dy \quad (2.5)$$

En l'absence de tension de surface, la forme du doigt de Saffman-Taylor est donnée, au temps t , par l'équation (cf. chapitre 1, équation (1.20)):

$$x - Ut = f(y) = W \frac{1 - \lambda}{\pi} \ln \left[\cos \left(\frac{\pi y}{\lambda W} \right) \right] \quad (2.6)$$

On en déduit les coordonnées du vecteur normal à l'interface:

$$n_x = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dy} \right)^2}} \quad (2.7)$$

$$n_y = \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dy} \right)^2}} \frac{df}{dy} \quad (2.8)$$

En réinjectant ces expressions dans l'équation (2.5), il vient:

$$dx = \frac{-1}{df/dy} dy = \frac{\lambda}{1 - \lambda} \cotan \left(\frac{\pi y}{\lambda W} \right) dy \quad (2.9)$$

En intégrant (2.9), on obtient l'équation de la trajectoire d'une particule fluide advectée le long de l'interface et dont les coordonnées initiales sont (x_0, y_0) :

$$x - x_0 = \frac{W \lambda^2}{\pi(1 - \lambda)} \ln \left(\frac{\sin(\pi y / \lambda W)}{\sin(\pi y_0 / \lambda W)} \right) \quad (2.10)$$

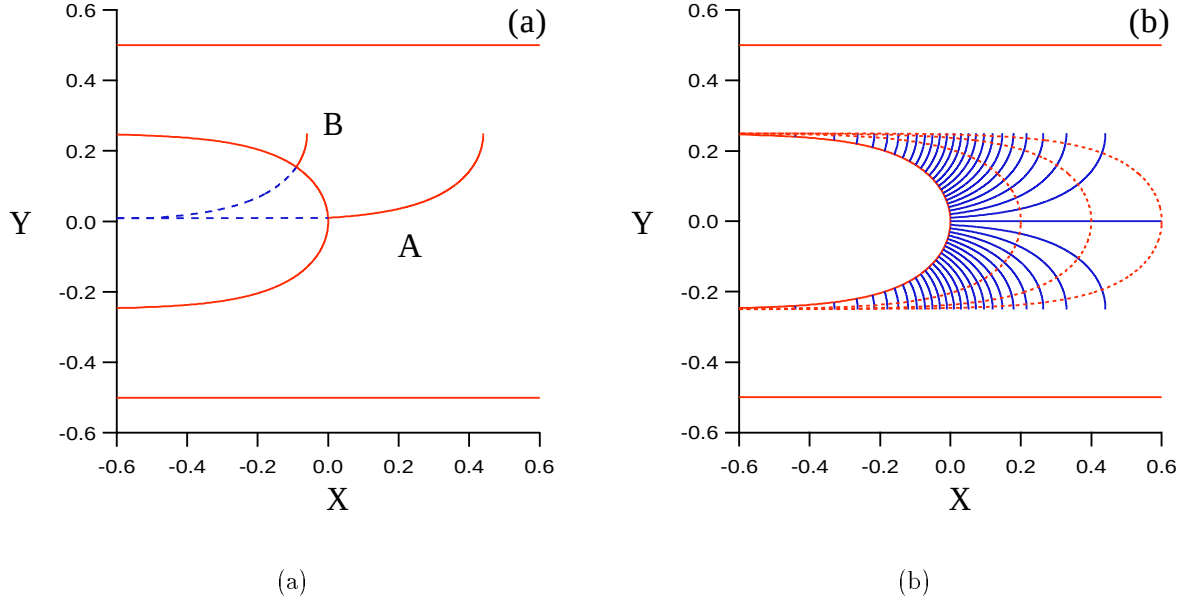


FIG. 2.8 – (a) Trajectoires de fjords pour deux points initiaux différents A et B sur un doigt de largeur $\lambda = 0,5$ en canal linéaire (b) Trajectoires des fjords issus de points régulièrement espacés sur l'interface: l'ensemble de ces courbes (sauf celle issue de l'extrémité) se déduisent les unes des autres par simple translation le long de l'axe (ox).

Les coordonnées (x_0 et y_0) sont liées par l'équation du doigt de Saffman-Taylor (2.6).

Les trajectoires correspondant à deux positions initiales différentes A et B sur un doigt de largeur $\lambda = 0,5$ sont représentées sur la figure 2.8a. Quelle que soit la position initiale de la perturbation, la trajectoire du fjord s'incurve progressivement jusqu'à ce que la particule soit rejetée sur le côté du doigt, ce qui correspond à la condition: $y = \lambda/2 = 0,25$. Sur le côté du doigt, la vitesse d'advection est nulle et le fjord arrête de croître. Lorsque la position initiale de la perturbation, (x_0, y_0), se rapproche de l'extrémité du doigt, le temps nécessaire pour rejeter la perturbation sur le côté augmente. Ainsi, la trajectoire issue du point B est rejetée sur le côté plus rapidement que celle issue du point A . Le fjord issu de A est donc plus long que celui issu de B .

Ce fait est encore plus évident si on trace l'ensemble des trajectoires issues de points régulièrement espacés sur l'interface (Fig. 2.8b). La longueur de ces courbes augmente très rapidement lorsque le point initial se rapproche de l'extrémité du doigt et diverge à cette position: la trajectoire issue de l'extrémité du doigt est une droite parallèle à l'axe (ox) qui part à l'infini (Fig. 2.9).

L'ensemble des trajectoires (sauf celle issue de l'extrémité) se déduisent les unes des autres par simple translation le long de l'axe (ox). Cette propriété est une conséquence de l'invariance par translation le long de l'axe (ox) du doigt de Saffman-Taylor en canal

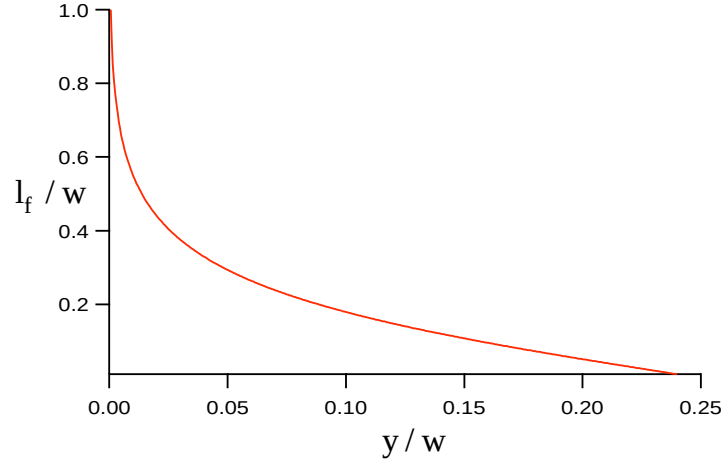


FIG. 2.9 – Longueur du fjord normalisée par la largeur de la cellule, l_f/W , en fonction de l'ordonnée du point de départ normalisée par la largeur de la cellule, y/W .

linéaire. Ces courbes ont d'autre part la même forme que le doigt de Saffman-Taylor lui-même mais translatées de $y = \lambda/2$ le long de l'axe (oy). A notre connaissance, cette propriété du doigt de Saffman-Taylor n'avait jamais été remarquée jusqu'à présent.

B. Calcul de la trajectoire des fjords en secteur angulaire

En secteur angulaire, les doigts de Saffman-Taylor sont autosimilaires. Leur forme sans tension de surface est connue analytiquement [8]. Cependant elle s'écrit en termes de fonctions hypergéométriques, difficiles à manipuler. Pour cette raison, nous avons choisi de calculer numériquement les trajectoires des fjords en secteur angulaire.

Le principe du calcul est le suivant. Pour chaque angle θ_0 , M. Ben Amar nous a fourni le profil numérique du doigt au seuil de déstabilisation. Ce profil est ensuite interpolé par la méthode des splines cubiques de manière à disposer d'un grand nombre N de points (x_i, y_i) sur l'interface. Après avoir choisi une position initiale P de coordonnées (x_p, y_p) parmi ces points, on calcule l'équation de la droite normale à l'interface au point P . On propage ensuite le doigt d'un pas. Grâce à l'autosimilarité, cette étape est simplement réalisée en multipliant le doigt par un facteur $(1 + \epsilon)$. La nouvelle position de la particule est donnée par l'intersection de la normale avec le nouveau profil. En itérant cette procédure, on construit la courbe normale. La résolution du calcul dépend crucialement du nombre de points sur l'interface N et du pas utilisé pour propager le doigt ϵ . Nous avons obtenus de bons résultats avec $N = 50000$ et $\epsilon/R = 0,01$, R étant la longueur du doigt dont sont issues les trajectoires, c'est-à-dire la distance entre l'extrémité du doigt et l'apex de la cellule. Les N points ne sont pas répartis uniformément sur l'interface: leur densité augmente près de l'extrémité du doigt où le rayon de courbure de l'interface varie plus rapidement.

Pour calculer l'équation de la droite normale, il faut évaluer la dérivée $f'_p = dy/dx$ au point P . Nous avons testé deux façons différentes d'évaluer cette quantité. La première méthode consiste à calculer simplement la dérivée discrète au point P :

$$f'_p = \frac{1}{2} \left(\frac{y_{p+1} - y_p}{x_{p+1} - x_p} + \frac{y_p - y_{p-1}}{x_p - x_{p-1}} \right) \quad (2.11)$$

La seconde consiste à approcher l'interface au point P par un polynôme d'ordre 2 au moyen d'une régression linéaire. La dérivée au point P est alors calculée à partir de l'équation du polynôme. Pour les valeurs de ϵ et N utilisées, ces deux méthodes donnent des résultats tout à fait comparables. Par contre, la seconde demande des temps de calcul considérablement plus longs. Nous avons donc utilisé la première.

Comme en canal linéaire, la perturbation s'arrête lorsqu'elle est rejetée sur le côté du doigt où la vitesse d'advection est nulle. En secteur angulaire, cela se produit quand la position angulaire de la perturbation atteint la valeur critique $\phi_c = \lambda\theta_0/2$. Pour éviter des problèmes numériques qui se produisent lorsque la perturbation s'approche de cet angle limite, nous avons choisi d'arrêter la procédure lorsque la position angulaire de la perturbation est égale à $99\%\phi_c$. Cela correspond à une erreur de 1% sur la position angulaire finale du fjord.

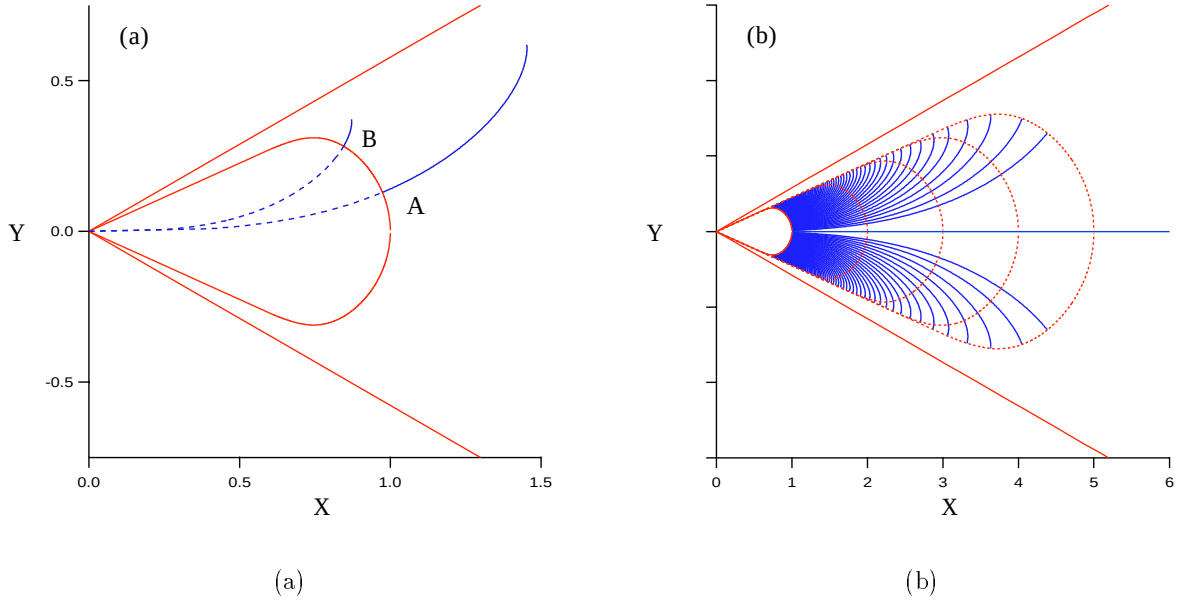


FIG. 2.10 – (a) Trajectoires de fjords pour deux points initiaux différents (A) et (B) sur un doigt de largeur $\lambda = 0,815$ en secteur d'angle $\theta_0 = 60^\circ$; (b) Trajectoires des fjords issues de points régulièrement espacés sur l'interface.

Les trajectoires correspondant à deux positions initiales différentes A et B sur un doigt de largeur $\lambda = 0,815$ en secteur angulaire $\theta_0 = 60^\circ$ sont représentées sur la figure 2.10a. La figure 2.10b représente les trajectoires issues de points régulièrement espacés

le long l'interface. Comme dans le cas du canal linéaire, la longueur des fjords augmente très rapidement lorsque le point initial se rapproche de l'extrémité du doigt et diverge à cette position. La trajectoire issue de l'extrémité du doigt est, comme en canal linéaire, une droite parallèle à l'axe (ox) qui part à l'infini.

L'ensemble des trajectoires se déduisent les unes des autres par simple homothétie de centre o . Cette propriété est une conséquence de l'autosimilarité des doigts de Saffman-Taylor en secteur angulaire.

2.3.3 Comparaison expérience/modèle de la forme des trajectoires des fjords

La comparaison des trajectoires théoriques avec les observations expérimentales s'est faite de la façon suivante. Après avoir repéré sur l'enregistrement vidéo d'une expérience donnée le moment où un creux se forme sur l'interface, l'image correspondante est digitalisée et transmise à l'ordinateur. Nous avons développé un programme permettant de tracer sur l'image digitalisée la trajectoire théorique dont le point de départ correspond au centre du creux sur l'interface expérimentale. La trajectoire ainsi obtenue est comparée avec une image de l'interface à un temps plus long.

Les résultats de ces ajustements sont présentés sur les figures 2.11, 2.12 et 2.13 pour des croissances en secteurs d'angles respectivement égaux à $\theta_0 = 30^\circ$, 60° et 100° . On constate que les trajectoires théoriques donnent une assez bonne description de l'axe central des fjords. Même si l'accord sur la forme de l'axe du fjord n'est pas toujours parfait, le modèle prévoit avec une bonne précision le point d'arrêt du fjord.

Les imperfections de l'ajustement peuvent s'expliquer de trois manières différentes :

- Au cours du temps, la taille des branches secondaires augmente de sorte que les isobares sont déformées sur une taille caractéristique de plus en plus grande. L'hypothèse selon laquelle la perturbation est advectée comme une particule fluide le long du doigt de Saffman-Taylor stable est donc de moins en moins vérifiée avec le temps.
- Nous avons implicitement supposé que la perturbation était ponctuelle. En fait, le creux qui se forme au voisinage de l'extrémité du doigt a une certaine largeur caractéristique, de l'ordre de l_c . La trajectoire de chacun des points du creux est donc différente et le creux subit un effet d'étirement qui déforme le fjord. Notre modèle ne rend pas compte de cet effet.
- Nous avons négligé dans notre modèle l'effet de la tension de surface. Si cette dernière n'est pas négligeable, l'interface n'est pas une isobare. La variation du rayon de courbure crée en effet un gradient de pression dans l'huile le long de l'interface. A cause ce gradient de pression, la vitesse d'une particule à l'interface possède une composante tangentielle dirigée vers l'extrémité du

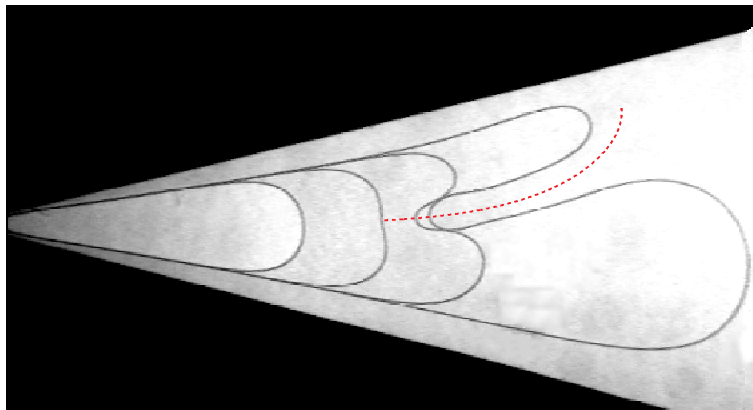


FIG. 2.11 – *Comparaison entre la trajectoire calculée (ligne pointillée) et l'observation expérimentale pour un secteur d'angle $\theta_0 = 30^\circ$.*

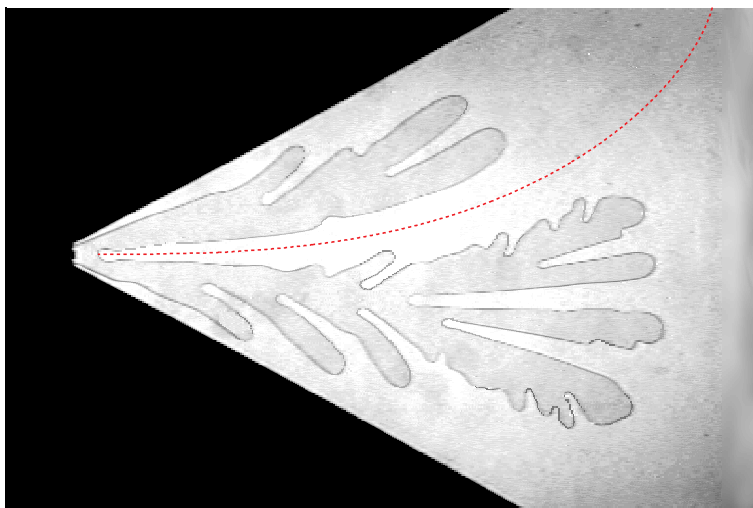


FIG. 2.12 – *Comparaison entre la trajectoire calculée (ligne pointillée) et l'observation expérimentale pour un secteur d'angle $\theta_0 = 60^\circ$.*

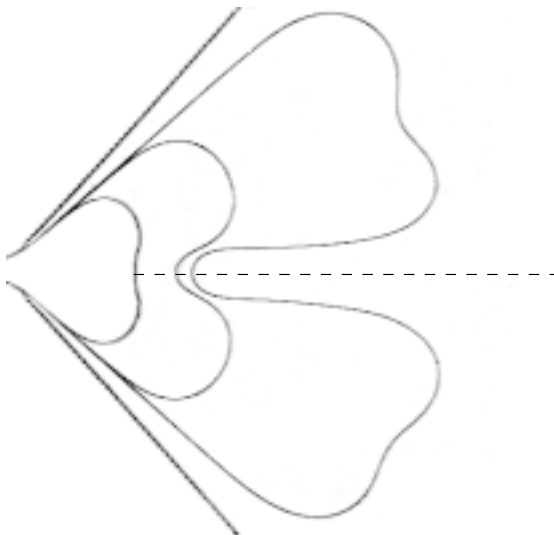


FIG. 2.13 – *Comparaison entre la trajectoire calculée (ligne pointillée) et l'observation expérimentale pour une division "parfaite" en secteur d'angle $\theta_0 = 100^\circ$.*

doigt. Ceci pourrait expliquer le fait que les trajectoires des fjords "réels" soient légèrement moins incurvées que ne le prévoit la théorie. Cet effet, qui est d'autant plus fort que la courbure du doigt est importante, se fait donc surtout sentir dans les secteurs d'angles faibles (Fig. 2.11).

2.4 De la forme des fjords à la forme des branches: généralisation de la notion de cellule virtuelle

Rappelons (cf. chapitre 1, section 1.3.1, figure 1.11) que Thomé *et al.* [79] ont observé expérimentalement que les 5 ou 6 doigts issus de la première déstabilisation d'un front en cellule circulaire évoluent dans des cellules virtuelles dont les parois sont constituées par l'axe central des fjords séparant les doigts. Les axes des fjords se comportent donc comme des murs "virtuels".

Dans cette section, nous généralisons la notion de cellule virtuelle à la description des motifs d'instabilité observés en secteurs angulaires. Bien que l'existence des cellules virtuelles ne soit pas démontrée théoriquement, ces dernières permettent d'interpréter un grand nombre d'observations expérimentales. Nous préciserons au paragraphe 2.4.5 les difficultés théoriques posées par l'utilisation de la notion de cellule virtuelle.

2.4.1 Cellules virtuelles en géométrie circulaire

Pour vérifier de manière quantitative l'existence des cellules virtuelles, nous avons mené une série d'expériences en géométrie circulaire. Le principe de ces expériences est le suivant. Pour chaque expérience de croissance circulaire, nous avons suivi l'évolution des doigts issus de la première déstabilisation. Nous avons repérés les murs de la cellule virtuelle correspondante (cf. chapitre 1, figure 1.11). Puis nous avons mesuré la largeur relative λ et le paramètre ω au seuil de déstabilisation de chaque doigt dans sa cellule virtuelle. Les résultats obtenus en secteurs virtuels sont comparés aux valeurs mesurées dans des secteurs réels sur la figure 2.14.

Les valeurs mesurées en secteurs virtuels et réels sont très proches. Les mécanismes de déstabilisation et de sélection des doigts sont donc sans doute identiques en cellule réelle et virtuelle. La gamme d'angle balayée pour les secteurs virtuels est bien sûr plus restreinte que pour les secteurs réels: le front circulaire donne toujours naissance à 5 ou 6 doigt ce qui correspond en moyenne à des secteurs virtuels de 60 à 80°.

2.4.2 Cellules virtuelles en secteurs angulaires

La déstabilisation des doigts de Saffman-Taylor en secteur angulaire est assez semblable à la déstabilisation d'un front circulaire: un creux se forme près de l'extrémité du

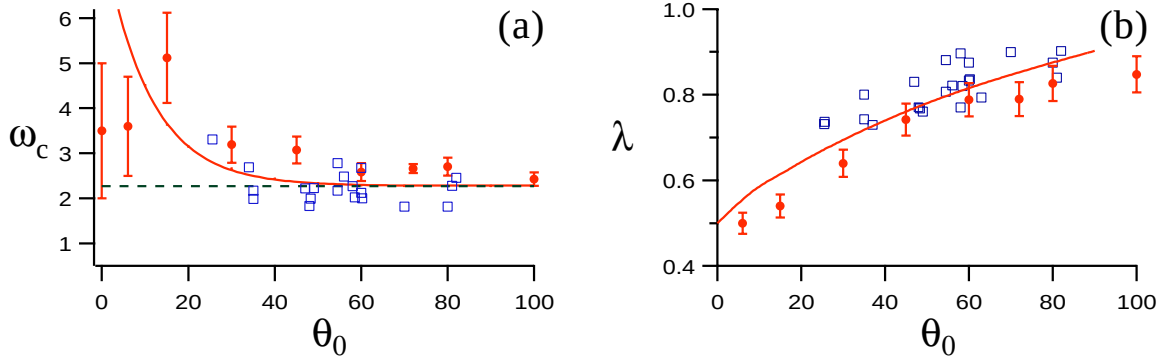


FIG. 2.14 – (a) Valeur du paramètre ω et (b) largeur relative des doigts λ au seuil de déstabilisation. Les ronds correspondent aux valeurs mesurées en secteur réels et les carrés aux valeurs mesurées en cellule virtuelles pour des expériences en géométrie circulaire. Le trait plein correspond aux prédictions théoriques.

doigt et crée un fjord dans lequel le fluide visqueux reste bloqué. Il semble donc naturel de généraliser la notion de mur virtuel en identifiant tout axe de fjord à un mur virtuel. Chaque branche issue d'une instabilité de division croît comme si elle était confinée par un mur réel d'un côté et par le mur virtuel de l'autre. Nous allons voir que la notion de mur virtuel permet d'interpréter les observations expérimentales.

A. Cas d'une division parfaite

Dans le cas des divisions parfaites observées aux grands angles $\theta_0 > 90^\circ$, le mur virtuel est radial et divise en deux la cellule réelle. Chacune des deux branches résultantes continue de croître dans un secteur virtuel divergent d'angle $\theta_0/2$ (Fig. 2.13). Au cours de la croissance, les deux branches s'élargissent et se déstabilisent à leur tour. Même après la déstabilisation des branches secondaires, le mur virtuel garde sa forme et continue d'imposer la brisure de symétrie initiale (Fig. 2.4a et b).

B. Cas d'une division imparfaite

Aux petits angles $\theta_0 < 70^\circ$, la division des doigts est imparfaite: l'axe central du fjord, c'est à dire le mur virtuel, est incurvé (Fig. 2.11 et Fig. 2.12). Chacune des deux branches secondaires croît dans une cellule virtuelle dont l'un des murs est courbé. Ce type de cellule n'a jamais été étudiée et l'évolution d'un doigt ne peut donc pas y être prédite avec précision. Cependant, en secteur angulaire, la croissance est essentiellement sensible à la structure des frontières au voisinage de l'extrémité du doigt. En première approximation, on peut donc remplacer le mur virtuel courbé par une ligne droite tangente à ce dernier dans la région de l'extrémité du doigt.

Avec cette hypothèse, les deux branches issues de la division évoluent à chaque instant

dans des secteurs classiques. Au tout début de l'instabilité, les deux branches secondaires entament une croissance normale. Cependant, le mur virtuel s'incurve progressivement. Ce faisant, la cellule virtuelle la plus large devient de plus en plus divergente, de sorte que la branche principale s'élargit et tend à se déstabiliser à son tour. Au contraire, la cellule virtuelle la moins large devient de plus en plus convergente et se termine en "cul de sac" lorsque l'axe du fjord est rejeté sur le coté (Fig.2.11 et Fig.2.12). De ce fait, la branche secondaire ralentit et cesse finalement de croître lorsqu'elle atteint l'enveloppe de l'interface stable correspondant à la cellule réelle. La "mort" d'une branche secondaire issue d'une division imparfaite coïncide donc avec l'élargissement de la branche principale. Ce phénomène avait été remarqué par Kopf Sill et Homsy [28, 35] qui lui ont donné le nom de "division, écrantage et élargissement" ("splitting, shielding and spreading").

Nous venons de montrer que les branches secondaires arrêtent de croître lorsqu'elles atteignent l'enveloppe de l'interface stable. Cette observation va dans le sens des résultats de Arneodo *et al.* [2–4] exposés dans le premier chapitre. Rappelons que ces auteurs, qui ont mesuré le taux d'occupation des sites de la cellule en digitation visqueuse et en DLA, ont constaté que la forme de la région correspondant à un taux d'occupation supérieur à la moyenne est identique à celle du doigt de Saffman-Taylor stable. Autrement dit, la probabilité que des branches d'un motif très instable sortent de la zone correspondant à la forme du doigt stable est très faible, en accord avec notre modèle. Notons, cependant, que nos résultats ne concernent que la première génération de branchements et ne permettent pas de conclure sur la forme des branches ultérieures.

2.4.3 Généralisation à la description de structures de plus en plus complexes

Il est à présent tentant de généraliser la notion de cellule virtuelle à des motifs d'instabilité plus complexes. La figure 2.15 représente un motif d'instabilité développé obtenu dans un secteur d'angle $\theta_0 = 60^\circ$.

La première déstabilisation du front se produit au point A , dans la cellule réelle formée des murs W_1 et W_2 . C'est une division imparfaite, dont le fjord est convenablement décrit par la ligne théorique W_3 . Cette ligne définit un mur virtuel de sorte que chacune des deux branches issues de la division évolue ensuite dans deux cellules virtuelles dont les murs sont constituées par les parois W_1 et W_3 pour la première et W_2 et W_3 pour la seconde.

Considérons à présent l'évolution de la branche secondaire qui pousse entre W_2 et W_3 . Celle-ci subit une nouvelle division en B . En approchant la cellule virtuelle formée par les murs W_2 et W_3 par un secteur d'angle $\theta_0 = 40^\circ$, la forme de l'axe du fjord correspondant W_4 peut être reproduite en suivant la procédure habituelle. Les deux branches issues de cette nouvelle division en B évoluent de manière très différente. La branche confinée entre les murs W_4 et W_2 meurt car le fjord W_4 s'incurve progressivement vers W_2 . Au contraire,

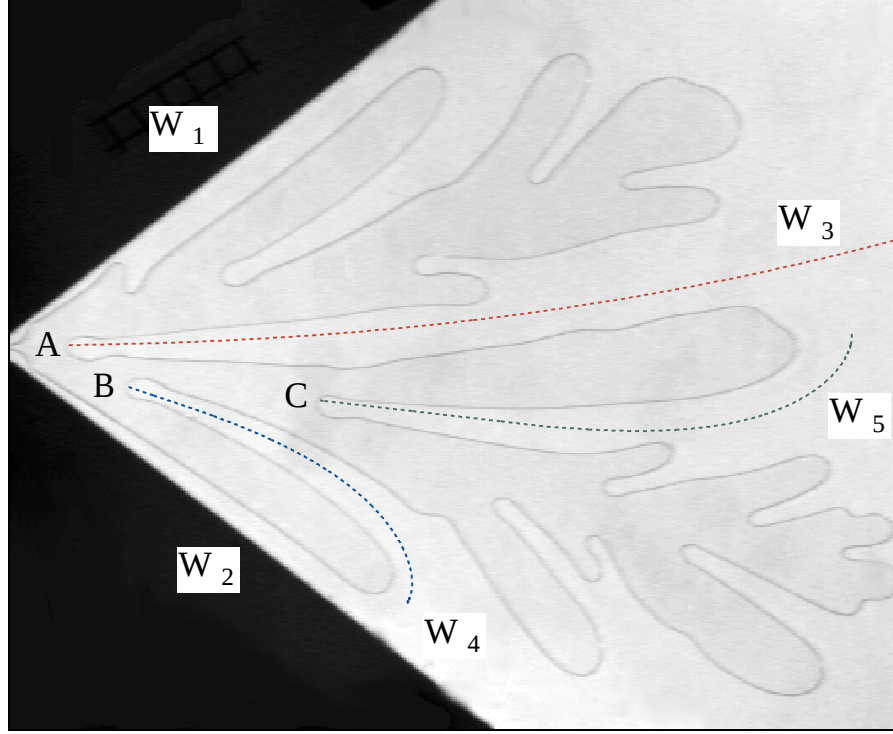


FIG. 2.15 – Motif d’instabilité développé: en approchant les cellules virtuelles par des secteurs angulaires, il est possible de reconstruire les axes de fjords correspondant trois générations successives de branchement.

la branche confinée entre les murs W_4 et W_3 s’élargit et se divise à nouveau en C .

La forme du fjord correspondant à la division en C peut encore être reproduite en assimilant la cellule virtuelle formée des murs W_4 et W_3 à un secteur d’angle $\theta_0 = 30^\circ$.

La notion de cellule virtuelle, appliquée à cet exemple particulier, nous a permis de décrire trois générations de branchements successifs. Cette procédure pourrait être étendue à chaque nouveau branchement. Mais la forme des fjords se complexifie rapidement, de sorte qu’il n’est plus possible de les approcher par des secteurs.

Notons que notre modèle permet de déterminer la taille et la forme d’un fjord à condition de connaître son point de départ sur le doigt stable initial. Le modèle ne donne par contre aucune indication sur la position de ce point de départ. La description des motifs d’instabilité ne peut donc se faire qu’à postériori (le modèle n’est pas prédictif).

2.4.4 Application à l’obtention de motifs d’instabilité reproductibles

La figure 2.16a représente un motif d’instabilité observé dans un secteur d’angle $\theta_0 = 30^\circ$. Les motifs de ce type, appelés pseudo-oscillants car les branchements secondaires semblent se produire à intervalles à peu près réguliers, ont été observés pour la première

fois par Park et Homsy [50] en canal linéaire. Nous pensons que la notion de cellule virtuelle peut permettre d'interpréter ce type de structures. Après la première division, la branche principale croît dans une cellule virtuelle asymétrique et décentrée: un des murs est courbé (l'axe du fjord) et le second est droit (mur réel). Côté fjord, l'interface est très confinée, ce qui l'empêche de se déstabiliser. A cause de cette asymétrie, la probabilité que la branche suivante apparaisse du côté opposé à la première est très importante. Ce processus se reproduit parfois plusieurs fois de suite pour donner lieu à un motif pseudo-oscillant.

Les motifs pseudo-oscillants sont cependant assez rares. La forme des branchements est en effet très sensible à la position initiale de la perturbation: une légère différence dans la position initiale du premier branchement conduit à des motifs très différents.

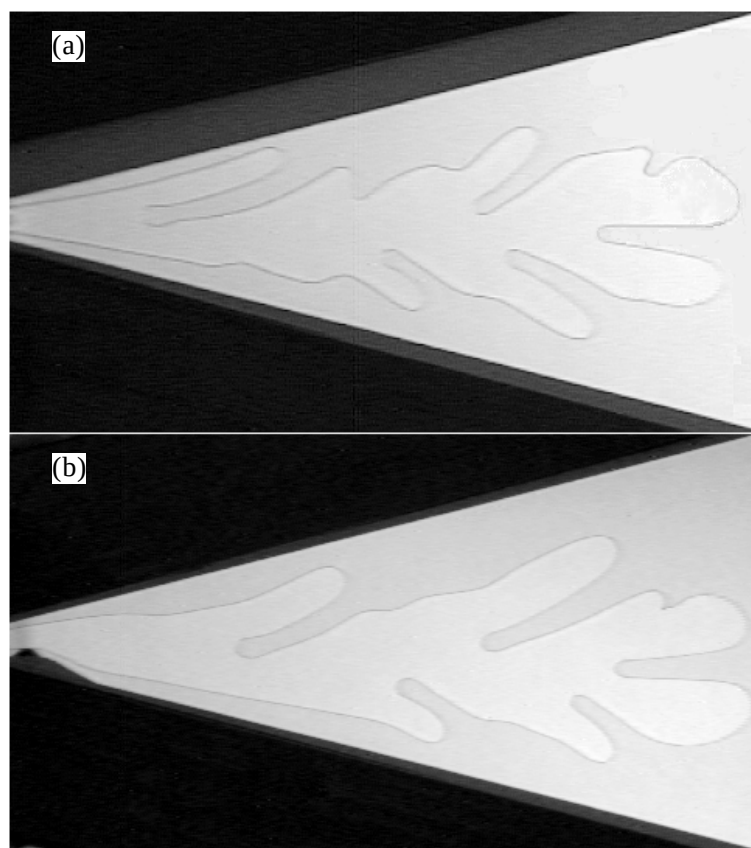


FIG. 2.16 – *Motif d'instabilité pseudo-oscillant observé en cellule d'angle $\theta_0 = 30^\circ$. Le motif (a) a été observé spontanément tandis que le motif (b) est déclenché artificiellement avec un obstacle sur le bord de la cellule.*

Nous avons réalisé une série d'expériences pour tester l'influence de la position et de la forme du premier branchement sur la suite de la croissance. Le principe de ces expériences est le suivant. Il est possible de fixer la position du premier branchement en le déclenchant artificiellement. Pour ce faire, au lieu de laisser le doigt se déstabiliser spontanément, nous avons déclenché artificiellement la première instabilité à l'aide d'une "bosse" disposée sur un des murs de la cellule (Fig.2.16b). Celle-ci est disposée près de l'apex du secteur, au

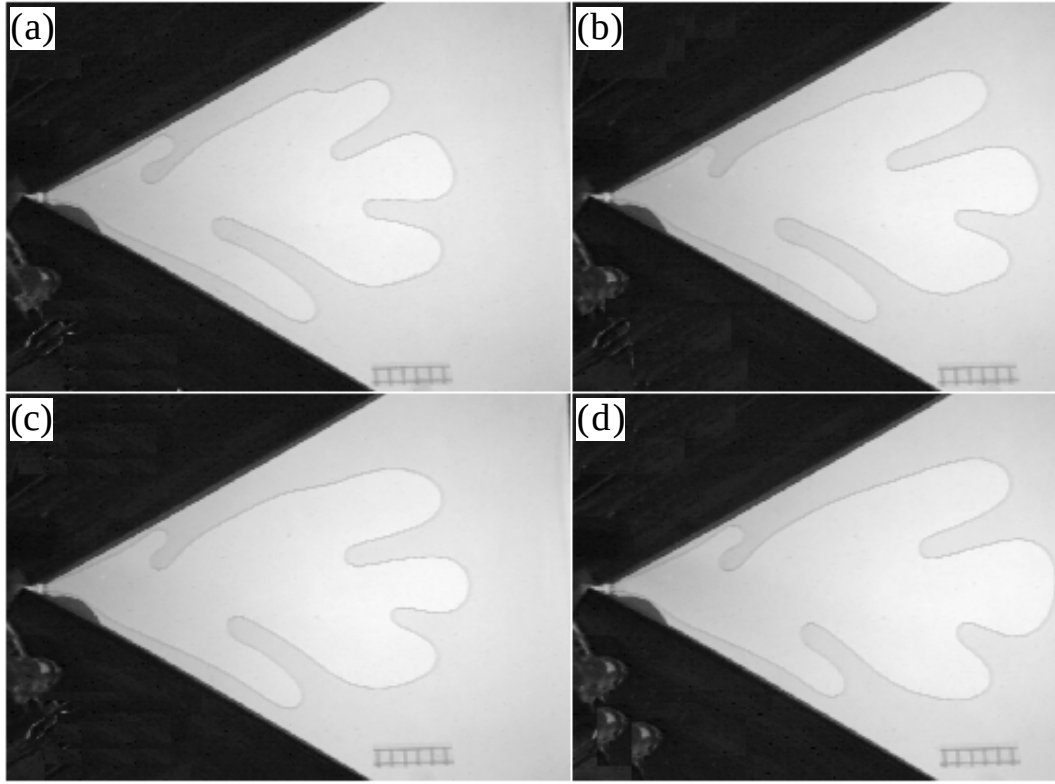


FIG. 2.17 – *Quatre motifs pseudo-oscillants générés artificiellement dans un secteur d'angle $\theta_0 = 60^\circ$. Ces quatre réalisations différentes conduisent à un motif semblable.*

voisinage de la position de déstabilisation naturelle des doigts qui dépend de la vitesse de ces derniers. En passant au voisinage de la bosse, le doigt devient asymétrique de sorte que la première branche se forme du côté opposé à la bosse. La branche suivante apparaît alors du côté opposé à la première et ainsi de suite. La figure Fig.2.16b montre un exemple de ce type de motif artificiel obtenu dans un secteur de $\theta_0 = 30^\circ$. Sa forme est très proche de celle du motif obtenu naturellement (Fig.2.16a).

La figure 2.17 montre quatre réalisations différentes de motifs générés artificiellement dans une cellule de $\theta_0 = 60^\circ$ pour des conditions d'injection identiques. Les quatre à cinq premiers branchements sont très similaires. Le premier branchement influence donc de manière significative la suite de la croissance qui est, au moins partiellement, déterministe.

2.4.5 Remarques sur la notion de mur virtuel

L'existence des murs virtuels se justifie par le fait qu'ils permettent d'interpréter un grand nombre d'observations expérimentales. Nous avons montré, par exemple, que l'évolution (et en particulier la déstabilisation) des doigts issus de l'instabilité d'une interface circulaire s'explique très bien si l'on considère que leur croissance s'effectue en cellule virtuelle. La notion de cellule virtuelle permet également de décrire plusieurs générations de branchements successifs dans les motifs d'instabilité complexes. Nous nous proposons

de préciser dans ce paragraphe les difficultés théoriques posées par l'utilisation de cette notion de murs virtuels.

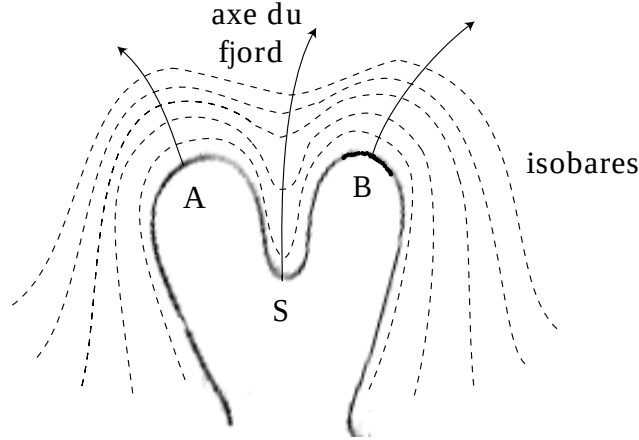


FIG. 2.18 – *Schéma de la déstabilisation d'un doigt de Saffman-Taylor. Les traits pointillés représentent les isobares au voisinage de l'interface (en trait plein). Les lignes continues représentent les lignes de courant.*

Le schéma 2.18 représente un doigt de Saffman-Taylor instable à un instant t_0 fixé. L'écoulement du fluide visqueux est gouverné par la loi de Darcy (cf. chapitre 1, section 1.1.1, équation (1.1)). La vitesse est donc proportionnelle au gradient de pression. De ce fait, les lignes de courant, représentées en trait plein, sont orthogonales en tout point aux isobares, représentées en traits pointillés.

Au voisinage du fjord, la courbure des isobares est renversée. Nous pensons que l'axe du fjord, i.e. le mur virtuel, correspond à la ligne de courant issue du point S et qui traverse chaque isobare au point où sa courbure est maximale. Nous n'avons cependant aucun argument pour justifier cette intuition. Au fur et à mesure que les branches secondaires croissent, le renversement de courbure affecte des isobares de plus en plus éloignées de S . Le problème consiste à démontrer que, contrairement aux autres lignes de courant, la forme de l'axe du fjord n'est pas modifiée au cours du temps.

Notons également que lorsqu'on utilise la loi de Darcy, la seule condition au voisinage d'un mur réel est l'annulation de la composante normale de la vitesse (cf. chapitre 1, section 1.1.1). Il n'existe par contre aucune condition sur la composante tangentielle. Par conséquent, les isobares sont toujours perpendiculaires à un mur réel. Puisque l'axe du fjord est orthogonal en tout point aux isobares et si l'on accepte que sa forme reste figée au cours du temps, ce dernier se comporte comme un mur solide: la vitesse normale à cette ligne est nulle. En d'autres termes, rien ne changerait dans l'écoulement, si l'axe du fjord était rendu solide, d'où le terme de mur "virtuel".

Nous constatons donc que la notion de mur virtuel repose pour l'essentiel sur les observations expérimentales, mais n'est pas expliquée théoriquement.

2.5 Evaluation de la distribution de la taille des branches secondaires

La notion de mur virtuel implique un lien direct entre la longueur des branches secondaires et la forme du doigt stable dont elles sont issues. Puisque une branche secondaire s'arrête de pousser lorsque l'axe du fjord est rejeté sur le côté, la longueur de cette branche est égale, en première approximation, à la longueur de l'axe du fjord. Comme nous l'avons démontré précédemment, la longueur d'un fjord dépend de manière critique de la position initiale de la perturbation sur l'interface. Cette longueur augmente considérablement lorsque la position initiale se rapproche de l'extrémité du doigt où elle diverge à l'infini. Ce cas limite correspond à une division parfaite. Ce mécanisme est donc capable de générer des branchements de toute les tailles.

Il est possible d'utiliser le modèle de trajectoire des fjords présenté précédemment pour estimer la distribution de taille des branches secondaires. La longueur l_f d'un fjord est une fonction des coordonnées (x_s, y_s) du point de l'interface S dont elle est issue. La probabilité d'observer un fjord de longueur $l_f(x_s, y_s)$ est donc égale à la probabilité que le doigt stable initial casse au point S . L'ensemble du modèle développé jusqu'ici ne donne aucune indication sur les positions de "départ" des fjords. En faisant des hypothèses sur la distribution de ces points de départ, on peut néanmoins estimer la fonction de distribution de la taille de fjords.

2.5.1 Fonction de distribution de la taille des fjords en géométrie linéaire

En canal linéaire, x_s et y_s sont liés l'un à l'autre par l'équation de l'interface. La longueur l_f dépend donc uniquement de y_s de sorte que la probabilité d'observer un fjord de longueur $l_f(y_s)$ est égale à la probabilité que le doigt stable initial se casse en un point dont l'ordonnée est y_s . Cette condition s'écrit:

$$f(l_f)dl_f = g(y_s)dy_s \quad (2.12)$$

où $f(l_f)$ et $g(y_s)$ sont respectivement la distribution de probabilité de la taille des fjords et celle de l'ordonnée des points de départ des fjords. Il vient donc:

$$f(l_f) = g(y_s) \left| \frac{dy_s}{dl_f} \right| = g(y_s) \frac{1}{|dl_f/dy_s|} \quad (2.13)$$

Le doigt de Saffman-Taylor étant symétrique par rapport à l'axe ox , on peut restreindre le calcul des fonctions de distribution aux ordonnées $y_s \geq 0$. Supposons que l'instabilité du doigt de Saffman-Taylor soit déclenchée par un défaut des plaques de verre, dont la position est distribuée suivant une loi de probabilité uniforme le long de la direction de

l'axe oy , la distribution $g(y_s)$ pour un doigt de largeur relative s'écrit alors:

$$g(y_s) = \frac{2}{\lambda W} \quad \text{pour } y_s \in [0, \lambda W/2] \quad (2.14)$$

$$g(y_s) = 0 \quad \text{pour } y_s \in [\lambda W/2, W/2] \quad (2.15)$$

où W est la largeur de la cellule.

Il reste à évaluer la dérivée dl_f/dy_s . La longueur $l_f(y_s)$ d'un fjord s'écrit:

$$l_f(y_s) = \int_{y_s}^{\lambda W/2} dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \quad (2.16)$$

où x et y sont liés par l'équation (2.10) de la trajectoire des fjords. Le calcul de la dérivée dx/dy à partir de l'équation (2.10) donne pour un doigt de largeur $\lambda = 0,5$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\lambda}{1-\lambda} \cotan\left(\frac{\pi y}{\lambda W}\right) = \cotan\left(\frac{2\pi y}{W}\right) \quad (2.17)$$

L'équation (2.16) se réécrit donc:

$$l_f(y_s) = \int_{y_s}^{W/4} dy \sqrt{1 + \cotan^2\left(\frac{2\pi y}{W}\right)} = \int_{y_s}^{W/4} \frac{dy}{\sin(2\pi y/W)} \quad (2.18)$$

En intégrant (2.18), il vient:

$$l_f(y_s) = -\frac{W}{2\pi} \ln \left[\tan \left(\frac{\pi y_s}{W} \right) \right] \quad (2.19)$$

On a donc:

$$f(l_f) = \frac{4}{W} \sin \left(\frac{2\pi y_s}{W} \right) \quad (2.20)$$

En exprimant y_s en fonction de l_f à partir de (2.19), il vient finalement:

$$f(l_f) = \frac{4}{W} \sin \left[2 \arctan \left(e^{-2\pi l_f/W} \right) \right] \quad (2.21)$$

2.5.2 Calcul de la fonction de distribution de la taille des fjords en secteur angulaire

En secteur angulaire, le point de départ S de la trajectoire du fjord est repéré par ses coordonnées cylindriques (r_s, θ_s) qui sont liées par l'équation de l'interface. Le doigt de Saffman-Taylor étant symétrique par rapport à l'axe ox , on peut à nouveau restreindre le calcul des fonctions de distribution aux angles $\theta_s \geq 0$. La fonction de distribution des tailles de fjords est cette fois donné par la relation:

$$f(l_f) = g(\theta_s) \frac{1}{|dl_f/Rd\theta_s|} \quad (2.22)$$

où $g(\theta_s)$ est la fonction de distribution des points de départ des fjords et R la longueur du doigt, i.e. la distance du sommet du doigt au centre du secteur. Comme dans le cas du

canal linéaire, nous supposons que l'instabilité est déclenchée par un défaut des plaques de verre, dont la position est distribuée suivant une loi de probabilité uniforme en angle θ . $g(\theta_s)$ est donc constante sur la largeur du doigt:

$$g(\theta_s) = \frac{2}{\lambda R \theta_0} \quad \text{pour } \theta_s \in [0, \lambda \theta_0 / 2] \quad (2.23)$$

$$g(\theta_s) = 0 \quad \text{pour } \theta_s \in [\lambda \theta_0 / 2, \theta_0 / 2] \quad (2.24)$$

où θ_0 est la largeur angulaire de la cellule.

Nous avons déterminé la fonction de distribution de la longueur des fjords en secteur angulaire de manière numérique. Pour un secteur d'angle donné, les trajectoires des fjords sont tracées pour des positions de départ régulièrement espacées le long de l'interface. La longueur de chacune de ces branches est ensuite calculée numériquement. Connaissant la longueur des branches en fonction de leur position, on peut ensuite calculer numériquement la dérivée $dl_f/d\theta_s$, puis la fonction de distribution $f(l_f)$. La qualité des résultats dépend du nombre de branches utilisées pour calculer $f(l_f)$. Nous avons obtenus des résultats satisfaisants en traçant de 200 à 500 branches par doigt.

2.5.3 Analyse des résultats et comparaison avec les observations expérimentales

A. Comparaison théorie/expérience

Les fonctions de distributions des longueurs de fjords, $f(l_f)$, sont représentées sur la figure 2.19 pour le canal linéaire ainsi que pour trois secteurs d'angle $\theta_0 = 30^\circ$, 60° et 90° . La longueur des fjords est normalisée par la largeur de la cellule W (dans le cas d'un doigt en secteur angulaire, la largeur de la cellule est définie par $W = R\theta_0$ où R est la distance de l'extrémité du doigt au sommet du secteur au moment de la déstabilisation). Quelque soit l'angle du secteur, la théorie prévoit que la proportion de petites branches est nettement supérieure au nombre de grandes branches. Ce résultat ne correspond pas aux observations expérimentales.

Pour comparer de manière plus quantitative les prédictions théoriques aux observations expérimentales, nous avons réalisé plusieurs séries de mesures de la longueur des branches secondaires en canal linéaire. Ces mesures nous ont permis de tracer l'histogramme des longueurs de branches secondaires et de le comparer à la fonction de distribution calculée. L'histogramme obtenu en canal linéaire est représenté sur la figure 2.20a. L'accord entre la théorie et l'expérience est relativement satisfaisant dans la limite des grandes branches. Notons en particulier que la prédiction, selon laquelle la probabilité d'observer des branches de taille supérieure à la largeur du canal W est très faible, est vérifiée expérimentalement. Les prédictions théoriques sont par contre complètement fausses pour les branches de petites tailles. Alors que la théorie prévoit que la probabilité d'observer des

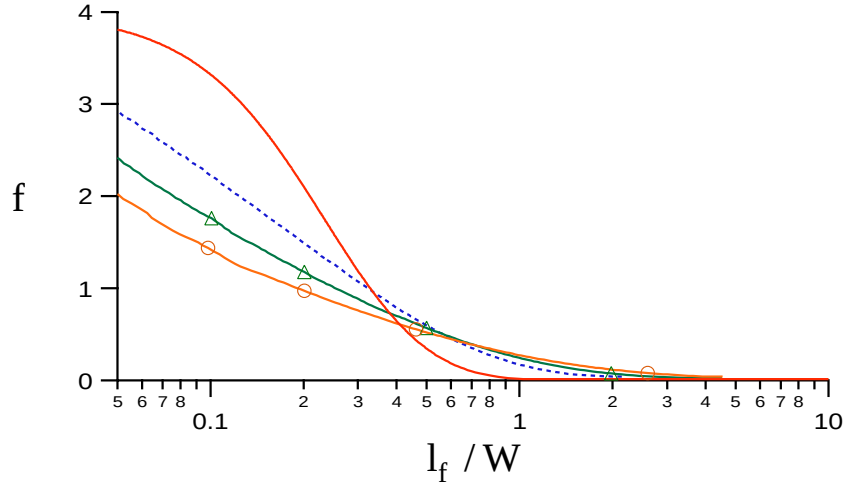


FIG. 2.19 – Fonction de distribution de la longueur des fjords en canal linéaire (trait plein) et en secteur d'angle $\theta_0 = 30^\circ$ (ligne pointillée), 60° (trait avec triangle) et 90° (trait avec cercle). La longueur des fjords est normalisée par la largeur de la cellule.

petites branches est très importante, nous avons constaté expérimentalement que la proportion de branches secondaires de taille inférieure à une taille minimum $l_{min} \approx 0,05 W$ est très faible.

La comparaison théorie/expérience est plus difficile en secteur angulaire. En effet, les distributions en secteurs sont assez larges de sorte que le tracé de l'histogramme nécessite un nombre de mesures beaucoup plus important qu'en canal linéaire (Fig. 2.20b). Nous avons réalisé deux séries d'expériences en secteurs d'angle $\theta_0 = 30^\circ$ et 45° . Dans chaque cas, le nombre de mesures n'est pas assez important pour autoriser une comparaison significative avec les distributions théoriques. Ces mesures confirment néanmoins l'existence d'une longueur de coupure l_{min} , telle que la probabilité d'observer des branches de taille inférieure à l_{min} devient très faible. La valeur de l_{min} semble dépendre de l'angle du secteur. En secteur d'angle $\theta_0 = 45^\circ$, nous n'avons pas observé de branches secondaire de taille inférieure à $l_{min} = W$ (Fig. 2.20b). Notons que, au contraire, la proportion de branches secondaires de longueur supérieure à W est très faible en canal linéaire.

B. Longueur de coupure

Nous pensons que l'existence de cette longueur de coupure, l_{min} , peut s'expliquer de la façon suivante. Rappelons que le premier signe visible de déstabilisation du doigt est l'apparition d'une zone près de l'extrémité du doigt où la courbure de l'interface s'inverse. Considérons, par exemple, un doigt de Saffman-Taylor en secteur angulaire. La largeur angulaire du doigt est notée θ_d . La perturbation à l'origine de la division peut être schématisée, en première approximation, comme un creux encadré par deux "bosses",

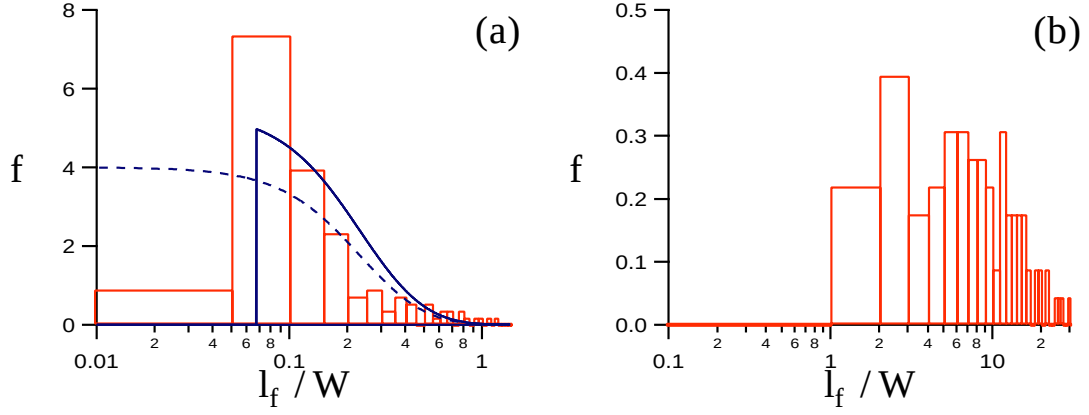


FIG. 2.20 – (a) Histogramme de la longueur des branches secondaires en canal linéaire (construit à partir de 131 expériences). La ligne pointillée représente la fonction de distribution de la longueur des fjords calculée théoriquement. Le trait plein représente la fonction de distribution théorique corrigée en introduisant une longueur de coupure. (b) Histogramme de la longueur des branches secondaires en secteur d'angle $\theta_0 = 45^\circ$. La longueur des branches est normalisée par la largeur de la cellule.

comme sur la figure 2.21a. Les bosses donneront naissance aux deux branches secondaires, tandis que le creux correspond à l'amorce du fjord. A cause de la présence des deux bosses, le creux, et par conséquent la position angulaire θ_s du fjord ne peuvent jamais se trouver complètement rejetés sur le côté du doigt. Au "mieux", le creux se trouve à une largeur de bosse du bord du doigt. Il existe une "bande interdite", $\theta_s \in [\theta_{lim}, \theta_d/2]$, représentée par la zone grisée sur la figure 2.21a, dans laquelle la fonction de distribution des points de départ de fjord, $g(\theta_s)$, est nulle. Puisqu'aucun fjord ne peut démarrer depuis cette bande interdite, les branches de longueur inférieure à $l_{min} = l_f(\theta_{lim})$ ne sont jamais observées.

La largeur de la zone interdite dépend de la taille de la perturbation l_p et de la forme du doigt. En secteur angulaire (Fig.2.21a), l'avant du doigt peut être considéré, en première approximation, comme un arc de cercle. Le point de départ d'un fjord ne peut pas s'approcher du bord du doigt plus près qu'une largeur de bosse, ce qui correspond à la moitié de la largeur de la perturbation. Les analyses de stabilité montrent que la taille de la perturbation est de l'ordre de grandeur de la longueur capillaire: $l_p = a l_c$ où a est une constante de proportionnalité. Nous avons, par ailleurs, mesuré au début de ce chapitre le rapport de la largeur du doigt à la longueur capillaire, $\omega_{exp} = W_d/l_c$, au seuil de stabilité. On montre donc facilement que les points de départ des fjords sont confinés entre les angles $-\theta_{lim}$ et $+\theta_{lim}$ avec (Fig.2.21a):

$$\theta_{lim} = \frac{l_c}{R} \frac{\omega_{exp} - a}{2} \quad (2.25)$$

Les fjords de longueur inférieure à $l_{min} = l_f(\theta_{lim})$ ne sont donc jamais réalisés expérimentalement.

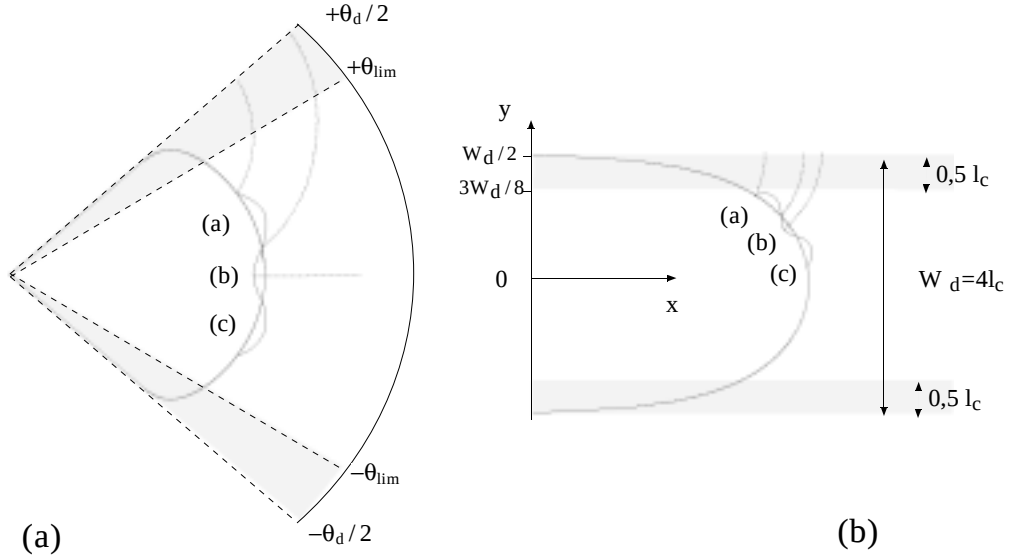


FIG. 2.21 – Schéma de la perturbation sur le doigt de Saffman-Taylor. (a) En secteur angulaire. (b) En canal linéaire.

talement. Pour tenir compte de cet effet dans la fonction de distribution, il faut remplacer la distribution des points de départ $g(\theta_s)$ définie précédemment (équation 2.24) par:

$$g(\theta_s) = \frac{2}{R\theta_{lim}} \quad \text{pour } \theta_s \in [0, \theta_{lim}/2] \quad (2.26)$$

$$g(\theta_s) = 0 \quad \text{pour } \theta_s \in [\theta_{lim}/2, \theta_0/2] \quad (2.27)$$

La valeur de l'angle limite, θ_{lim} , et, par conséquent, de la longueur de coupure l_{min} dépendent du paramètre a . La mesure de l_{min} au cours des deux séries d'expériences en secteurs d'angle $\theta_0 = 30^\circ$ et 45° permettent d'estimer ce paramètre à $a \approx 2$.

La mesure de l_{min} en canal linéaire nous a permis d'évaluer la largeur de la bande interdite à $0,5 l_c$ (Fig.2.21b). Rappelons que la largeur W_d du doigt au seuil de déstabilisation en canal linéaire est de l'ordre de $4 l_c$ (cf. section 2.2.2). La bande interdite correspond donc aux ordonnées $y \in [3W_d/8, W_d/2]$. La prise en compte de cette bande interdite permet de corriger la fonction de distribution théorique, représentée en trait plein sur la figure 2.20a. En canal linéaire, la forte courbure du doigt de Saffman-Taylor ne permet pas d'appliquer le raisonnement utilisé en secteur angulaire pour déterminer a .

Les fonctions de distributions $f(l_f)$ corrigées par la longueur de coupure sont représentées sur la figure 2.22. Ces distribution rendent compte de l'augmentation de la taille des branches secondaires avec l'angle du secteur ainsi que de l'existence d'une longueur de coupure, l_{min} qui dépend de l'angle du secteur. Elles sont donc qualitativement en accord avec les observations expérimentales. Pour valider ce modèle, il serait nécessaire

de disposer d'un plus grand nombre de mesures de tailles de branches secondaires afin de comparer les histogrammes expérimentaux aux distributions calculées. Ces mesures sont actuellement en cours de réalisation.

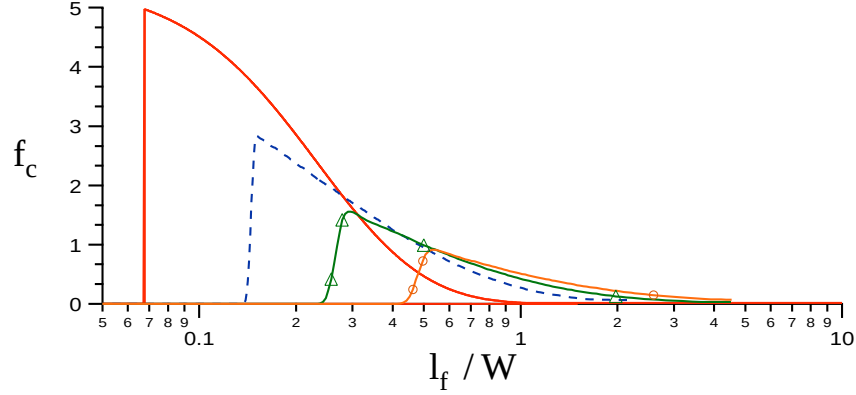


FIG. 2.22 – *Fonction de distribution de la longueur des fjords corrigées par l'introduction d'une longueur de coupure en canal linéaire (trait plein) et en secteur d'angle $\theta_0 = 30^\circ$ (ligne pointillée), 60° (trait avec triangle) et 90° (trait avec cercle). (échelle log.)*

C. Transition division imparfaite/division parfaite

Nous avons observé dans la section 2.3 que, lorsqu'on augmente l'angle du secteur θ_0 , on passe progressivement d'une situation où les divisions sont toutes imparfaites ($\theta_0 < 70^\circ$) à une situation où elles sont toutes parfaites ($\theta_0 > 90^\circ$). Les arguments très simples que nous venons d'exposer permettent d'interpréter cette transition. Lorsque l'angle du secteur augmente, la largeur du doigt normalisée par la longueur capillaire, ω_{exp} , diminue jusqu'à atteindre la valeur asymptotique 2 lorsque $\theta_0 \approx 70^\circ$ (Fig. 2.6). D'après l'équation 2.25, θ_{lim} tend vers 0 lorsque ω_{exp} tend vers 2. Autrement dit, lorsque θ_0 augmente, la bande interdite augmente et les origines des fjords sont de plus en plus confinées au voisinage de l'extrémité du doigt, de sorte que la taille des branches secondaires augmente. Le système transite donc progressivement d'une situation où les branches de très grandes tailles sont très peu probables à une situation où elles sont très probables.

2.6 Conclusion

Au cours de ce chapitre consacré à l'étude de la déstabilisation des doigts de Saffman-Taylor, nous avons établi les résultats suivants:

1. La trajectoire de l'axe d'un fjord, c'est à dire la ligne séparant les deux branches issues de la déstabilisation du doigt de Saffman-Taylor, est semblable, en pre-

mière approximation, à la trajectoire d'une particule advectée sur l'interface de ce doigt s'il restait stable.

2. La forme et l'évolution des motifs d'instabilité complexes peuvent être interprétées en assimilant les axes des fjords à des murs virtuels. La croissance de l'interface s'effectue alors dans des cellules virtuelles, dont les parois sont constituées par les fjords.
3. La longueur des fjords et par conséquent celle des branches secondaires sont très sensibles à la position initiale de la perturbation sur le doigt stable. Ce mécanisme est capable de générer des branches secondaires avec une très grande diversité d'échelle de taille, comprise entre une longueur de coupure, $l_{min}(\theta_0)$, et l'infini (pour un fjord issu de l'extrémité du doigt).
4. La mesure du paramètre ω montre que la largeur du doigt au seuil de stabilité diminue lorsque l'angle de la cellule augmente. Cet effet permet d'expliquer la transition progressive d'une situation où les divisions sont toutes imparfaites ($\theta_0 < 70^\circ$) à une situation où elles sont toutes parfaites ($\theta_0 > 90^\circ$) lorsque l'angle de la cellule augmente.

L'ensemble des arguments développés dans ce chapitre, et notamment dans la dernière section consacrée à la fonction de distribution des branches secondaires, sont assez qualitatifs. Nous avons négligé beaucoup d'éléments, tels que l'effet de l'augmentation au cours du temps de la taille de la branche secondaire, la variation du taux de croissance de la perturbation avec la vitesse normale de l'interface, ou l'effet de la tension de surface ...

Notre analyse propose néanmoins une vision cohérente de l'instabilité des doigts de Saffman-Taylor en reliant les caractéristiques morphologiques (tailles des branches secondaires, divisions imparfaites ou parfaites) aux paramètres de contrôle que sont ω et l'angle de la cellule θ_0 .

Le problème de Saffman-Taylor met en jeu des fluides non miscibles. La viscosité est donc constante dans chaque phase avec un saut à l'interface. Nous allons à présent nous intéresser à la situation où les deux fluides sont miscibles.

Deuxième partie

Etude de l'instabilité visqueuse de fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw

And now for something completely different.

Monty Python.

Chapitre 1

Digitation visqueuse de fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw

Le problème de Saffman-Taylor met en jeu des fluides non miscibles. La viscosité est donc constante dans chaque phase avec un saut à l'interface. Si les deux fluides sont miscibles, la tension de surface est nulle et il faut, de plus, tenir compte de la diffusion moléculaire qui mélange les fluides aux temps longs. On peut alors distinguer deux régimes asymptotiques différents en fonction de l'importance relative des effets convectifs et diffusifs.

En régime très diffusif, les deux fluides se mélangent et il n'est pas possible de définir une interface. La digitation visqueuse peut cependant être provoquée par une variation de la viscosité qui dépend localement de la concentration en fluide injecté.

Au contraire, si la vitesse d'écoulement est suffisamment importante pour que les deux fluides n'aient pas le temps de se mélanger (régime non diffusif), on peut définir une interface entre les fluides. L'absence de forces capillaires permet à cette dernière d'adopter des configurations variées dans l'épaisseur entre les plaques de la cellule.

Quel que soit le régime (diffusif ou non diffusif), les motifs observés lors de l'instabilité visqueuse de deux fluides miscibles en écoulement dans une cellule de Hele-Shaw sont très différents de ceux produits par l'instabilité de Saffman-Taylor. Très peu d'études leur ont pourtant été consacrées. Seul le cas du déplacement de fluides miscibles en milieux poreux est relativement bien documenté. Dans ce chapitre, nous nous proposons de donner un aperçu des principaux résultats de ces différents travaux. Nous nous concentrerons sur l'étude des instabilités d'origine visqueuse et passerons sous silence les travaux consacrés à l'instabilité provoquée par la différence de densité entre deux fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw. Signalons simplement que l'équipe de P. Kurowski étudie actuellement cette instabilité au laboratoire de Physique et Mécanique de la Matière Hétérogène (ESPCI).

Deux articles de revue [28, 29] abordent le problème de la digitation visqueuse de fluides miscibles. Ils sont cependant relativement anciens et plutôt centrés sur les écoulements en milieux poreux.

1.1 Déplacement d'un traceur passif entre deux plaques

Au cours du déplacement de deux fluides miscibles dans une cellule de Hele-Shaw ou dans un tube, l'effet principal de la diffusion est de mélanger les fluides dans la direction transverse à celle de l'écoulement, c'est-à-dire le long de l'épaisseur entre les plaques ou du diamètre du tube. Au contraire, le transport convectif se fait essentiellement dans le plan des plaques ou le long de l'axe du tube. On peut alors distinguer deux régimes très différents en fonction de l'importance relative des effets convectifs et diffusifs. Taylor est le premier à avoir analysé ces deux types de régimes dans le cas de l'écoulement d'un traceur passif en tube [71]. Cette analyse a ensuite été complétée et étendue au cas de l'écoulement entre deux plaques [1]. Nous nous proposons de l'exposer brièvement dans le cas d'une cellule de Hele-Shaw.

1.1.1 Définition du nombre de diffusion transverse

Considérons le déplacement d'un fluide 1 par un fluide 2 injecté à la vitesse moyenne constante q entre les deux plaques d'une cellule de Hele-Shaw (Fig.1.1). La longueur de la cellule est notée L et son épaisseur b . On se place dans le cas d'un traceur passif: les deux fluides miscibles ont même densité et même viscosité. Cette dernière est supposée suffisamment importante pour que les effets inertiels soient négligeables (en d'autres termes, le nombre de Reynolds de l'écoulement est petit $Re = q\rho b/\eta \ll 1$). L'écoulement est supposé invariant le long de l'axe oy ; on néglige donc toute dépendance en y .

Dans ces conditions, la seule composante non nulle de la vitesse est la composante suivant l'axe ox dont l'expression est:

$$u(z) = \frac{3}{2}q \left(1 - 4\frac{z^2}{b^2}\right) \quad (1.1)$$

où q est la vitesse moyennée dans l'épaisseur:

$$q = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} u(z) dz \quad (1.2)$$

Le profil de vitesse (1.1) est un profil parabolique ou profil de Poiseuille. Notons que le rapport V_0 entre la vitesse maximale V_{max} et la vitesse moyenne q est $V_0 = V_{max}/q = 1,5$.

La conservation du fluide injecté est exprimée par l'équation de diffusion-convection:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} c = D_m \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) \quad (1.3)$$

où D_m est le coefficient de diffusion moléculaire et $c(x,z,t)$ désigne la fraction volumique locale de fluide injecté, que nous appellerons concentration par la suite. Nous allons étudier l'évolution d'un échelon de concentration situé en $x = 0$ à l'instant $t = 0$.

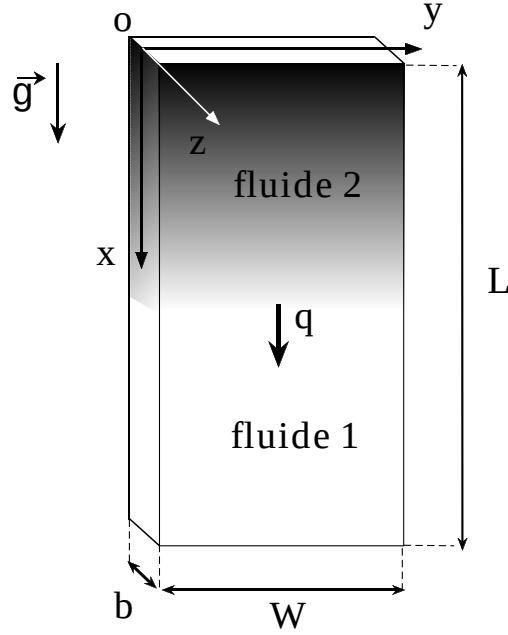


FIG. 1.1 – Schéma de l'écoulement de deux fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw.

Le terme de diffusion longitudinale $\partial^2 c / \partial x^2$, qui est d'ordre $1/L^2$, est négligeable devant le terme de diffusion transverse $\partial^2 c / \partial z^2$, d'ordre $1/b^2$. L'équation (1.3) se réécrit donc, compte-tenu de l'expression du champ de vitesse (1.1):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{3q}{2} \left(1 - 4 \frac{z^2}{b^2} \right) \frac{\partial c}{\partial x} = D_m \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (1.4)$$

L'effet de la diffusion transverse se fait sentir sur un temps caractéristique $\tau_d = b^2 / D_m$. Le transport convectif se fait avec un temps caractéristique $\tau_c = L / q$. La comparaison entre ces deux temps permet de définir un nombre sans dimension, que nous appellerons nombre de diffusion transverse [71, 87]:

$$N_{dt} = \frac{qb^2}{D_m L} = Pe \epsilon \quad (1.5)$$

où $\epsilon = b/L$ est le rapport d'aspect de la cellule de Hele-Shaw et $Pe = qb/D_m$ est un nombre sans dimension, appelé "nombre de Péclet".

Dans la suite de ce mémoire, nous nous intéresserons à la concentration de fluide injecté moyennée dans l'épaisseur de la cellule:

$$\bar{c}(x, t) = \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c(x, z, t) dz \quad (1.6)$$

L'évolution et la forme des fronts de concentration moyennée $\bar{c}(x, t)$ dépendent de la valeur de N_{dt} . On peut définir deux régimes asymptotiques correspondant à des comportements très différents suivant que $N_{dt} \gg 1$ où $N_{dt} \ll 1$.

1.1.2 Régime non diffusif: $N_{dt} \gg 1$

A. Evolution du front de concentration moyennée

Pour $N_{dt} \gg 1$, la diffusion transverse est négligeable devant le transport convectif et l'équation (1.4) s'écrit:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{3q}{2} \left(1 - 4 \frac{z^2}{b^2} \right) \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (1.7)$$

Dans ce régime, les deux fluides ne se mélangent pas. Il se forme donc une "langue" de fluide injecté dont l'interface est symétrique par rapport à l'axe ox et invariante le long de la direction oy (Fig.1.2a). Les points de l'interface sont simplement advectés le long des lignes de courant. La vitesse de propagation d'un point de l'interface de hauteur z est donc donnée par le profil de poiseuille (1.1).

Puisque les deux fluides ne se mélangent pas, la concentration moyennée $\bar{c}(x,t)$ est égale à l'épaisseur locale de la langue de fluide injectée normalisée par l'épaisseur de la cellule: $\beta(x,t)$ (Fig.1.2a). La vitesse d'une tranche de concentration $\bar{c} = \beta$ est donc égale à la vitesse de propagation du point de l'interface de hauteur $z = b\beta/2$:

$$V(\bar{c}) = \frac{1}{q} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\bar{c}} = \frac{3}{2} (1 - \bar{c}^2) t \quad (1.8)$$

où $x(z,t)$ est la position de la tranche de concentration $\bar{c}$ à l'instant t et $V(\bar{c})$ la vitesse de propagation des concentrations normalisée par q . Notons que la vitesse d'une tranche de concentration ne dépend que de la valeur de $\bar{c}$.

L'équation du profil de concentration moyennée s'écrit:

$$\bar{c}(x,t) = \sqrt{1 - \frac{2}{3} \frac{x}{qt}} \quad (1.9)$$

$\bar{c}$ ne dépend que du rapport x/t . La forme du front de concentration à un instant t_2 se déduit donc de sa forme à un instant t_1 par une simple similitude de rapport t_2/t_1 dans la direction de ox . On dit que le front est autosimilaire (Fig.1.2b).

B. Introduction de la fonction de flux

Yang et Yortsos [87] ont proposé un formalisme différent pour décrire l'évolution de l'interface. Dans la suite de ce mémoire, ce formalisme sera appliqué dans des situations relativement complexes. Nous allons profiter de l'occasion qui nous est donnée ici pour l'introduire sur l'exemple simple d'un traceur passif. Moyenner l'équation de conservation (1.7) sur l'épaisseur conduit à l'équation:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + q \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (1.10)$$

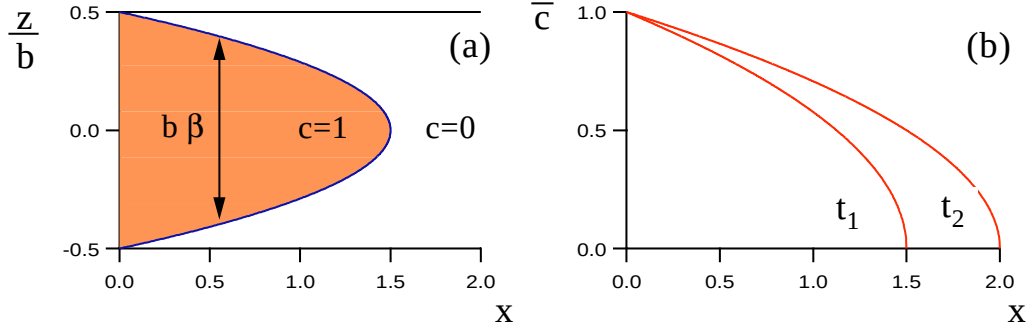


FIG. 1.2 – (a) Schéma de l'interface entre les fluides 1 et 2 dans le plan oxz pour $N_{dt} \gg 1$. L'interface a la forme d'une langue d'épaisseur relative $\beta(x,t)$. (b) Front de concentration moyennée dans l'épaisseur pour $N_{dt} \gg 1$ à $t = t_1$ et $t = t_2$.

où $F(x,t)$ est la fonction de flux, i.e. le flux local de fluide 2 normalisé par le débit d'injection qb :

$$F(x,t) = \frac{1}{qb} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c(x,z,t) u(z,t) dz \quad (1.11)$$

Puisque les deux fluides ne se mélangent pas, l'expression de la concentration locale $c(x,z,t)$ est très simple (Fig.1.2a):

$$c(x,z,t) = 0 \text{ pour } |z| \in [b\beta(x,t)/2, b] \quad (1.12)$$

$$c(x,z,t) = 1 \text{ pour } |z| \in [0, b\beta(x,t)/2] \quad (1.13)$$

Le flux se calcule donc simplement:

$$F(x,t) = \frac{1}{qb} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{3}{2} \left(1 - 4 \frac{z^2}{b^2} \right) dz = \frac{3}{2} \bar{c} \left(1 - \frac{\bar{c}^2}{3} \right) \quad (1.14)$$

La fonction de flux ne dépendant que de $\bar{c}$, il est possible d'exprimer très facilement la vitesse de propagation des concentrations moyennées. En effet, $\bar{c}$ étant fonction de x et t , on a à $\bar{c}$ fixé:

$$d\bar{c} = 0 = \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right)_t dx + \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} \right)_x dt \quad (1.15)$$

La vitesse de propagation des concentrations normalisée par q s'écrit:

$$V(\bar{c}) = \frac{1}{q} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\bar{c}} = - \frac{(\partial \bar{c} / \partial t)_x}{(\partial \bar{c} / \partial x)_t} \quad (1.16)$$

Or d'après (4.21):

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = -q \frac{\partial F}{\partial x} = -q \frac{dF}{d\bar{c}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (1.17)$$

On retrouve finalement le résultat (1.8):

$$V(\bar{c}) = \frac{1}{q} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\bar{c}} = \frac{dF}{d\bar{c}} = \frac{3}{2} (1 - \bar{c}^2) t \quad (1.18)$$

La vitesse de propagation des concentrations normalisée par q est donc égale à la dérivée de la fonction de flux. Ce formalisme sera particulièrement utile pour décrire le déplacement de deux fluides miscibles de viscosité et de densité différentes à $N_{dt} \gg 1$ dans le chapitre 4.

1.1.3 Régime diffusif $N_{dt} \ll 1$

Considérer le cas $N_{dt} \ll 1$ revient à étudier la forme du front de concentration moyennée à des temps grands devant le temps caractéristique de diffusion transverse. Le fluide injecté se disperse alors sous l'action combinée de la diffusion moléculaire et des variations de vitesse le long de l'axe oz . Les observations expérimentales montrent que dans ce régime, le front $\bar{c}(x,t)$ a la forme d'un front diffusif en mouvement à la vitesse q et s'étalant avec un coefficient de diffusion effectif $D_{\parallel}$ [71] (Fig.1.3b):

$$\bar{c}(x,y,t) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - qt}{2\sqrt{D_{\parallel}t}} \right) \right] \quad (1.19)$$

Rappelons que la fonction erf est définie par:

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-\xi^2} d\xi \quad (1.20)$$

Ce résultat peut se comprendre intuitivement de la façon suivante. La diffusion tend à homogénéiser la concentration suivant l'axe oz (Fig.1.3a). Ce flux diffusif transverse fait "visiter" aux particules fluides de nouvelles lignes de courant, ce qui modifie le flux convectif longitudinal et lui donne l'apparence d'un flux diffusif (Fig.1.3b). On donne à ce phénomène le nom de dispersion de Taylor par opposition à la "vraie" diffusion moléculaire, qui met en jeu la concentration locale.

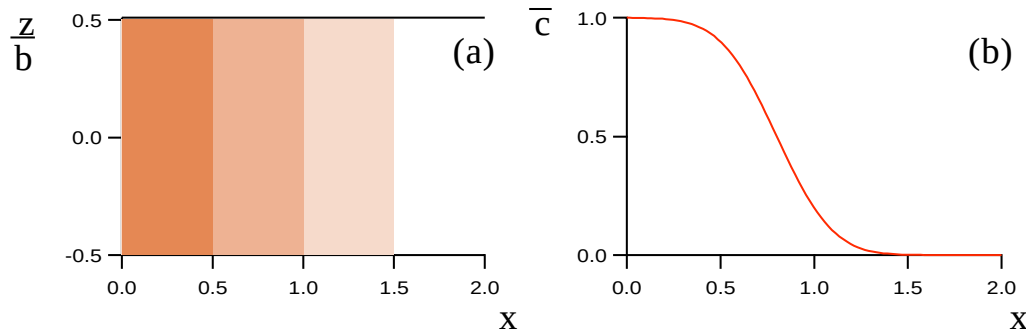


FIG. 1.3 – (a) Pour $N_{dt} \ll 1$, la solution est quasiment homogène le long de l'épaisseur. (b) Front de concentration moyennée dans l'épaisseur pour $N_{dt} \ll 1$.

La dispersion de Taylor ne se fait sentir que dans la limite où le temps de transport convectif longitudinal devient de l'ordre de grandeur du temps caractéristique de diffusion

transverse:

$$\frac{b^2}{D_m} \sim \frac{l}{q} \quad (1.21)$$

où l est la largeur du front de concentration. Expérimentalement, on observe une dépendance de la forme: $l \sim \sqrt{D_{\parallel} t}$. En remplaçant t par le temps caractéristique de diffusion transverse, et en utilisant (1.21), il vient finalement:

$$D_{\parallel} \sim \frac{b^2 u_0^2}{D_m} \quad (1.22)$$

L'analyse théorique complète conduit à l'expression suivante du coefficient de diffusion effectif [1, 71]:

$$D_{\parallel} = D_m + \frac{b^2 V^2}{210 D_m} \quad (1.23)$$

1.1.4 Remarque

Bien que le nombre de diffusion transverse soit le mieux adapté à la description des effets diffusifs en cellule de Hele-Shaw, la plupart des travaux utilisent pourtant le nombre de Péclet [15, 28, 59]. Nous utiliserons dans la suite l'un et l'autre de ces deux nombres. Ce qui importe, c'est de garder en tête que, dans une géométrie à faible rapport d'aspect, comme une cellule de Hele-Shaw ou un tube capillaire, la diffusion se fait d'abord sentir dans la petite dimension (épaisseur ou diamètre).

Il ne faut pas non plus oublier que la diffusion est un phénomène dépendant du temps dont les effets ne se font sentir qu'à des temps $t > \tau_d$. Considérons un écoulement à faible Péclet. Observé sur des temps caractéristiques $t \ll \tau_d$, il présente toutes les caractéristiques d'un écoulement très peu diffusif. De la même façon, un écoulement à grand nombre de Péclet ne constitue qu'un régime transitoire: avec le temps, les effets diffusifs sont de moins en moins négligeables et deviennent prépondérants lorsque $t \gg \tau_d$ [15, 63, 87].

1.2 Déplacement de deux fluides miscibles différents entre deux plaques

Plusieurs travaux numériques ont été récemment consacrés à la structure du déplacement de deux fluides miscibles de viscosités différentes entre deux plaques ou dans un tube. Chen et Meiburg [15] et Yang et Yortsos [87] ont résolu numériquement les équations du mouvement. Ces calculs ont été complétés par une étude numérique, utilisant la méthode de gaz sur réseau, de Rakotomalala, Salin et Watzky [63, 82].

La différence de viscosité entre les deux fluides introduit un nouveau paramètre de contrôle, le rapport de viscosité, défini comme le rapport entre la viscosité du fluide déplacé η_1 et celle du fluide injecté η_2 :

$$M = \frac{\eta_1}{\eta_2} \quad (1.24)$$

Ces différents travaux conduisent, comme dans le cas du traceur passif, à l'identification de deux régimes asymptotiques très différents suivant que $N_{dt} \gg 1$ où $N_{dt} \ll 1$.

1.2.1 Régime diffusif: $N_{dt} \ll 1$

Dans ce régime, la diffusion homogénéise la solution dans l'épaisseur. Quel que soit le rapport de viscosité, on observe que [63, 82] (Fig.1.4 a, c et e):

1. les isoconcentrations sont quasi-verticales: $c(x, z, t)$ est indépendant de z ,
2. le profil de vitesse est partout très proche d'un profil de Poiseuille,
3. le profil de concentration moyennée $\bar{c}(x, t)$ a la forme d'une fonction erreur du type (1.19).

En régime diffusif, les conclusions établies dans le cas d'un traceur passif se généralisent donc au cas de deux fluides différents.

1.2.2 Régime non diffusif $N_{dt} \gg 1$

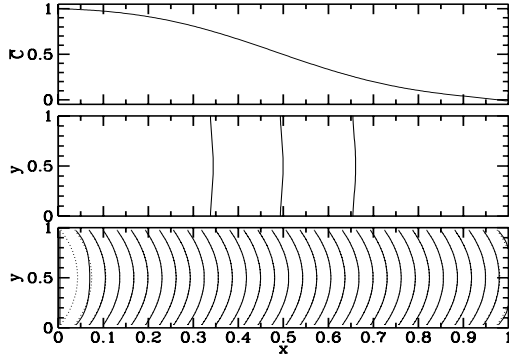
Pour $N_{dt} \gg 1$, isoconcentrations sont très resserrées (Fig. 1.4b, d, f). Les deux fluides ne se mélangent presque pas de sorte qu'on peut définir une interface symétrique par rapport à l'axe ox et dont les caractéristiques dépendent du rapport de viscosité [15, 63, 82, 87]:

1. Pour $M \gg 1$, l'interface a la forme d'un doigt stationnaire qui avance à vitesse constante (Fig. 1.4 d). La concentration moyenne est une fonction de la forme $\bar{c}(x, y, t) = \bar{c}(x - U_{tip}t)$ [63, 82].
2. Pour $M \approx 1$, le comportement est très différent (Fig. 1.4 b). L'interface et donc le front de concentration sont autosimilaires: $\bar{c}(x, t) = \bar{c}(x/t)$ [63, 82].
3. Pour $M \ll 1$, l'interface ne s'étale plus proportionnellement au temps (Fig. 1.4 f) [63, 82].

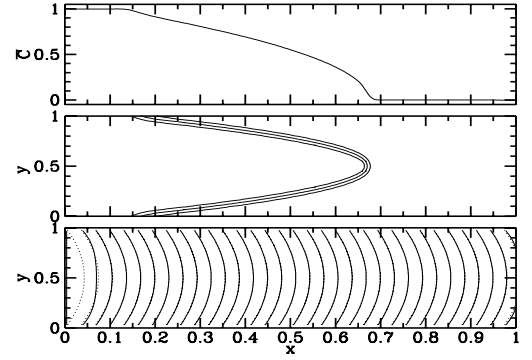
Nous avons montré dans la section précédente comment la vitesse de propagation des concentrations peut être calculée à partir de la fonction de flux dans le cas d'un traceur passif. Yang et Yortsos [87] ont étendu ce formalisme à la description de la forme de l'interface entre deux fluides différents dans la limite $N_{dt} \gg 1$. Comme dans le cas d'un traceur passif, l'équation de conservation de la concentration moyenne peut se mettre sous la forme:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial F(\bar{c})}{\partial x} = 0 \quad (1.25)$$

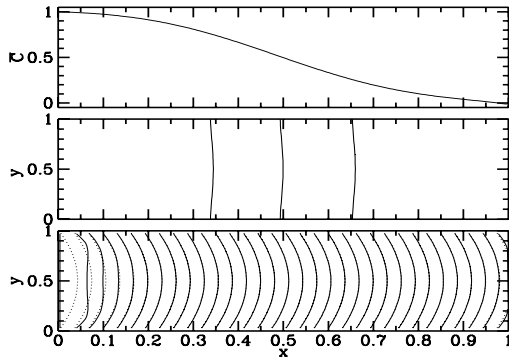
En faisant l'hypothèse d'un écoulement quasi-parallèle, les auteurs calculent la fonction de flux $F(\bar{c})$ et en déduisent la vitesse de propagation des fronts de concentration. Cette approche permet en particulier de rendre compte des fronts de concentration autosimilaires $\bar{c}(x/t)$ observés numériquement pour $M \approx 1$. Dans le chapitre 4, nous reprendrons en



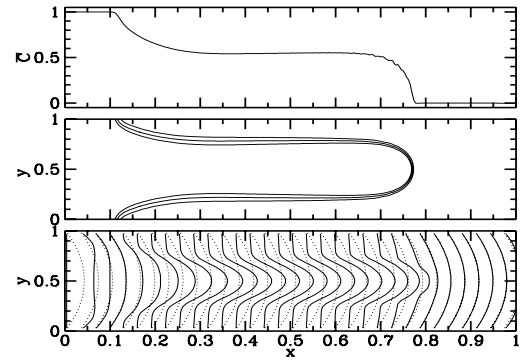
(a) $M = 1, N_{dt} = 0,5$



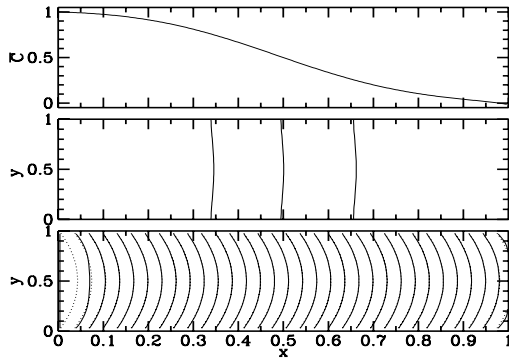
(b) $M = 1, N_{dt} = 512$



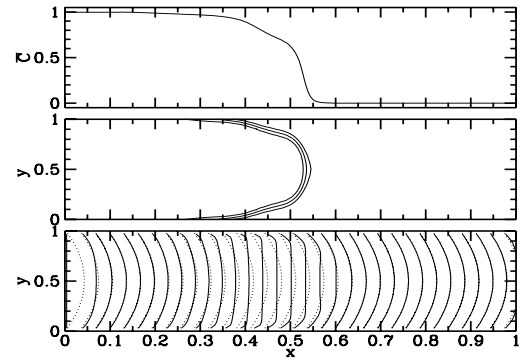
(c) $M = 100, N_{dt} = 0,5$



(d) $M = 100, N_{dt} = 512$



(e) $M = 0,01, N_{dt} = 0,5$



(f) $M = 0,01, N_{dt} = 512$

FIG. 1.4 – Concentration moyennée $\bar{c}$, isoconcentrations $c = 0,25, 0,5$ et $0,75$ et champ de vitesse obtenu par simulation du déplacement de deux fluides miscibles entre deux plaques parallèles. (D'après [63]).

détails l'approche théorique de Yang et Yortsos en l'étendant au cas où les deux fluides ont des densités différentes.

1.2.3 Effet de la gravité

L'effet d'une différence de densité entre les fluides a été étudié par Chen et Meiburg [15]. Pour des raisons de symétrie, ces auteurs se limitent au cas d'une cellule ou d'un tube vertical (1.1). La prise en compte des forces de gravité introduit un troisième paramètre de contrôle, la vitesse adimensionnée U , définie comme le rapport des forces visqueuses aux forces de gravité:

$$U = \frac{\eta_1 q}{\kappa \Delta \rho g} \quad (1.26)$$

où $\Delta \rho = \rho_1 - \rho_2$ est la différence entre la densité du fluide déplacé et celle du fluide injecté. Plus U est grand (en valeur absolue) et plus les forces visqueuses sont importantes comparées aux effets de la gravité. Dans ce mémoire, nous considérerons essentiellement la situation où la différence de densité stabilise l'écoulement ($\Delta \rho > 0$), i.e. le fluide le plus dense est situé sous le moins dense. Compte-tenu du choix d'orientation des axes (axe ox orienté dans le sens de l'écoulement), cette situation correspond à $U \geq 0$. Le cas où les deux fluides ont même densité correspond à la limite où $U \rightarrow \infty$.

Chen et Meiburg [15] observent les deux mêmes régimes, diffusifs et non diffusifs, décrits précédemment. La seule différence notable par rapport au cas purement visqueux, est l'observation, aux grands nombres de diffusion transverse, d'une petite pointe émergeant du doigt pour certaines valeurs de M et U .

L'existence de cette pointe a été confirmée par Petitjeans et Maxworthy [59], qui ont étudié expérimentalement le déplacement de deux fluides miscibles dans un tube vertical. Ces derniers ont observé l'émergence d'une petite pointe à l'avant du doigt lorsque la vitesse de ce dernier est inférieure à la vitesse maximale d'un profil de Poiseuille en tube. Rappelons que dans un tube, le rapport V_0 entre la vitesse maximale V_{max} d'un profil de Poiseuille et la vitesse moyenne q est $V_0 = V_{max}/q = 2$.

Dans le même régime d'écoulement, Petitjeans et Maxworthy ont mis en évidence l'existence de courants de recirculation à l'avant du doigt qui provoquent une déformation locale en forme de "plume". Cet effet est également observé dans les simulations numériques de Chen et Meiburg [15].

Avant de terminer ce paragraphe, notons que Petitjeans et Maxworthy [59] ont aussi étudié l'effet de la différence de densité entre les fluides lorsque le tube est horizontal. Dans ce cas, l'écoulement n'est plus axisymétrique, ce qui conduit à des comportements singuliers comme, par exemple, la déstabilisation du doigt observée lorsque le fluide injecté est plus léger que le déplacé (Fig.1.5). Notre étude ne portant pas ce type d'effets, toutes nos expériences ont été réalisées dans des cellules de Hele-Shaw ou des tubes verticaux.

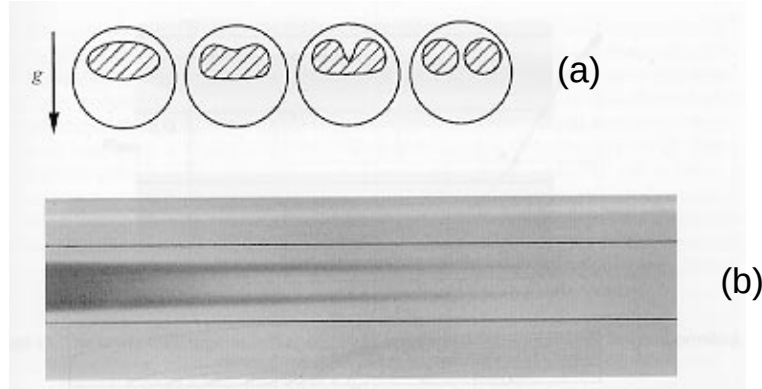


FIG. 1.5 – *Instabilité observée lors du déplacement en tube horizontal d’un fluide par un autre plus léger. (a) Schéma d’une coupe du doigt. (b) Vue de dessus. (D’après [59]).*

1.2.4 Conclusion

L’ensemble des travaux présentés jusqu’ici met en évidence l’existence de deux régimes asymptotiques très différents pour le déplacement de deux fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw. En régime diffusif (ou régime de Taylor), la diffusion homogénéise la solution dans l’épaisseur: le champ de concentration locale est donc pratiquement indépendant de z . Au contraire, en régime non diffusif, les deux fluides ne se mélangent quasiment pas et une langue de fluide injecté se développe entre les plaques.

La déstabilisation visqueuse se passe naturellement de manière assez différente suivant que l’écoulement se situe en régime diffusif ou non diffusif. Nous verrons qu’en régime diffusif, l’écoulement, qui peut être considéré comme bidimensionnel, est décrit par la loi de Darcy. En régime non diffusif, il faut prendre en compte la forme de l’interface entre les plaques et le problème est nettement plus complexe. Le mécanisme de sélection en longueur d’onde au seuil d’instabilité diffère donc d’un régime à l’autre.

Cette situation est d’ailleurs semblable au cas de fluides non miscibles. Rappelons que l’utilisation de la loi de Darcy dans le problème de Saffman-Taylor n’est valable que tant que les forces capillaires sont suffisamment importantes comparées aux forces visqueuses. Dans la limite des grands nombres capillaires, le problème devient tridimensionnel [65, 66, 75].

Dans la suite de ce chapitre, nous allons présenter les travaux consacrés à la digitation visqueuse de fluides miscibles dans chacun des deux régimes.

1.3 Digitation visqueuse de fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw en régime diffusif

1.3.1 Equation du déplacement de deux fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw en régime diffusif

Considérons le déplacement d'un fluide 1, de viscosité η_1 et de densité ρ_1 , par un fluide 2, de viscosité η_2 et de densité ρ_2 , dans une cellule de Hele-Shaw. Si la diffusion transverse est importante ($N_{dt} \ll 1$), la concentration locale $c(x, y, z, t)$ est homogène dans l'épaisseur (i.e. indépendant de z) et le profil de vitesse est très proche d'un profil de Poiseuille. En considérant des quantités moyennées sur l'épaisseur, l'écoulement peut donc être décrit par la loi de Darcy [28]:

$$\vec{V} = -\frac{\kappa}{\eta(\bar{c})} [\vec{\nabla}P - \rho(\bar{c})\vec{g}] \quad (1.27)$$

où κ est la perméabilité, égale à $\kappa = b^2/12$ en cellule de Hele-Shaw, et $\bar{c}$ est la concentration moyennée dans l'épaisseur. Rappelons que la loi de Darcy met en jeu des quantités moyennées à travers l'épaisseur de la cellule. $\vec{V}$ et $\vec{\nabla}P$ sont donc des vecteurs à deux dimensions dans le plan (oxy) (Fig. 1.1). La viscosité η et la densité ρ dépendent de la concentration en fluide injecté moyennée à travers l'épaisseur de la cellule. Elles vérifient $\eta(0) = \eta_2$, $\rho(0) = \rho_2$, $\eta(1) = \eta_1$ et $\rho(1) = \rho_1$.

L'équation d'évolution de $\bar{c}(x, y, t)$ s'obtient en moyennant l'équation de diffusion-convection (1.3) sur l'épaisseur [90]:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \vec{V} \vec{\nabla} \bar{c} = D_{\parallel} \Delta_{\parallel} \bar{c} + D_{\perp} \Delta_{\perp} \bar{c} \quad (1.28)$$

où $\Delta_{\parallel}$ et $\Delta_{\perp}$ représente les composantes de l'opérateur laplacien dans les directions parallèle et transverse à la vitesse. $D_{\parallel}$ et $D_{\perp}$ sont les coefficients de dispersion effectifs dans les directions parallèles et transverses par rapport à la direction de l'écoulement [1, 71]:

$$D_{\parallel} = D_m + \frac{b^2 V^2}{210 D_m} \quad (1.29)$$

$$D_{\perp} = D_m \quad (1.30)$$

En l'absence de réaction chimique entre les deux phases susceptible de provoquer des effets de "volume de mélange" (comme dans un mélange eau/alcool) et pour des vitesses inférieures à la vitesse du son¹, l'écoulement est incompressible de sorte que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1.31)$$

1. Cette condition est évidemment toujours réalisée dans la mesure où la loi de Darcy suppose que les forces inertielles sont négligeables.

1.3.2 Analogie avec un milieu poreux

Le déplacement de deux fluides miscibles dans un milieu poreux à deux dimensions est également décrit par les équations (1.27), (1.28) et (1.31) à condition de remplacer les quantités moyennées sur l'épaisseur de la cellule par des quantités moyennées sur une taille caractéristique grande devant la taille des pores (échelle mésoscopique) [28]. Seules les expressions de la perméabilité κ et des coefficients de dispersion transverse et longitudinale, qui dépendent de la structure du milieu poreux, changent [31].

Le mécanisme de mélange des fluides en milieux poreux est assez différent de celui à l'oeuvre en cellule de Hele-Shaw. A basse vitesse, les deux fluides se mélangent sous l'effet de la diffusion moléculaire. A haute vitesse en revanche, le mélange est essentiellement provoqué par la marche aléatoire des particules de fluides à travers le réseau désordonné de la matrice poreuse. Ce phénomène est appelé dispersion géométrique. L'expression de $D_{\parallel}$ et $D_{\perp}$ dépendent donc de la structure et de la nature du milieu poreux. En milieu poreux, augmenter la vitesse de l'écoulement permet seulement de modifier le mécanisme de mélange des fluides. Un régime non diffusif du type de celui décrit précédemment pour la cellule de Hele-Shaw ne peut pas être observé en milieux poreux.

Du fait de la similitude entre cellule de Hele-Shaw en régime diffusif et milieu poreux 2D, la plupart des travaux théoriques consacrés à la digitation visqueuse traitent simultanément les deux géométries. Il n'est pas question de recenser dans cette section l'ensemble des travaux consacrés à la digitation visqueuse en milieux poreux. Nous allons nous contenter d'exposer les résultats les plus utiles à la compréhension des expériences en cellule de Hele-Shaw.

1.3.3 Analyse de stabilité linéaire sans diffusion

Pour simplifier, nous allons d'abord considérer le cas où la diffusion est négligeable (le nombre de Péclet tend vers l'infini). Nous supposons néanmoins que la loi de Darcy est toujours applicable. Dans cette limite, les deux fluides ne se mélangent pas et le système d'équations (1.27), (1.28) et (1.31) est identique à celui décrivant le déplacement de deux fluides non miscibles avec une tension de surface nulle. L'analyse de stabilité linéaire pour des fluides miscibles à Pe infini s'obtient donc simplement en annulant la tension de surface dans l'analyse du cas non miscible (équation (1.17)) présentée dans la première partie de ce mémoire. Pour une cellule verticale, cela conduit à la relation de dispersion entre le taux de croissance σ et le vecteur d'onde k de la perturbation [28]:

$$\sigma = \frac{1}{\eta_1 + \eta_2} \left[q(\eta_1 - \eta_2) - \frac{\Delta\rho g b^2}{12} \right] k \quad (1.32)$$

Quatre cas sont à considérer suivant que les différences de viscosité et de densité sont stabilisantes et/ou déstabilisantes. En se restreignant au cas d'une différence de densité

stabilisante ($\Delta\rho > 0$ i.e. $U > 0$), on constate que l'écoulement est instable pour $M > 1$ et q supérieure à la valeur critique (Fig.1.6b):

$$q_c = \frac{b^2 \Delta\rho g}{12 (\eta_1 - \eta_2)} \quad (1.33)$$

Dans le cas contraire ($M < 1$ ou $M > 1$ avec $q < q_c$), l'écoulement est stable (Fig.1.6a). Exprimé en fonction des paramètres de contrôle M et U , la condition d'instabilité s'écrit:

$$U > U_c \text{ avec } U_c = \frac{M}{M-1} \quad (1.34)$$

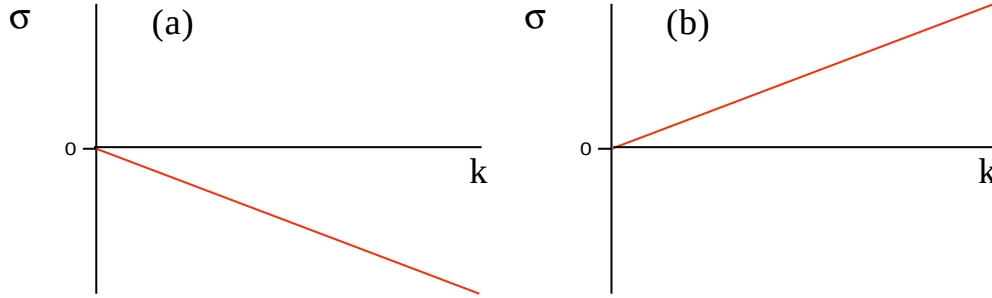


FIG. 1.6 – Relation de dispersion $\sigma(k)$ en l'absence de diffusion et dans le cas d'une différence de densité stabilisante. (a) écoulement stable ($M < 1$ ou $M > 1$ et $U < U_c$). (b) écoulement instable ($M > 1$ et $U > U_c$).

La différence de densité stabilisante impose l'existence d'une vitesse critique de déstabilisation. Par contre, elle ne suffit pas à sélectionner une longueur d'onde. La perturbation est en effet d'autant plus instable que sa longueur d'onde est faible (i.e. k est grand) (Fig.1.6). Cette absence de sélection en longueur d'onde s'explique mathématiquement par le fait que les termes d'origine visqueuse et ceux d'origine gravitationnelle apparaissent en facteur de la même puissance de k dans l'expression du taux de croissance (1.32).

1.3.4 Analyse de stabilité linéaire avec diffusion

L'analyse de stabilité linéaire du déplacement de fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw linéaire à bas nombre de Péclet (ou milieu poreux 2D) a été effectuée par Tan et Homsy [76]². Les auteurs considèrent le cas simplifié de deux fluides de même densité

² La première analyse de stabilité linéaire prenant en compte la diffusion est due à Chuoke. Cependant ce travail, vieux d'une quarantaine d'années, n'a pas été publié [28].

($U \rightarrow \infty$) avec une dispersion isotrope et indépendant de la vitesse: $D_{\parallel} = D_{\perp} = D$. Avec ces hypothèses, les équations du mouvement se simplifient considérablement [76]:

$$\vec{V} = -\frac{\kappa}{\eta(\bar{c})} \vec{\nabla} P \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + (\vec{V} \vec{\nabla}) \cdot \bar{c} = D \Delta \bar{c} \quad (1.36)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1.37)$$

En considérant une marche de concentration comme condition initiale à $t = 0$, ces équations admettent comme état de base un front de concentration en mouvement à la vitesse q dans la direction ox et qui s'étale au cours du temps sous l'effet de la diffusion moléculaire (Fig.1.7a):

$$\bar{c}_0(x,t) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - qt}{2\sqrt{Dt}} \right) \right] \quad (1.38)$$

L'état de base n'étant pas stationnaire, l'analyse de sa stabilité est assez complexe. Pour simplifier le calcul, les auteurs considèrent un état de base quasi-stationnaire. Cette approximation suppose que le temps caractéristique d'évolution de l'instabilité est très petit devant le temps caractéristique d'évolution de l'état de base. On peut alors "geler" la forme de l'état de base à un instant t_0 et étudier sa réponse à une perturbation des champs de vitesse et de concentration.

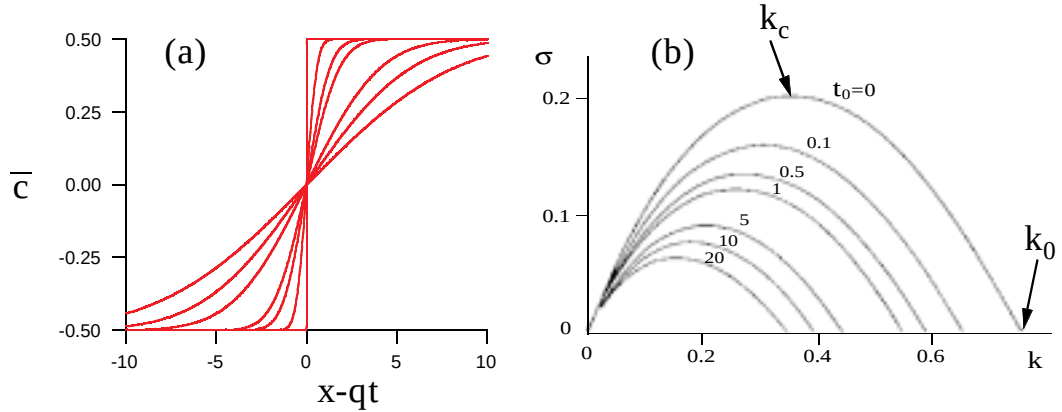


FIG. 1.7 – (a) Profil de concentration de l'état de base dans le référentiel en mouvement à la vitesse q à différents instants successifs $t_0 = 0, 0, 1, 0, 5, 1, 5, 10$ et $20D/q^2$. (b) taux de croissance σ en fonction de k pour différentes valeurs de t_0 correspondant aux états de base de (a). k est normalisé par q/D , $\sigma(0)$ par D/q^2 et t_0 par q^2/D . (D'après [77]).

Tan et Homsy ont calculé numériquement la relation de dispersion $\sigma(t_0)$ en fonction de k pour différentes valeurs du temps t_0 et pour une relation viscosité/concentration exponentielle $\eta(\bar{c}) = \eta_1 e^{\bar{c} \ln M}$. Lorsque $M < 1$, l'écoulement est stable. En revanche, pour

$M > 1$, il existe, quel que soit t_0 , une bande de vecteurs d'onde instables (i.e pour lesquels $\sigma(t_0, k) > 0$) avec un mode de déstabilisation préférentiel k_c (correspondant au taux de croissance maximum) et un vecteur d'onde de coupure k_0 au delà duquel le taux de croissance est négatif (Fig.1.7b). Le déplacement est donc instable. Lorsque le temps augmente, les taux de croissance sont de plus en plus faibles et les modes de coupure et de déstabilisation préférentielle évoluent vers des vecteurs d'onde plus faibles (i.e. des longueurs d'onde plus grandes) (Fig.1.7b). Cet effet est dû à la diffusion qui "étale" la perturbation et atténue le gradient de viscosité au cours du temps ce qui rend l'écoulement moins instable.

Comme pour l'instabilité de Saffman-Taylor, c'est l'existence d'un rapport de viscosité défavorable qui déstabilise le déplacement de deux fluides miscibles. Le mécanisme stabilisateur est en revanche radicalement différent: au lieu de la tension de surface, c'est la diffusion moléculaire, qui en atténuant la différence de viscosité entre les deux fluides, restabilise l'écoulement. La compétition entre ces deux effets antagonistes conduit à la sélection d'une longueur de déstabilisation préférentielle.

Pour $t_0 = 0$, l'état de base est une marche de concentration. La relation de dispersion peut alors être calculée analytiquement et les modes de déstabilisation préférentielles et de coupure sont donnés par [28, 76]:

$$k_c = 0,0118 \frac{q}{D} \ln M \quad (1.39)$$

$$k_0 = \frac{q}{D} \frac{\ln M}{4} \quad (1.40)$$

Dans la limite où le nombre de Péclet tends vers l'infini, k_c et k_0 tendent vers l'infini de sorte qu'on retrouve les résultats décrits dans la section précédente.

Tan et Homsy ont également étudié [76] le cas plus réaliste d'une dispersion anisotrope. Dans le cas d'une faible dispersion transverse, les longueurs d'ondes prévues par l'analyse de stabilité linéaire sont légèrement plus faibles que dans le cas isotrope. Avant de terminer ce paragraphe, notons que l'analyse de la stabilité de l'écoulement vertical de deux fluides de densité différente a été effectuée par Manickam et Homsy [41].

Les prévisions de ces analyses de stabilité linéaire ont été confirmées par plusieurs études expérimentales en milieux poreux [40, 57, 72]. Les résultats expérimentaux de Loggia, Rakotomalala et Salin [40] confirment, en particulier, la dépendance du taux de croissance avec la largeur de la zone de mélange du front de concentration prévue par Tan et Homsy.

Il n'existe par contre actuellement aucune étude expérimentale de digitation visqueuse miscible en cellule de Hele-Shaw en régime diffusif.

1.4 Digitation visqueuse en cellule de Hele-Shaw en régime non diffusif

1.4.1 Etudes expérimentales

Les deux seules études expérimentales de digitation visqueuse de fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw réalisées à ce jour se situent dans la limite de grands nombres de Péclet ($Pe \gg 1$) [55, 73].

En 1984, Paterson [55] étudie le déplacement radial divergent de deux fluides miscibles en cellule circulaire. L'expérience consiste à injecter de l'eau au centre d'une cellule de Hele-Shaw remplie de solution de glycérol (plus visqueuse). Plusieurs séries d'expériences ont été réalisées en faisant varier le rapport de viscosité, l'épaisseur entre les plaques ainsi que le débit. Ce dernier était cependant assez important pour que l'interface entre les deux fluides reste abrupte pendant toute la durée de l'expérience. Bien que Paterson n'en donne pas d'estimation, il est donc clair que ses expériences ont été conduites pour de grands nombres de Péclet. Paterson observe des doigts qui se forment avec une taille caractéristique indépendante du rapport de viscosité M et du débit d'injection. (Fig.1.8):

$$\lambda \approx 4b \quad (1.41)$$

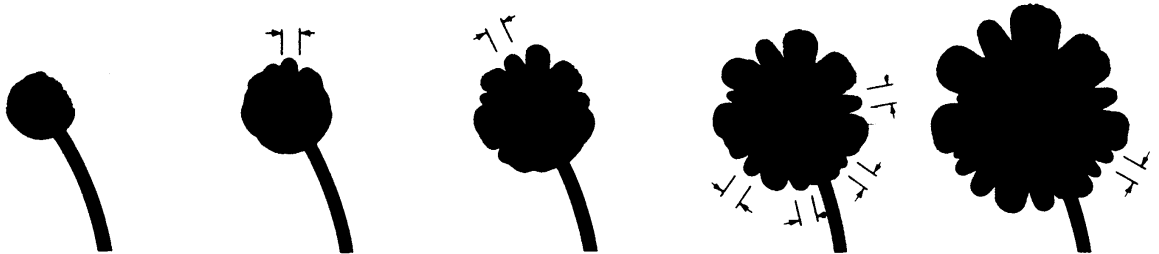


FIG. 1.8 – *Digitation de fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw circulaire. Les flèches correspondent à un intervalle de $4b$. (D'après [55]).*

Plus récemment, Snyder et Taits [73] ont étudié expérimentalement la digitation de fluides miscibles de densité identique dans une cellule rectangulaire horizontale. Notons que l'épaisseur de la cellule (de 2 à 9cm) est commensurable avec les autres dimensions (longueur 50cm, largeur 30cm), ce qui n'est pas le cas pour une cellule de Hele-Shaw "classique". L'épaisseur de la cellule étant importante, le nombre de Péclet des écoulements de Snyder et Taits est grand. Là encore, la longueur d'onde du motif d'instabilité (i.e. la taille caractéristique des doigts), observée sur quatre décades de rapport de viscosité, ne dépend que de l'épaisseur de la cellule (Fig.1.9):

$$\lambda \approx 2b \quad (1.42)$$

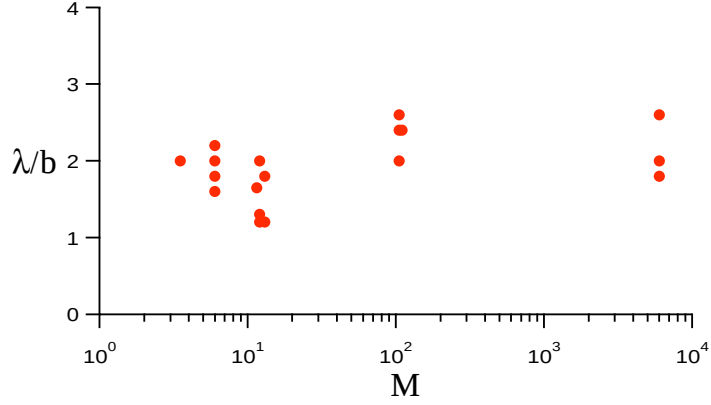


FIG. 1.9 – *Longueur d’onde des doigts normalisée par l’épaisseur de la cellule rectangulaire en fonction du rapport de viscosité M . (D’après [73]).*

L’analyse de stabilité linéaire de Tan et Homsy [76] prévoit une longueur d’onde tendant vers 0 dans la limite où le nombre de Péclet tend vers l’infini. La longueur d’onde observée expérimentalement par Paterson et Snyder et Taitz ne peut donc pas être interprétée comme un cas limite de cette analyse. À $Pe \rightarrow \infty$, il est clair qu’un mécanisme prend le relai de la diffusion moléculaire pour amortir la croissance des faibles longueurs d’onde.

1.4.2 Calcul de la longueur d’onde par minimisation de la dissipation visqueuse

Pour expliquer ses résultats expérimentaux, Paterson propose une théorie selon laquelle, en l’absence de diffusion, la longueur d’onde est sélectionnée par la dissipation visqueuse d’énergie au sein de l’écoulement [55]. Ce modèle constitue aujourd’hui la seule alternative à l’analyse de stabilité linéaire présentée ci-dessus. Nous allons donc en exposer brièvement le principe.

Considérons le déplacement radial divergent d’un fluide 1 par un fluide 2 dans une cellule circulaire. La vitesse moyenne d’injection q est constante. Les deux fluides ont même densité et sont supposés miscibles avec un coefficient de diffusion nul ou, ce qui revient au même, non miscibles avec une tension de surface nulle. Pour simplifier, la viscosité du fluide injecté est supposée négligeable. Toute la dissipation visqueuse se produit donc au sein du fluide 1. En l’absence d’instabilité, l’état de base est une interface circulaire en expansion de rayon $R(t) = \sqrt{Qt/\pi}$. Si on superpose une perturbation sinusoïdale à l’état de base, l’équation de l’interface s’écrit :

$$r(t) = R(t) + A(t) \cos(n\theta) \quad (1.43)$$

où n et A sont le nombre d'ondes et l'amplitude de la perturbation. La déformation de l'interface augmente la dissipation totale d'énergie dans l'écoulement. Selon Paterson, la perturbation effectivement sélectionnée correspond aux valeurs de n et A qui minimisent l'excès de dissipation.

Le calcul de ce dernier suppose la connaissance du champ de vitesse dans les trois dimensions. Paterson fait l'hypothèse d'un profil de vitesse parabolique entre les plaques. Le calcul de ce profil, compte-tenu des conditions aux limites, mène à l'expression suivante de l'excès de dissipation [55]:

$$\dot{E} = 6\eta_1 b \beta n \left(\frac{\beta}{b^2} + \frac{2n(n+1)\beta}{5R^2} - \frac{QA}{b^2\pi R} - \frac{2(n+1)QA}{\pi R^3} \right) \quad (1.44)$$

avec:

$$\beta = \frac{1}{n} \left(\frac{QA}{2\pi R} + R\dot{A} \right) \quad (1.45)$$

Paterson minimise ensuite $\dot{E}$ par rapport à $\dot{A}$, ce qui conduit à la relation suivante entre le taux de croissance de la perturbation $\sigma = \dot{A}/A$ et le nombre d'onde n :

$$\sigma = \frac{5Q(n-1)}{2\pi[5R^2 + 2b^2n(n+1)]} \quad (1.46)$$

Le nombre d'onde qui correspond au taux de croissance maximum est:

$$n = 1 + \sqrt{2 + \frac{5}{2} \frac{R^2}{b^2}} \quad (1.47)$$

La longueur d'onde correspondante $\lambda = 2\pi R/n$ s'écrit donc:

$$\lambda = \frac{2\pi R}{1 + \sqrt{2 + \frac{5}{2} \frac{R^2}{b^2}}} \quad (1.48)$$

Expérimentalement, la déstabilisation se produit pour $R \gg b$ de sorte que:

$$\lambda \approx 4b \quad (1.49)$$

Bien que la théorie de Paterson conduise à des résultats en accord avec les observations expérimentales, son modèle reste sujet à caution pour plusieurs raisons. La première est une raison de fond: il n'existe pas de principe général selon lequel un écoulement évolue vers une configuration qui minimise la dissipation d'énergie.

L'autre raison est plus "technique". Pour calculer la dissipation visqueuse, Paterson fait l'hypothèse d'un profil de vitesse parabolique entre les plaques (hypothèse de lubrification). Cette hypothèse n'est valable que pour un écoulement se produisant à des échelles de tailles caractéristiques grandes devant b . Paterson calcule l'excès de dissipation, c'est-à-dire la dissipation sur une zone de taille caractéristique λ autour de l'interface. Or le calcul conduit à une longueur d'onde λ de l'ordre de b , ce qui contredit l'hypothèse de lubrification.

Les travaux numériques de Chen et Meiburg [15], Yang et Yortsos [87] et Rakotomalala, Salin et Watzky [63, 82] montrent de plus que, à fort nombre de Péclet, le profil de vitesse entre les plaques n'est pas un profil de Poiseuille (sauf si $M = 1$) en contradiction avec l'hypothèse de Paterson. Notons que les courants de recirculation au voisinage de l'interface jouent très certainement un rôle important dans la dissipation d'énergie, qui n'est pas pris en compte dans l'analyse de Paterson.

La dernière critique que l'on peut faire est la suivante. Paterson minimise l'excès de dissipation $\dot{E}$ uniquement par rapport à $\dot{A}$. En toute logique, il faudrait minimiser l'excès de dissipation simultanément par rapport à $\dot{A}$ et n et déduire des deux équations ainsi obtenues la longueur d'onde. Nous avons cependant vérifié que les deux méthodes mènent au même résultat dans ce cas précis.

Notons que Snyder et Taitz ont refait le même calcul en cellule linéaire et prévoient à nouveau une longueur d'onde $\lambda = 4b$, ce qui correspond à peu près à leurs observations expérimentales.

1.5 conclusion

Au début de ce travail de thèse, les travaux sur l'instabilité visqueuse entre fluides miscibles concernaient donc essentiellement les milieux poreux, les travaux en cellule de Hele-Shaw étant en revanche fort peu nombreux.

Bien qu'il n'y ait aucune étude expérimentale du déplacement de fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw à bas nombre de Péclet, le phénomène de digitation visqueuse en régime diffusif semble assez bien compris.

Le cas des grands nombres de Péclet est par contre plus problématique. Les études de la forme de l'écoulement [15, 59, 63, 87] montrent en effet la formation d'une "langue" de fluide injecté entre les plaques de la cellule. Cette "langue" constitue probablement l'état de base dont la déstabilisation conduit au motif d'instabilité observé par Paterson et Snyder et Taitz [55, 73]. Pour confirmer ce scénario, il manque une étude expérimentale complète de la structure de l'écoulement entre les plaques de la cellule dans la limite des grands nombres de Péclet. Celle-ci constitue la plus grande part du travail présenté dans cette partie du mémoire.

Il vaut mieux pomper même s'il ne se
passe rien que risquer qu'il se passe
quelque chose de pire en ne pompant pas.

Les devises Shaddock.

Chapitre 2

Montage et protocole expérimental

Nous avons réalisé une série de travaux expérimentaux destinés à étudier la digitation visqueuse de fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw. Pour éviter le développement d'instabilités gravitationnelles comparables à celles observées par Petitjeans et Maxworthy [59] en tube horizontal et afin de conserver la symétrie par rapport au plan médian de la cellule, nous nous sommes restreints à l'étude de déplacements verticaux.

Nous présentons dans ce chapitre le montage et les techniques expérimentales utilisées lors de cette étude. Le montage et le protocole expérimental sont décrits dans les sections 2.1, 2.2 et 2.3. La partie 2.4 est consacrée à la mesure des coefficients de diffusion qui nous a permis d'évaluer le nombre de Péclet de chaque écoulement. Dans la dernière partie, nous présentons la méthode de mesure des fronts de concentration moyennée dans l'épaisseur.

2.1 Description de la cellule de Hele-Shaw

Nos expériences ont été réalisées dans une cellule de Hele-Shaw verticale composée de deux plaques de verre de largeur 15cm et de longueur 80cm . Leur épaisseur, $1,2\text{cm}$, est suffisante pour éviter toute flexion des plaques (Fig.2.1). Les deux plaques sont séparées par un joint découpé dans une feuille de mylar d'épaisseur calibrée. Ce matériau ne s'écrase pas, ce qui permet d'obtenir une cellule d'épaisseur très uniforme. Nous avons travaillé dans des cellules d'épaisseur $0,48\text{mm}$, $0,96\text{mm}$ et $1,92\text{mm}$. Les plaques de verre et le joint sont maintenus ensemble par 4 mâchoires métalliques qui appliquent une pression de serrage uniforme, grâce à des vis de serrage espacées de 5cm .

2.2 Caractéristiques des fluides utilisés

Les fluides utilisés lors des expériences sont des huiles silicones Rhodosil 47¹. Ces huiles, composées de chaînes polymères linéaires (silicone dimethylpolysiloxanique) plus ou moins longues suivant la viscosité souhaitée, sont totalement miscibles les unes avec les autres. Elles permettent de couvrir une large gamme de viscosités différentes (de 2 à 500cp en ce qui nous concerne) et présentent plusieurs comportements intéressants dans le cas de nos expériences:

1. Au-dessus de 10cp, la densité des huiles varie peu avec leur viscosité ce qui permet d'explorer une large gamme de rapports de viscosité différents sans modifier de façon significative la différence de densité entre les fluides.
2. Le mélange de deux huiles Rhodorsil différentes conduit à une huile de viscosité et de densité intermédiaire. Ceci permet d'obtenir deux fluides de même viscosité mais de densités différentes. On peut donc également explorer une large gamme de différences de densité sans modifier de façon significative le rapport de viscosité entre les fluides.
3. Les huiles Rhodorsil sont chimiquement inertes, ce qui évite des effets de variation de volume comme dans un mélange eau/alcool. Cette propriété garantit l'incompressibilité des fluides dans nos expériences.
4. La viscosité et la densité des huiles Rhodorsil varient lentement avec la température comparativement à d'autres huiles ou à des solutions de glycérol ou de sucre. A titre d'exemple, la viscosité de l'huile R47V100 varie de 106cp à 20 °C à 92cp à 25 °C alors que le mélange eau/glycérol correspondant passe de 106cp à 77cp.

Avec ces fluides, nous avons pu couvrir une gamme de différences de densité allant de 10^{-2} à $10^{-1} Kg m^{-3}$ tandis que le rapport de viscosité M varie entre 0,3 et 250. Le tableau 2.1 résume les caractéristiques des différentes huiles Rhodorsil (pures et mélangées) utilisées au cours des expériences. Les viscosités ont été mesurées avec un rhéomètre à gradient de vitesse imposé². Les densités des huiles ont été mesurées avec un densimètre.

2.3 Condition d'injection et protocole expérimental

Pour obtenir une interface initiale horizontale et éviter de mélanger les deux fluides, le fluide le plus dense est situé sous le moins dense dans toutes nos expériences. Dans toutes nos expériences, la différence de densité est donc stabilisante de sorte que $U > 0$. Comme l'huile la plus dense est également la plus visqueuse, le rapport de viscosité est

1. Commercialisé par Rhône Poulenc Chimie Fine.

2. Contraves, lower shear 30. Le gradient de vitesse imposé varie de 10^{-3} à $118s^{-1}$.

Huile Rhodorsil	Viscosité dynamique à 20 °C (Pa s)	Densité à 20 °C (Kg/m ³)
R47 V 2	$(1,9 \pm 0,1) 10^{-3}$	859 ± 2
R47 V 5	$(4,5 \pm 0,1) 10^{-3}$	921 ± 2
R47 V 10	$(8,7 \pm 0,1) 10^{-3}$	935 ± 2
R47 V 20	$(19,9 \pm 0,1) 10^{-3}$	953 ± 2
R47 V 50	$(50,8 \pm 0,3) 10^{-3}$	959 ± 2
R47 V 100	$(106,2 \pm 0,5) 10^{-3}$	965 ± 2
R47 V 300	$(288,6 \pm 0,5) 10^{-3}$	967 ± 2
R47 V 500	$(496,0 \pm 1,0) 10^{-3}$	968 ± 2
16% 47V2 / 84% 47v10	$(2,1 \pm 0,1) 10^{-3}$	870 ± 2
75% 47V50 / 25% 47V20	$(43,0 \pm 0,3) 10^{-3}$	960 ± 2
68% 47V100 / 32% 47V20	$(64,6 \pm 0,3) 10^{-3}$	960 ± 2

TAB. 2.1 – *Viscosité dynamique et densité des huiles Rhodorsil utilisées dans les expériences (à l'état pure ou sous forme de mélange). Dans le cas des mélanges, les proportions indiquées sont massiques.*

inférieur ou supérieur à 1 suivant le sens de l'écoulement (vertical ascendant ou vertical descendant).

Le protocole expérimental pour un écoulement descendant est le suivant. La cellule est d'abord remplie de fluide déplacé (le plus dense), injecté dans la cellule par la vanne D tandis que l'air est chassé par la vanne A (Fig.2.1). Cette opération est réalisée grâce à la gravité puisque le fluide initial est contenu dans un réservoir situé au-dessus de la cellule. L'injection est stoppée (fermeture de la vanne D) lorsque le niveau de liquide se trouve juste au-dessous de la vanne C. On injecte alors le deuxième fluide par la vanne C à faible débit de façon à ce qu'il entre très doucement en contact avec le premier fluide en coulant le long des parois de la cellule. Lorsque le niveau de la vanne B est atteint, on continue le remplissage de la cellule par cette vanne (fermeture de C, ouverture de B) avec un débit plus élevé jusqu'à ce que tout l'air soit chassé de la cellule. Cette procédure de remplissage prenant quelques minutes, la diffusion moléculaire mélange les deux fluides sur une zone de l'ordre de 0,1mm autour de l'interface.

Une fois la cellule remplie, la vanne A est fermée et la D est ouverte. Le fluide 2 est ensuite injecté à débit constant en B au moyen d'une pompe à seringues³. Pour augmenter la précision sur le débit, le moteur pas à pas de la pompe est piloté par des impulsions délivrées par un générateur de tension programmable, lui même piloté par un ordinateur. Avec ce système, la précision sur le débit imposé par la pompe est de 2,5%. L'avantage d'une pompe à seringues est que le débit est maintenu constant avec une très bonne

3. Pharmacia, modèle P6000

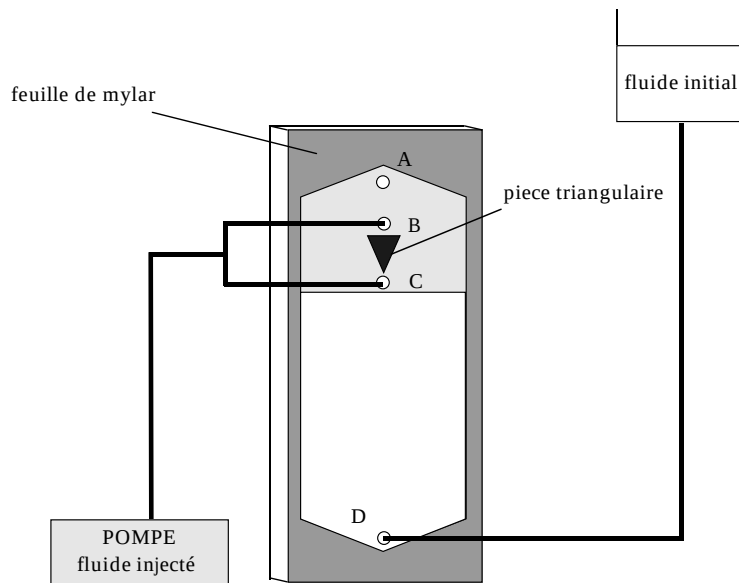


FIG. 2.1 – *Schéma de la cellule de Hele-Shaw.*

précision, tant que la seringue n'est pas arrivée en "bout de course". Ce ne serait pas le cas avec une pompe péristaltique dont les "à-coups" de débit peuvent provoquer des artefacts expérimentaux notamment si l'on étudie des instabilités.

La pièce de mylar de forme triangulaire (Fig.2.1) disposée entre les vanne B et C permet de supprimer le courant divergent qui serait issu d'un simple point source. Cette pièce assure donc un champ de vitesse uniforme sur toute la largeur de la cellule. Pendant l'écoulement, le fluide 1 est refoulé dans le vase d'expansion situé au-dessus de la cellule.

Entre deux écoulements, la cellule est rincée plusieurs fois avec de l'huile déplacée. Avant chaque série d'expériences impliquant un nouveau couple d'huiles, la cellule est démontée et lavée.

2.4 Mesure des coefficients de diffusion

Afin de quantifier l'importance des effets diffusifs dans nos expériences, nous avons mesuré le coefficient de diffusion moléculaire de plusieurs couples d'huiles Rhodorsil. La méthode de mesure utilisée est basée sur l'effet mirage, c'est à dire la déviation d'un faisceau lumineux dans un milieu d'indice continûment variable. Cette méthode classique est décrite dans "Optics" de Sommerfeld [74].

La méthode de mesure consiste à placer dans une cuve rectangulaire de largeur W deux huiles, l'une au-dessus de l'autre (Fig. 2.2). Sous l'effet de la diffusion moléculaire, il se forme une zone de mélange, dont la largeur augmente proportionnellement à la racine carrée du temps. Un faisceau laser éclaire la cuve sous incidence normale. Dans les zones de fluide pur, le faisceau n'est pas dévié et émerge de la cuve parallèlement à l'axe oy . Dans

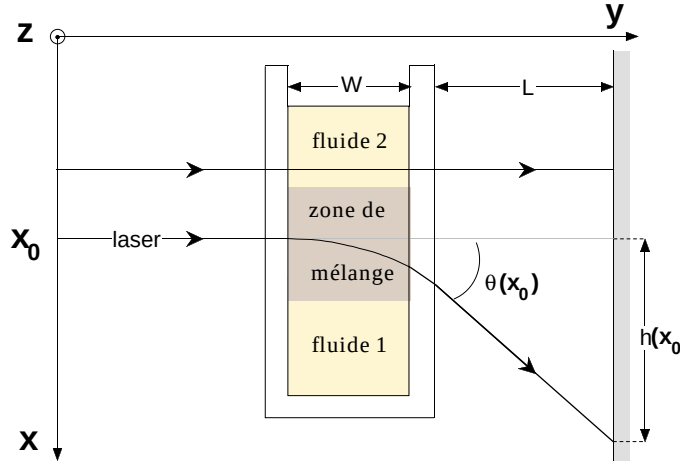


FIG. 2.2 – Schéma de la mesure du coefficient de diffusion: deux liquides sont placés l'un au-dessus de l'autre dans une cuve rectangulaire. Le gradient de concentration, résultant du mélange diffusif des deux fluides, crée un gradient d'indice optique qui dévie d'un angle θ un faisceau laser incident.

la zone de mélange, le gradient de concentration crée un gradient d'indice $n(x)$ le long de la direction ox qui dévie le faisceau d'un angle α par rapport à l'axe oy . Considérons un rayon incident qui pénètre sous incidence normale dans la cuve à l'altitude x_0 (Fig. 2.2). Le faisceau laser entrant n'est dévié ni à l'interface air-verre ni à l'interface verre-huile. A partir des lois de Descartes, on montre que la déviation du rayon lumineux au sein de la zone de mélange dépend du gradient d'indice local suivant l'équation:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \quad (2.1)$$

où α désigne l'angle d'inclinaison du rayon par rapport à l'axe oy . Si l'on suppose que la déviation du faisceau est faible (ou, ce qui revient au même, que l'indice $n(x)$ est une fonction lentement variable de x), il vient en intégrant l'équation (2.1) sur la largeur de la cuve:

$$\alpha = W \frac{1}{n(x_0)} \frac{\partial n}{\partial x}(x_0) \quad (2.2)$$

Le faisceau est ensuite dévié à l'interface fluide/verre. La loi de Descartes appliquée dans l'hypothèse d'angles faibles permet de calculer l'angle β du faisceau avec l'axe oy à la sortie de l'interface fluide/verre:

$$\beta = \frac{n(x_0)}{n_v} \alpha \quad (2.3)$$

où n_v est l'indice optique du verre. Après une ultime déviation à l'interface verre-air, le faisceau émerge de la cuve avec un angle final $\theta(x_0)$:

$$\theta(x_0) = n_v \beta = W \frac{\partial n}{\partial x}(x_0) \quad (2.4)$$

A la sortie de la cuve, le faisceau est projeté sur un écran, dont la distance L à la cuve est très grande devant la largeur W de cette dernière. La distance h séparant sur l'écran l'image du faisceau dévié de son image sans déviation s'écrit:

$$h(x_0) = L \tan \theta \approx L \theta(x_0) = LW \frac{\partial n}{\partial x}(x_0) \quad (2.5)$$

Il reste à relier le gradient d'indice au gradient de concentration. L'indice optique des huiles Rhodorsil est compris entre 1,39 (pour la R47 V2) et 1,40 (pour la R47 V500). La différence d'indice entre deux huiles silicone étant toujours faible, l'indice peut être considéré comme proportionnel à la concentration locale $c(x_0, t)$ de l'un des deux fluides, par exemple le 2 [74]:

$$n(x_0) = n_0 + a c(x_0, t) \quad (2.6)$$

où n_0 est l'indice du milieu pour $c = 0$ et a le coefficient de proportionnalité. La déviation du faisceau est donc proportionnelle au gradient de concentration:

$$h(x_0) = aLW \frac{\partial c}{\partial x}(x_0) \quad (2.7)$$

En supposant que le coefficient de diffusion moléculaire D_m est indépendant de la concentration, le profil de concentration à l'instant t est donné par:

$$c(x_0, t) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x_0/2\sqrt{D_m t}} du e^{-u^2} \right] \quad (2.8)$$

La déviation du faisceau est donc une gaussienne:

$$h(x_0) = aLW \frac{1}{\sqrt{\pi D_m t}} e^{-x_0^2/4D_m t} \quad (2.9)$$

En pratique, la cellule est éclairée par une nappe laser inclinée de 45° par rapport à la verticale de façon à explorer simultanément les déviations correspondant à des hauteurs $x_0(z)$ différentes. La figure (2.3a) montre un exemple de nappe laser observée sur un écran après traversée de la cuve. Conformément aux prédictions de l'équation (2.9), sa forme est celle d'une gaussienne modifiée par l'inclinaison du faisceau et dont la largeur à mi-hauteur varie au cours du temps suivant la loi $d = 4\sqrt{\ln(2)D_m t}$. En suivant l'évolution au cours du temps de la largeur à mi-hauteur de cette gaussienne, il est possible de calculer le coefficient de diffusion.

En pratique, cette largeur est mesurée à partir d'images du faisceau projeté sur l'écran acquises avec une caméra CCD. L'observation de l'ombre projetée sur l'écran d'un obstacle déplacé le long de la face arrière de la cuve permet de faire la correspondance entre la distance mesurée sur l'écran et la largeur "réelle" du front de diffusion. La figure 2.3b représente l'évolution du carré de la largeur de la gaussienne au cours du temps. C'est une droite de pente $p = 16 \ln(2) D_m$. Une régression linéaire sur les points expérimentaux

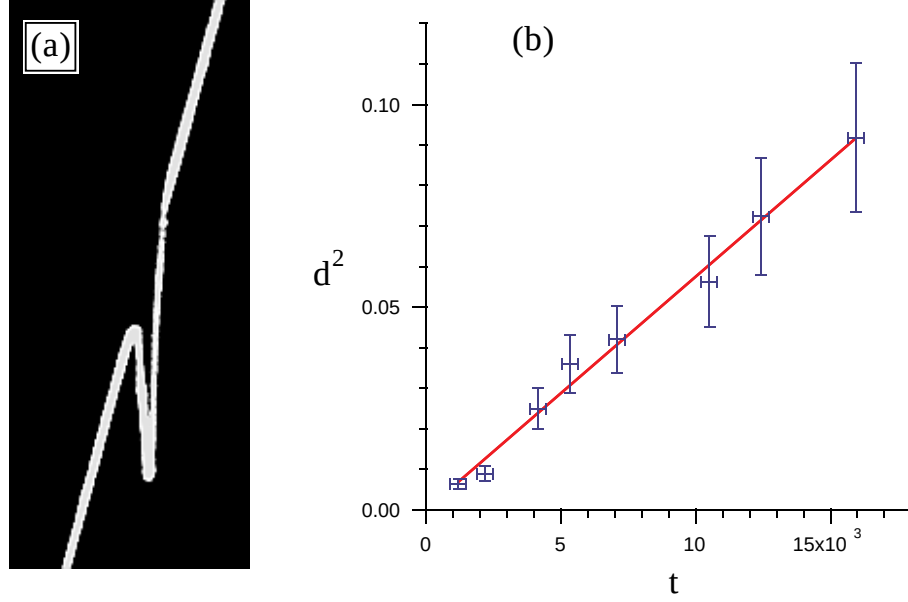


FIG. 2.3 – (a) Nappe laser projetée sur un écran après traversée de la cuve. (b) Carré de la largeur de la gaussienne (en cm^2) au cours du temps (en s) pour le couple d’huiles Rhodorsil V10/V300: les croix correspondent aux mesures expérimentales et la ligne continue à l’ajustement de ces points par une droite au moyen d’une régression linéaire.

couple	$D_m(\text{cm}^2/\text{s})$
V2/V300	$(12 \pm 1) 10^{-7}$
V2/V100	$(8 \pm 1) 10^{-7}$
V10/V50	$(5 \pm 1) 10^{-7}$
V10/V300	$(5 \pm 1) 10^{-7}$

TAB. 2.2 – Coefficients de diffusion de quelques couples d’huiles Rhodorsil.

permet de mesurer la pente de cette droite et d’en déduire le coefficient de diffusion moléculaire ainsi que l’incertitude associée. Le tableau ci-dessous donne les valeurs des coefficients de diffusion mesurés pour quelques couples d’huile Rhodorsil.

Cette technique de mesure est peu précise et ne donne accès qu’à l’ordre de grandeur du coefficient de diffusion pour deux raisons. D’une part, la différence d’indice entre les huiles, et donc la déviation du faisceau laser sont faibles, ce qui diminue la précision de la mesure de la largeur à mi-hauteur. Nous avons d’autre part supposé le coefficient de diffusion indépendant de la concentration locale. Expérimentalement, on observe cependant une dissymétrie de la gaussienne, plus raide du côté du fluide le plus visqueux et le plus lourd. Cet effet traduit la dépendance en concentration du coefficient de diffusion. Il a été également observé, mais de manière plus intense, par Petitjeans et Maxworthy [59] avec des solutions de glycérol.

2.5 Acquisition des données et mesure de la concentration moyennée dans l'épaisseur de la cellule

Afin de distinguer les deux fluides, l'huile injectée est colorée avec du Bleu Vif Organol⁴, colorant bleu qui se présente sous forme de poudre. Le protocole de coloration est le suivant: du bleu vif organol est dissous dans l'huile rhodorsil jusqu'à saturation (précipitation et sédimentation du colorant). Le mélange est ensuite filtré de façon à éliminer les agrégats de colorant non dissous. De cette façon, la concentration en colorant est proche de sa valeur de saturation et le contraste entre les deux fluides est maximum. Nous avons vérifié que les modifications de viscosité et de densité des huiles dues à l'ajout de colorant sont négligeables.

Les expériences sont filmées avec une caméra CCD. Pendant l'expérience, des images sont enregistrées sur bandes vidéo et digitalisées grâce à une carte d'acquisition Scion, installée sur un ordinateur (Macintosh power G3 et PowerPc 7200). Ce système permet d'acquérir jusqu'à 25 images noir et blanc par seconde, codée sur 256 niveaux de gris. Pour augmenter le contraste, la caméra est munie d'un filtre rouge (couleur complémentaire du colorant bleu). Les images ont été utilisées pour caractériser l'écoulement. Pour éviter des reflets et assurer un éclairage le plus uniforme possible, la cellule est éclairée de manière indirecte: deux néons éclairent un écran blanc, placé derrière la cellule. La cellule est éclairée par la lumière réfléchiée par l'écran. Pour augmenter encore l'homogénéité de l'éclairage, une plaque de PVC blanc translucide, qui diffuse la lumière, est intercalée entre l'écran et la cellule.

Au cours des expériences, nous nous sommes intéressés à la concentration en fluide injecté moyennée le long de l'épaisseur de la cellule:

$$\bar{c}(x,y,t) = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} c(x,y,z,t) dz \quad (2.10)$$

où les coordonnées x, y et z sont définies sur la figure 2.4 et $c(x,y,z,t)$ est la concentration locale en fluide injecté. La cellule est éclairée par une lumière blanche. La lumière étant absorbée par le colorant, l'intensité reçue par le système d'acquisition (CCD et ordinateur) dépend de la concentration en colorant, donc de la concentration en fluide injecté, le long du trajet de la lumière (Fig.2.4). D'après la loi de Beer, l'intensité lumineuse I varie lors de la traversée d'une tranche de fluide d'épaisseur infinitésimale dz suivant l'équation:

$$dI = -\alpha I c dz \quad (2.11)$$

où α est le coefficient d'absorption. Par intégration le long de l'épaisseur de la cellule, il vient:

$$I(x,y,t) = I_0(x,y) e^{-\alpha b \bar{c}(x,y,t)} \quad (2.12)$$

4. Bleu Vif Organol J.N., C-I-61520, Prolabo.

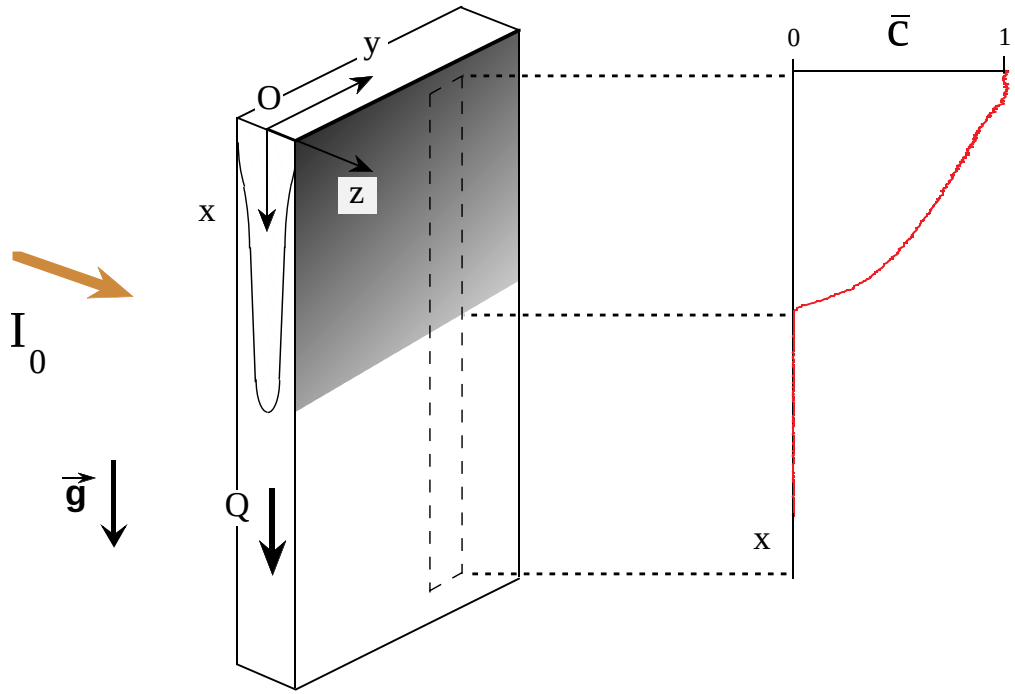


FIG. 2.4 – *Mesure de la concentration moyennée. La cellule, éclairée par une lumière blanche uniforme, est filmée par une caméra CCD, reliée à un ordinateur. Le profil de niveau de gris "perçu" par l'ordinateur le long de la sélection rectangulaire dépend de la concentration en colorant, donc de la concentration en fluide injecté.*

où I_0 est l'intensité de la lumière à l'entrée de la cellule. Le système caméra/ordinateur numérise l'intensité lumineuse sur 256 niveaux de gris. Le niveau de gris est inversement proportionnel à l'intensité reçue: plus l'image est sombre et plus le niveau de gris est grand. Compte tenu de l'équation (2.12), le niveau de gris perçu par le système d'acquisition s'écrit:

$$N_g(x,y,t) = N_\infty + (N_0(x,y) - N_\infty) e^{-\alpha b \bar{c}(x,y,t)} \quad (2.13)$$

où $N_0(x,y)$ est le niveau de gris mesuré lorsque la cellule est saturée en fluide déplacé (incolore) et N_∞ correspond au niveau de gris qui serait mesuré par le système si la cellule était remplie avec un fluide totalement opaque. Le coefficient d'absorption α est spécifique de chaque paire de fluides et dépend en particulier de la quantité initiale de colorant dans l'huile injectée. N_∞ et α ont été calibrés en mesurant le niveau de gris correspondant à des échantillons d'huile colorée diluée dans de l'huile incolore pour différents niveaux de concentration (Fig.2.5). Ces mesures ont été effectuées en plaçant les échantillons dans des cellules d'épaisseur 0,96mm et 1,92mm dans des conditions expérimentales identiques aux expériences (éclairage et réglage caméra). La figure 2.5 représente le niveau de gris mesuré N_g en fonction de $b\bar{c}$ pour le couple d'huile V2/V500. Les points correspondant aux épaisseurs $b = 0,96\text{mm}$ et $b = 1,92\text{mm}$ se regroupent sur la même courbe. L'ajustement des mesures avec une fonction du type (2.13) par la méthode des moindres carrés valide

l'utilisation de la loi de Beer et permet de mesurer les coefficients N_∞ et α ainsi que les incertitudes correspondantes: ΔN_∞ et $\Delta\alpha$.

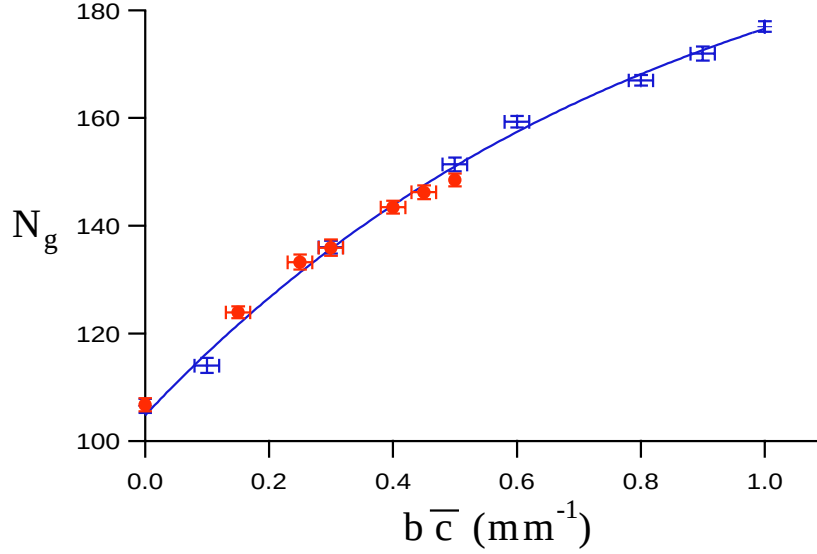


FIG. 2.5 – Intensité reçue par le système d’acquisition (en niveau de gris) en fonction de $b\bar{c}$ pour le couple d’huiles Rhodorsil V2/V500. Les croix correspondent à des mesures effectuées sur une cellule d’épaisseur 1,92mm et les ronds pleins à des mesures effectuées sur une cellule d’épaisseur 0,96mm. La ligne correspond à l’ajustement de ces points par une fonction de la forme (2.13).

L’intensité reçue par le système d’acquisition dépend de l’éclairage de la cellule et des réglages de la caméra (ouverture, grandissement et mise au point). Pour que les conditions d’éclairage soient identiques d’une expérience à l’autre, la cellule de Hele-Shaw, la caméra et le dispositif d’éclairage sont enfermés dans une chambre noire. Toutes les expériences ont de plus été réalisées avec le même réglage d’ouverture de la caméra. Seuls le grandissement et la mise au point ont été modifiés d’une expérience à l’autre, mais dans des proportions suffisamment faibles pour éviter des artefacts.

En pratique, le traitement des données expérimentales se fait de la façon suivante. Plusieurs images (de 100 à 200) de l’écoulement sont numérisées à intervalles de temps réguliers. La première image est prise avant le démarrage de l’écoulement. On sélectionne ensuite une ligne verticale le long de la cellule (Fig.2.4). Pour chaque image, on trace le profil d’intensité reçue (en niveaux de gris) le long de cette ligne verticale. Pour calculer la concentration moyennée $\bar{c}(x,y,t)$ le long de cette ligne, il faut d’abord connaître $N_0(x,y)$ en tout point de la ligne. Pour cela, on utilise le profil d’intensité correspondant à la première image. Ce dernier est représenté sur la figure 2.6. La zone $x < x_f$ correspond au fluide coloré pur ($\bar{c}(x,y,t) = 1$) tandis que les points $x > x_f$ correspondent au fluide déplacé pur ($\bar{c}(x,y,t) = 0$). Dans cette zone, l’intensité reçue est donc $N_0(x,y)$. Elle n’est pas constante

car l'éclairage n'est pas complètement homogène. Ce signal ayant la forme d'une parabole, il est ajusté par un polynôme de degré 2 au moyen d'une régression linéaire. Le signal correspondant à $\bar{c}(x,y,t) = 0$ pour $x < x_f$ est ensuite reconstruit en extrapolant cette parabole.

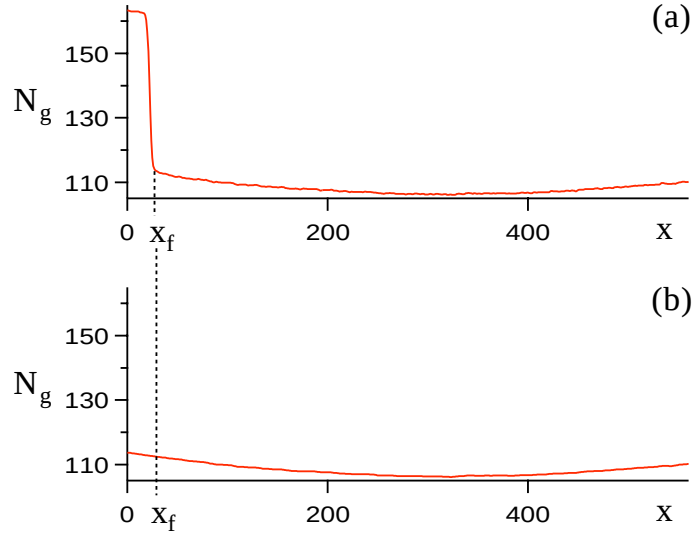


FIG. 2.6 – (a) Profil d'intensité correspondant à la première image. La zone $x < x_f$ correspond à $\bar{c}(x,y,t) = 1$ et $x > x_f$ correspond à $\bar{c}(x,y,t) = 0$. (b) Le signal $N_0(x,y)$, correspondant à $\bar{c}(x,y,t) = 0$, est extrapolé à $x < x_f$.

Connaissant $N_0(x,y)$ en tout point de la ligne sélectionnée, la concentration moyennée est calculée en inversant l'équation (2.13):

$$\bar{c}(x,y) = \frac{1}{\alpha b} \ln \left(\frac{N_\infty - N_0(x,y)}{N_\infty - N_g(x,y)} \right) \quad (2.14)$$

L'incertitude $\Delta \bar{c}$ sur la mesure de concentration s'écrit:

$$\Delta \bar{c} = \frac{1}{\alpha b} \left(\frac{\Delta N_0 - \Delta N_\infty}{N_\infty - N_0} + \frac{\Delta N_\infty + \Delta N_g}{N_\infty - N_g} \right) + \bar{c} \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \quad (2.15)$$

où ΔN_0 et ΔN_g sont les incertitudes sur les mesures de N_0 , N_g , évaluées à $\Delta N_0 = \Delta N_g = 1$. L'incertitude $\Delta \bar{c}/\bar{c}$ varie typiquement entre 5 et 10%. Pour les écoulements stables, le champ de concentration est indépendant de y . En le moyennant le long d'une large fenêtre rectangulaire, on diminue considérablement le bruit sur les mesures de concentration.

L'étude des écoulements en régime diffusif pose un problème expérimental particulier: les fronts de concentration mesurés par absorption de l'intensité lumineuse correspondent ils à la diffusion d'une huile dans l'autre ou bien à la diffusion du colorant dans les huiles?

Pour le vérifier, nous avons réalisé plusieurs expériences à vitesse nulle. Le front de concentration mesuré par absorption de l'intensité lumineuse conduit à un coefficient de

diffusion du même ordre de grandeur que ceux mesurés par déviation d'un faisceau laser. Nous en déduisons que le coefficient de diffusion du colorant est proche de celui des huiles de sorte que le colorant "traque" convenablement l'huile injectée.

La résolution spatiale varie entre 20 et 40 pixel par cm, ce qui correspond à une incertitude sur la mesure de position Δx de l'ordre de $2,5 \cdot 10^{-2}$ à $5 \cdot 10^{-2} cm$.

Dans les chapitres suivants, nous tenterons de déduire la structure de l'écoulement entre les plaques de la cellule à partir des mesures des fronts de concentration moyennée dans l'épaisseur. Notons que cette technique ne donne pas d'information sur l'état de mélange des fluides.

Chapitre 3

Etude expérimentale du déplacement de fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw aux grands nombres de Péclet

L'objectif de ce chapitre est de décrire expérimentalement le déplacement de fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw verticale aux grands nombres de Péclet [38, 39]. Dans cette limite, la vitesse d'écoulement est suffisamment importante pour que les deux fluides n'aient pas le temps de se mélanger de sorte qu'on peut définir une interface entre les fluides.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Après un bref rappel des paramètres de contrôle, nous montrons l'existence de deux régimes distincts: le régime stable ou régime 2D et le régime instable ou régime 3D. Nous exposons ensuite l'ensemble de nos observations expérimentales sur chacun de ces deux régimes.

3.1 Paramètres de contrôle

Rappelons que les paramètres de contrôle de nos expériences sont:

$$\text{le rapport de viscosité} \quad M = \frac{\eta_1}{\eta_2} \quad (3.1)$$

$$\text{la vitesse adimensionnée} \quad U = \frac{12\eta_1 q}{b^2 \Delta \rho g} \quad (3.2)$$

$$\text{le nombre de Péclet} \quad Pe = \frac{qb}{D_m} \quad (3.3)$$

où η_1 et η_2 sont les viscosités des fluides déplacés et injectés, $\Delta \rho = \rho_1 - \rho_2$ est la différence entre la densité du fluide déplacé et celle du fluide injecté, q est la vitesse moyenne de l'écoulement, b est l'épaisseur de la cellule et D_m le coefficient de diffusion moléculaire.

Les forces visqueuses peuvent stabiliser ou déstabiliser l'écoulement suivant que le fluide déplacé est le plus ou le moins visqueux. L'importance du rôle stabilisateur ou déstabilisateur de la viscosité est quantifiée par le rapport de viscosité des fluides. Si $M > 1$, l'écoulement est susceptible de se déstabiliser par digitation visqueuse (le fluide déplacé est le plus visqueux). Au contraire, si $M < 1$, la viscosité stabilise l'écoulement.

La vitesse adimensionnée U quantifie l'importance relative des forces visqueuses et des forces de flottaison. Plus U est grand (en valeur absolue) et plus les forces visqueuses sont importantes comparées aux effets de la gravité. Pour obtenir une interface initiale horizontale et éviter de mélanger les deux fluides, toutes nos expériences ont été réalisées avec une différence de densité stabilisante de sorte que $U > 0$. Comme l'huile la plus dense est également la plus visqueuse, le rapport de viscosité est inférieur ou supérieur à 1 suivant le sens de l'écoulement (vertical ascendant ou vertical descendant).

L'importance relative de la convection et de la diffusion moléculaire dans le transport de matière est caractérisée par le nombre de Péclet. L'ensemble des expériences présentées dans ce chapitre et le suivant ont été réalisées dans la limite des grands nombres de Péclet (typiquement $Pe > 10^4$). Dans cette limite, la vitesse d'écoulement est suffisamment importante pour que les deux fluides n'aient pas le temps de se mélanger sous l'effet de la diffusion moléculaire de sorte qu'on peut définir une interface entre les deux fluides. Pour le vérifier, nous avons arrêté brutalement l'injection au cours de plusieurs expériences. Après interruption, le fluide injecté remonte sous l'action de la gravité et reforme un front de concentration très raide, ce qui indique que les deux fluides se sont très peu mélangés.

Signalons également que le nombre de Reynolds qui s'écrit au sein de chaque fluide:

$$Re = \frac{q b \rho_i}{\eta_i} \quad (3.4)$$

varie typiquement entre 10^{-2} et 10. Nous considérerons donc que nos écoulements sont laminaires.

3.2 Définition des régime 2D et 3D

Nous avons réalisé une première série d'expériences avec des couples de fluide de viscosité et de densité différentes. Les vitesses d'écoulement étant toujours suffisamment importante pour que les effets diffusifs soient négligeables, nous nous sommes concentrés sur l'influence de M et U . Deux types de comportements sont observés en fonction des valeurs de ces paramètres.

Régime 2D

Le premier type de comportement, que nous appellerons régime 2D, est représenté sur la figure 3.1. Observé dans le plan des plaques (plan oxy), l'interface entre les deux fluides semble plane et horizontale (Fig.3.1a).

La forme des fronts de concentration moyennée $\bar{c}(x,y,t)$ (Fig.3.1b) suggère un comportement plus complexe entre les plaques de la cellule (plan xoz). En nous basant sur les travaux numériques de Chen et Meiburg [15], Watzky *et al.* [63] et Yang et Yortsos [87] et sur les observations expérimentales de Petitjeans et Maxworthy [59], nous faisons l'interprétation suivante: aux grands nombres de Péclet, une "langue" de fluide injecté se forme entre les plaques (Fig.3.1c). Cette langue est symétrique par rapport à l'axe ox et invariante le long de l'axe oy .

Dans cette limite, la concentration moyenne $\bar{c}(x,y,t)$ (Fig.3.1b) est égale à l'épaisseur locale de la langue de fluide injecté normalisée par rapport à l'épaisseur de la cellule $\beta(x,y,t)$ (Fig.3.1c):

$$\bar{c}(x,y,t) = \beta(x,y,t) \quad (3.5)$$

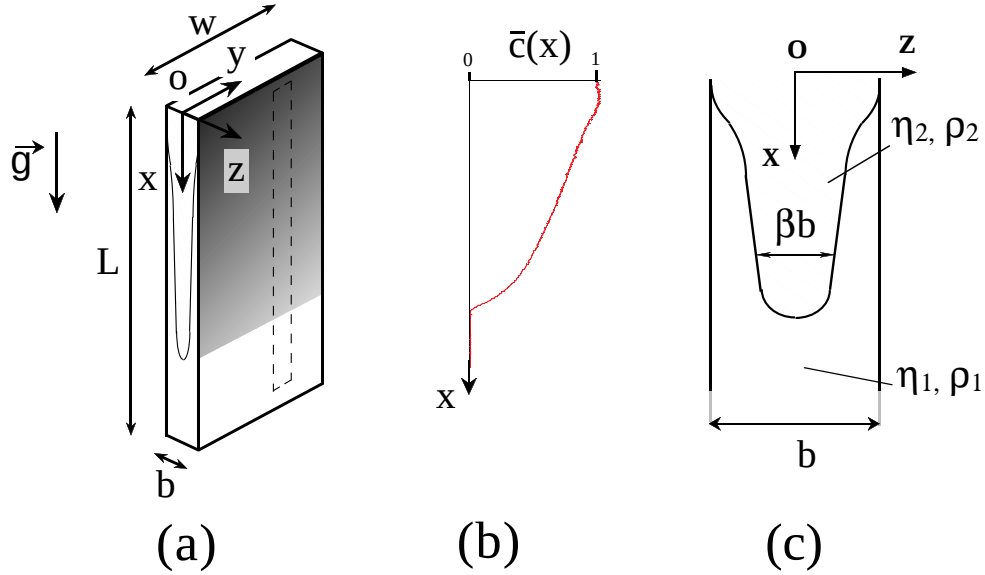


FIG. 3.1 – Régime 2D: (a) Forme de l'interface dans le plan des plaques (plan oxy). (b) Profil de concentration $\bar{c}(x,y,t)$ typique du régime 2D. (c) Schéma de l'interface observée entre les plaques (plan xoz): l'épaisseur relative de la langue de fluide injecté $\beta(x,y,t)$ est égale à la concentration moyennée $\bar{c}(x,y,t)$.

Régime 3D

Pour certaines valeurs de M , nous avons observé l'existence d'une valeur critique U_T de U . Lorsque $U > U_T$, la langue 2D se forme mais, après un régime transitoire, elle se déstabilise pour former un motif d'instabilité tridimensionnel, consistant en des doigts de fluide injecté régulièrement espacés le long de la direction oy et séparés par un petit

interstice de fluide déplacé (fig.3.2). La description complète du motif d'instabilité est donnée dans la partie 3.4.

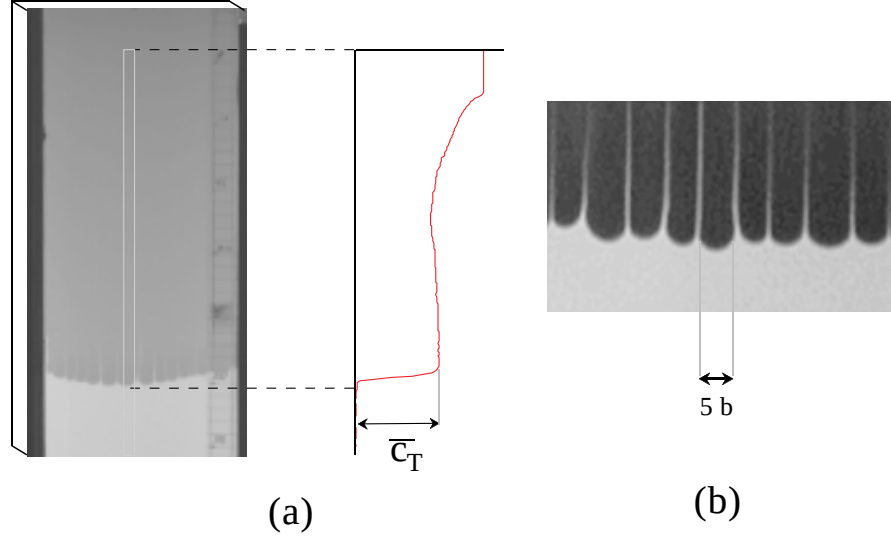


FIG. 3.2 – Régime 3D. (a) Motif d'instabilité et profil de concentration pris le long d'un doigt. (b) Vue rapprochée de la figure de digitation visqueuse. La longueur d'onde du motif d'instabilité au voisinage du seuil ne dépend que de l'épaisseur de la cellule: $\lambda = (5 \pm 1)b$

3.3 Description expérimentale du régime 2D

3.3.1 Mesure des profils de la vitesse de propagation des concentrations

L'étude expérimentale du régime 2D s'est faite à partir des mesures de la concentration moyennée dans l'épaisseur de la cellule $\bar{c}(x,t)$. Dans ce chapitre et les suivants et sauf mention contraire, nous emploierons le terme de concentration pour désigner la concentration moyennée à travers l'épaisseur. La figure 3.3a représente une série de fronts de concentration pris à intervalles de temps réguliers. Nous avons étudié l'évolution de la position de chaque niveau de concentration au cours du temps en discrétisant le front en 50 niveaux $\bar{c} = 0,02, 0,04, \dots$. La position $x(\bar{c}, t)$ de chacun de ces niveaux est mesurée sur chaque front de concentration de la figure 3.3a. Les courbes résultantes, $x(\bar{c}, t)$ à concentration $\bar{c}$ fixée, sont des droites représentées sur la figure 3.3b.

Cette observation ne se limite pas à l'exemple donné ici. En fait, quelles que soient les valeurs de M et U (pourvu que l'on reste dans le régime 2D à grand nombre de Péclet), la position $x(\bar{c}, t)$ d'une concentration $\bar{c}$ donnée est une fonction linéaire du temps.

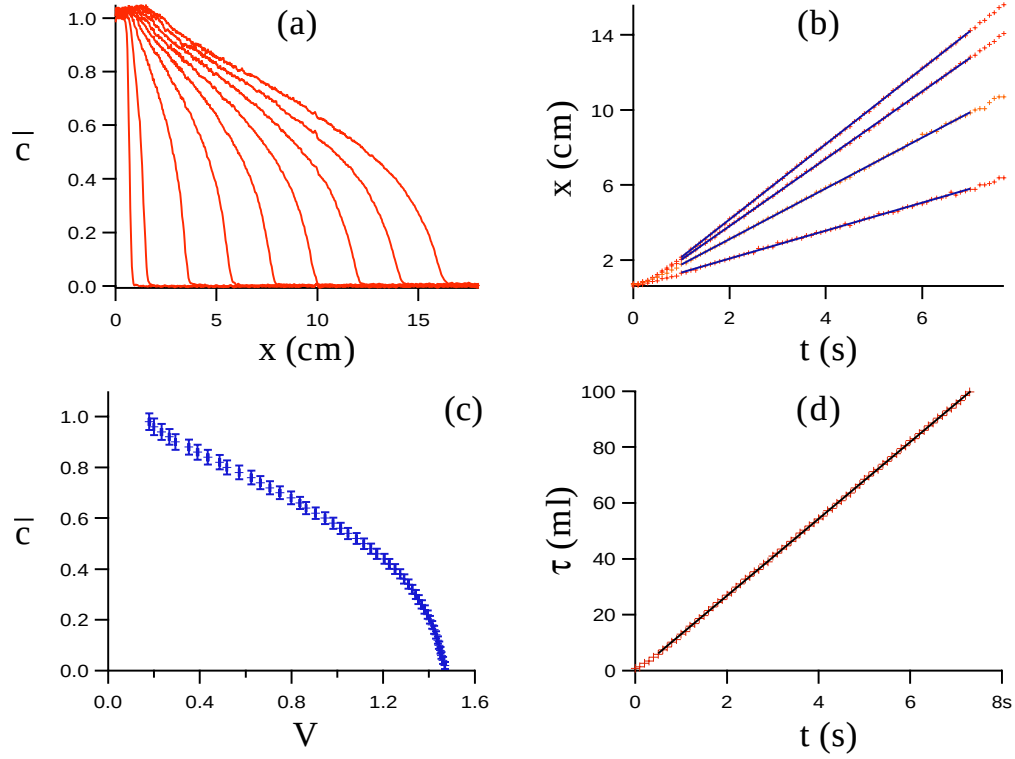


FIG. 3.3 – (a) Fronts de concentration $\bar{c}(x,t)$ observés à intervalles de temps réguliers. (b) Position x au cours du temps t de quatre niveaux de concentration $\bar{c} = 0,2, 0,4, 0,6$ et $0,8$. Les croix correspondent aux mesures expérimentales et les lignes à l'ajustement de ces points par une droite (méthode des moindres carrés). (c) Profil de vitesse des concentrations, mesuré à partir de la pente des droites et normalisé par rapport à la vitesse moyenne d'injection q . (d) Volume de fluide injecté (en ml) dans la cellule en fonction du temps. Les croix correspondent aux valeurs calculées à partir des fronts de concentration et la ligne à l'ajustement de ces points par une droite (méthode des moindres carrés).

Chaque concentration se propage donc avec une vitesse constante. En ajustant les points expérimentaux $x(c,t)$ par une droite, on obtient le profil de vitesse des concentrations (Fig.3.3c).

Pour comparer les profils de vitesse des concentrations correspondant à des écoulements différents, la vitesse de propagation de chaque concentration est normalisée par rapport à la vitesse moyenne d'injection q . Nous nous intéressons donc au profil de vitesse normalisée:

$$V(\bar{c}) = \frac{1}{q} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\bar{c}} \quad (3.6)$$

Dans la suite, sauf mention contraire, le terme de vitesse désignera la vitesse normalisée

par rapport à la vitesse moyenne d'injection q . L'incertitude sur la mesure de $V(\bar{c})$ s'écrit:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta q}{q} + 2 \frac{\Delta x}{x} \approx 4\% \quad (3.7)$$

où $\Delta q/q$ est l'incertitude sur la valeur du débit (2,5%) et $\Delta x/x$ est l'incertitude sur la mesure de la position (Les incertitudes liées à la mesure du temps t sont négligeables).

On notera que la vitesse $V(\bar{c})$ est la vitesse de propagation d'une grandeur physique, la concentration moyenne $\bar{c}$. Puisque les deux fluides ne se mélangent pas, $V(\bar{c})$ est également la vitesse de propagation de la tranche de la "langue 2D" d'épaisseur $b\beta$. Ce n'est donc pas, en général, la vitesse d'une particule matérielle.

Pour vérifier la qualité du traitement des données, nous avons également mesuré la vitesse moyenne d'injection q à partir des fronts de concentration expérimentaux. Pour ce faire, on calcule le volume de fluide injecté $\tau(t)$ au temps t en intégrant numériquement chaque front de concentration $x(c,t)$ par la méthode des trapèzes:

$$\tau(t) = Wb \int_0^L \bar{c}(x,t) dx \quad (3.8)$$

où W et L sont la largeur et la longueur de la cellule. La figure 3.3d représente $\tau(t)$ pour l'écoulement correspondant aux fronts de la figure 3.3a. Le volume de fluide injecté varie linéairement avec le temps, ce qui confirme que le débit est constant. Un ajustement de la courbe (méthode des moindres carrés) permet de mesurer la vitesse moyenne d'injection q . Si la valeur mesurée correspond au débit indiqué par la pompe, on considère que le traitement des données est correct. Au contraire, en cas de désaccord, l'expérience n'est pas validée (problème d'éclairage ou problème de pompe) et doit être refaite.

3.3.2 Classement des différents types de profils de concentration

Nous avons réalisé une première série d'expériences destinées à recenser les différentes formes de profils de concentration observés en fonction des valeurs de M et U .

Quel que soit M , on observe, pourvu que U soit suffisamment faible, un profil de concentration comportant un choc entre deux concentrations $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_M$ ($\bar{c}_m < \bar{c}_M$). Ce type de profils, dont un exemple est donné sur la figure 3.4a, sera appelé dans la suite "profil de type 2". Sur les intervalles de concentration $[0, \bar{c}_m]$ et $[\bar{c}_M, 1]$, le profil de concentration est autosimilaire: La forme de ces parties du front de concentration à un instant t_2 se déduisent de leur forme à un instant t_1 par une simple homothétie de rapport t_2/t_1 . Le choc est donc précédé par une petite pointe autosimilaire. Celle-ci a déjà été observée numériquement par Chen et Meiburg [15] et expérimentalement en tube par Petitjeans et Maxworthy [59].

On notera que la vitesse de propagation décroît de façon monotone avec la concentration et que la vitesse maximale du profil, correspondant à $\bar{c} = 0$, est égale $V(0) = 1,5$,

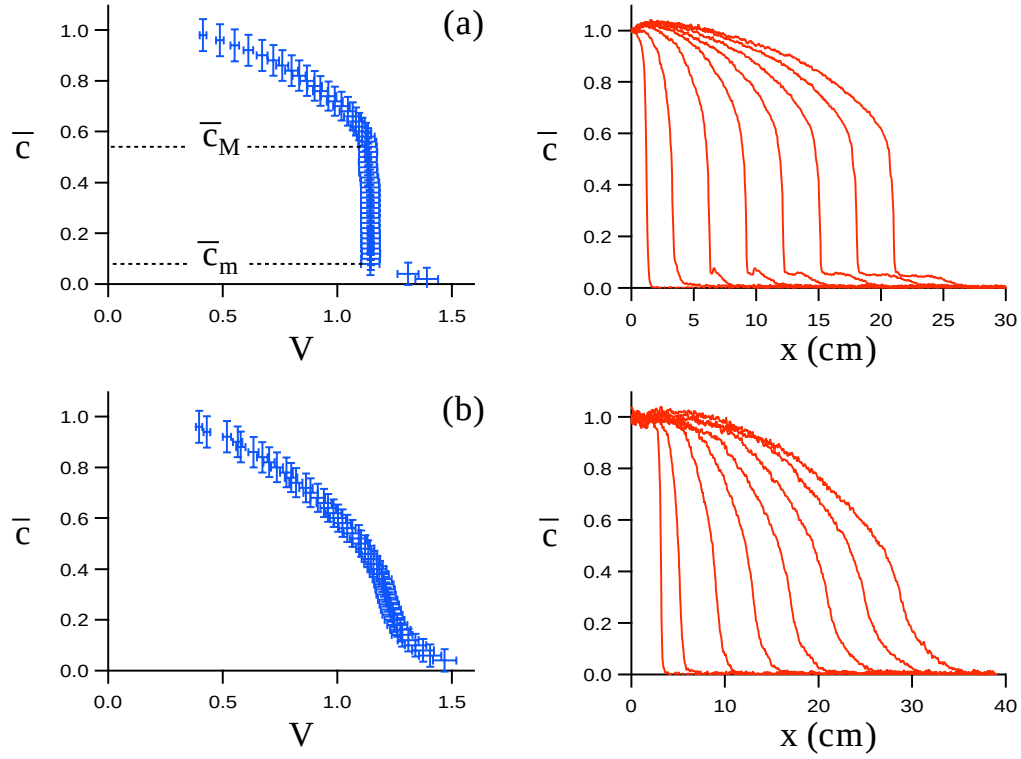


FIG. 3.4 – *Profils de vitesse (à gauche) et fronts de concentration à intervalles de temps réguliers (à droite) pour $M = 0,22 < 1,5$ et (a) $U = 0,21$ et (b) $U = 0,53$. L'augmentation de U permet le passage d'un profil de type 2 (avec un choc de vitesse $V_{choc} < 1,5$ (a)) à un profil de type 1 (autosimilaire (b)).*

ce qui correspond à la vitesse maximale du fluide dans un profil de vitesse parabolique (profil de Poiseuille) entre deux plaques.

L'évolution de ce type de profils lorsque U augmente dépend de la valeur de M :

1. Pour $M < 1,5$, le choc disparaît lorsque U augmente et on observe un front de concentration autosimilaire (Fig.3.4b). Le profil de vitesse correspondant sera appelé profil de type 1.
2. Pour $M > 1,5$, l'évolution du profil, représentée sur la figure 3.5, est radicalement différente. Lorsque U augmente et se rapproche de la valeur de transition U_T vers le régime 3D, $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_M$ diminuent tandis que la vitesse du choc augmente et se rapproche de 1,5 (Fig.3.5a et b). Si la vitesse adimensionnée U continue d'augmenter, la pointe disparaît: le profil de concentration présente alors un choc entre $\bar{c}_m = 0$ et $\bar{c}_M$, dont la vitesse est égale à 1,5 (Fig.3.5c). Si U augmente encore, l'écoulement bifurque vers le régime 3D lorsque U devient supérieure à U_T .

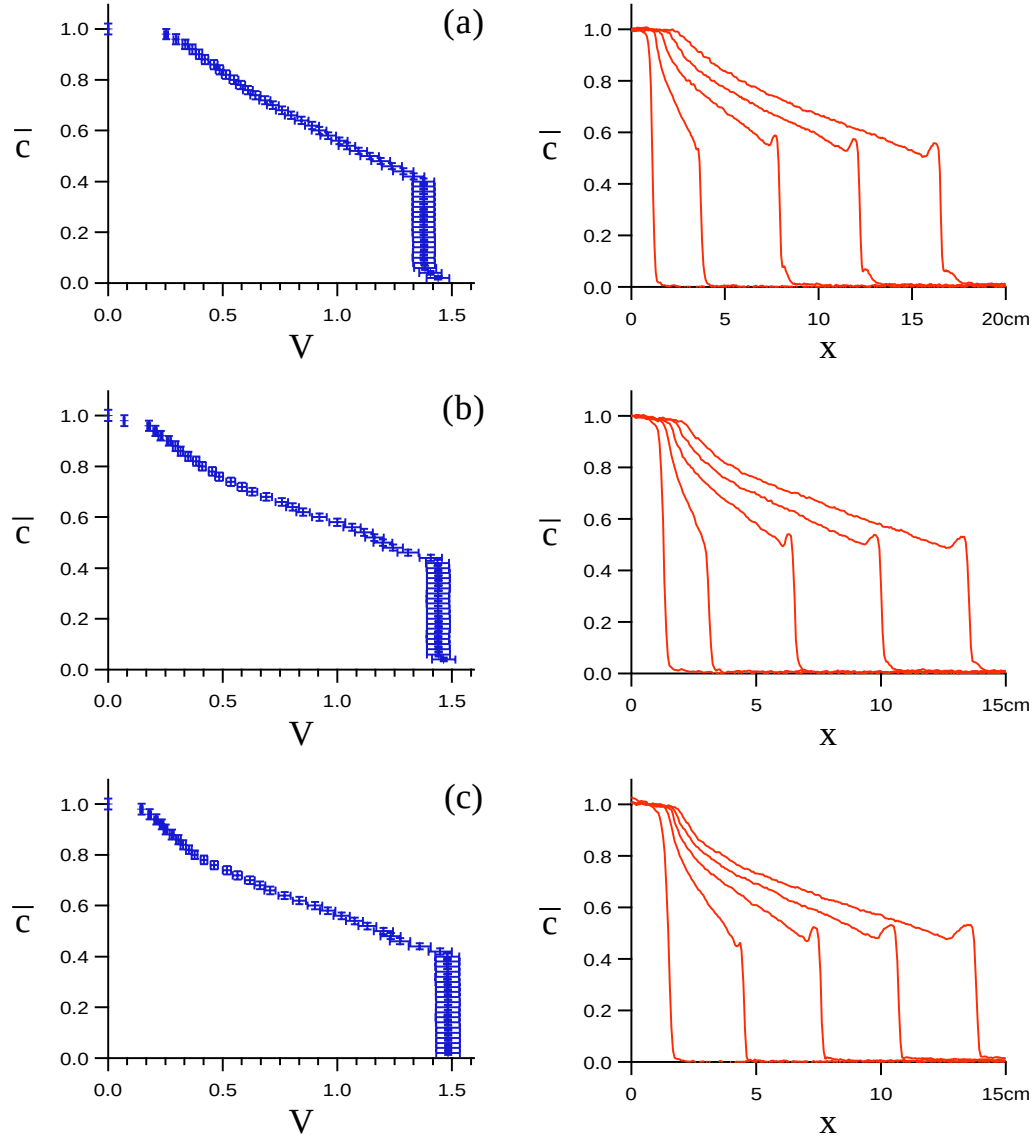


FIG. 3.5 – *Profils de vitesse (à gauche) et fronts de concentration à intervalles de temps réguliers (à droite) pour $M = 10,5 > 1,5$. (a) $U = 0,58$. (b) $U = 0,70$. (c) $U = 1,20$. Lorsque U augmente et approche le seuil de transition vers le régime 3D U_T , la vitesse du choc augmente et c_m tend vers 0.*

3.4 Description expérimentale du régime 3D

Pour certaines valeurs des paramètres M et U , la langue 2D se forme mais, après un régime 2D transitoire, des modulations apparaissent sur le front plan qui conduisent rapidement à la déstabilisation de l'interface. Il se forme alors un motif d'instabilité tri-dimensionnel, consistant en des doigts de fluide injecté régulièrement espacés le long de la direction oy et séparés par un petit interstice de fluide déplacé (fig.3.2).

3.4.1 Diagramme de stabilité

Nous avons réalisé une série d'expérience destinées à mesurer la valeur U_T de U correspondant à la transition vers le régime 3D. Pour évaluer le seuil d'instabilité, nous avons adopté la méthode suivante. Pour un couple de fluide donné, correspondant à un rapport de viscosité fixé M , on réalise des écoulements en variant U de façon à obtenir deux valeurs U_1 et U_2 proches, correspondant respectivement à un écoulement stable et un écoulement instable. La valeur critique U_T et son incertitude sont données par:

$$U_T = \frac{U_1 + U_2}{2} \quad (3.9)$$

$$\Delta U_T = \frac{U_2 - U_1}{2} \quad (3.10)$$

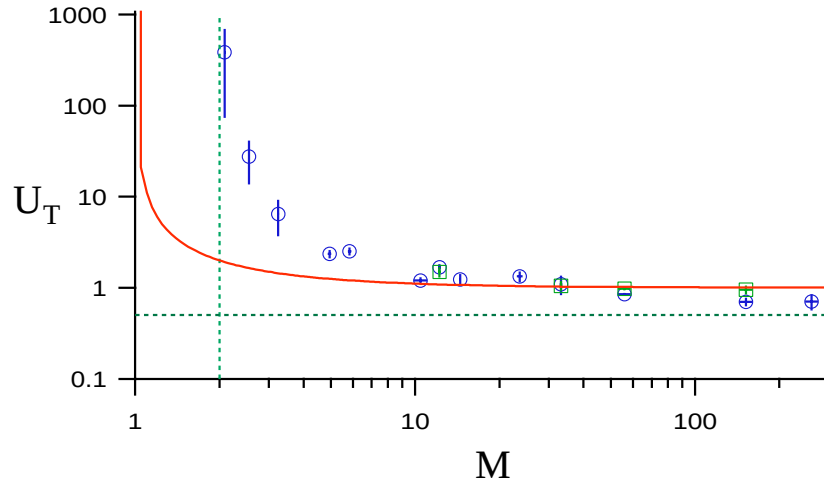


FIG. 3.6 – Vitesse adimensionnée critique U_T mesurée en fonction du rapport de viscosité M . Les cercles et les carrés correspondent respectivement aux expériences en cellule d'épaisseur 0,96mm et 1,92mm. La courbe en trait plein correspond au seuil prédit par l'analyse de stabilité linéaire utilisant la loi de Darcy dans la limite où la diffusion est négligeable (équation (1.34)). Les deux asymptotes en pointillés correspondent à $M = 2$ et $U_T = 0,5$.

Cette méthode surévalue très probablement le seuil d'instabilité. En effet, plus on est proche du seuil, et plus le temps d'apparition de l'instabilité est long. Il n'est donc pas exclu que nous ayons considéré stable un écoulement instable n'ayant pas le temps de se déstabiliser à l'échelle de temps d'une expérience. Nous avons essayé de mesurer le seuil U_T à partir de la mesure de la durée du régime transitoire en fonction de U . En extrapolant cette courbe, il est généralement possible d'évaluer un seuil de stabilité. En pratique, cette méthode s'est révélée très incertaine, en particulier à cause de la difficulté d'évaluer le moment exact de déstabilisation du front.

Les résultats sont représentés sur la figure 3.6 pour des cellules d'épaisseurs $b = 0,96mm$ et $b = 1,92mm$. Les valeurs de U correspondant aux deux épaisseurs se regroupent sur une seule courbe, ce qui valide le choix des paramètres de contrôle. Pour les grandes valeurs de M , U_T tend asymptotiquement vers 0,5. En $M \approx 2$, la courbe $U_T(M)$ diverge. Ceci suggère l'existence d'un rapport de viscosité critique de l'ordre de $M_c \approx 2$, en-dessous duquel il n'est pas possible d'observer le régime 3D, quel que soit la valeur de U . Nous n'avons pas réussi à observer de régime 3D pour $M < 2,1$.

L'existence d'un rapport de viscosité critique $M_c \approx 2$, en-dessous duquel il n'est pas possible d'observer de digitation visqueuse est un résultat nouveau. A ce jour, les études de digitation visqueuse (avec des fluides miscibles ou non miscibles) prévoient en effet un rapport de viscosité critique égal à 1.

L'analyse de stabilité linéaire basée sur la loi de Darcy et négligeant la diffusion a été présentée au chapitre 1. Pour comparer, la vitesse critique correspondante (équation (1.34)) est représentée en trait plein sur la figure 3.6.

3.4.2 Mesure de la longueur d'onde au seuil de stabilité

Nous avons également mesuré la longueur d'onde du motif d'instabilité au voisinage de U_T . Pour éviter une erreur liée à la déformation des doigts sur les bords de la cellule, la mesure est faite en mesurant la largeur d'une zone comprenant une quinzaine de doigts et située au milieu du canal. Les résultats, représentés sur la figure 3.7a, suggèrent que la longueur d'onde des doigts est indépendante du rapport de viscosité et ne dépend que de l'épaisseur de la cellule:

$$\lambda = (5 \pm 1)b \quad (3.11)$$

Nous avons également réalisé une série d'écoulements dans une cellule d'épaisseur $b = 0,96mm$ et de largeur $W = 1cm \approx 2\lambda$. La déstabilisation du front conduit à la formation de deux doigts (Fig.3.8), confirmant que la longueur d'onde λ ne dépend que de b et n'est pas sensible à la valeur de W (tant que $W > \lambda$).

La valeur de λ est comparable à celles mesurées par Paterson ($\lambda = 4b$) [55] en géométrie radiale et par Snyder et Taitz ($\lambda = 2b$) [73] en canal linéaire horizontal. Il est également

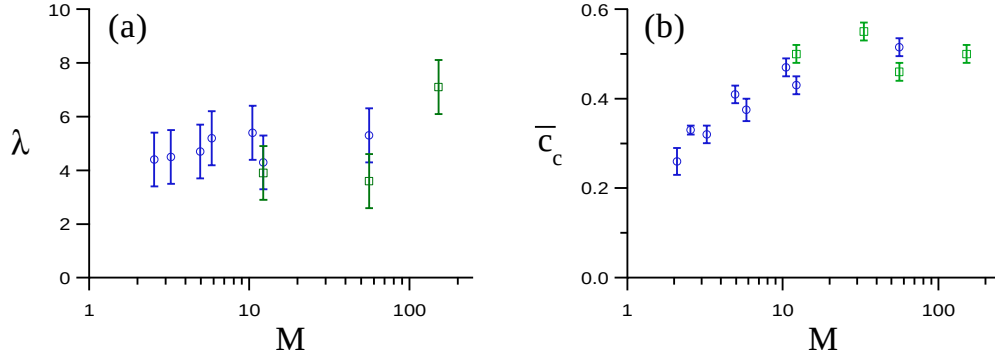


FIG. 3.7 – (a) Longueur d’onde au voisinage du seuil de stabilité ($U \approx U_T$) en fonction de M . (b) Épaisseur relative d’un doigt au voisinage du seuil de stabilité ($U \approx U_T$) en fonction de M .

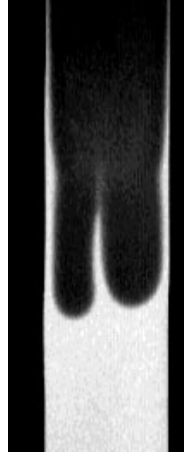


FIG. 3.8 – Régime 3D dans une cellule de Hele-Shaw verticale de largeur $W = 1\text{cm}$ et d’épaisseur $b = 0,96\text{mm}$ ($M = 12,2$, $U = 2 > U_T = 1,7$).

intéressant de noter que, dans la limite des grands nombres capillaires (i.e. lorsque la tension de surface devient négligeable), le rayon de courbure des doigts de Saffman-Taylor anormaux sature autour de $2,5b$ [62]. Que les fluides soient ou non miscibles, c’est apparemment le même mécanisme de saturation qui intervient dans la limite des régimes dominés par la viscosité.

Nous avons, par ailleurs, mesuré les fronts de concentration le long des doigts du motif d’instabilité. La figure 3.2 donne un exemple du type de profil observé. Au voisinage du seuil, ces fronts sont caractérisés par l’existence d’un choc entre les concentrations 0 et $\bar{c}_T$. Les valeurs de $\bar{c}_T$ correspondant à deux doigts différents d’un même motif d’instabilité sont identiques. La mesure de $\bar{c}_T$ en fonction de M indique que $\bar{c}_T$ décroît avec le rapport de viscosité M (Fig.3.7b).

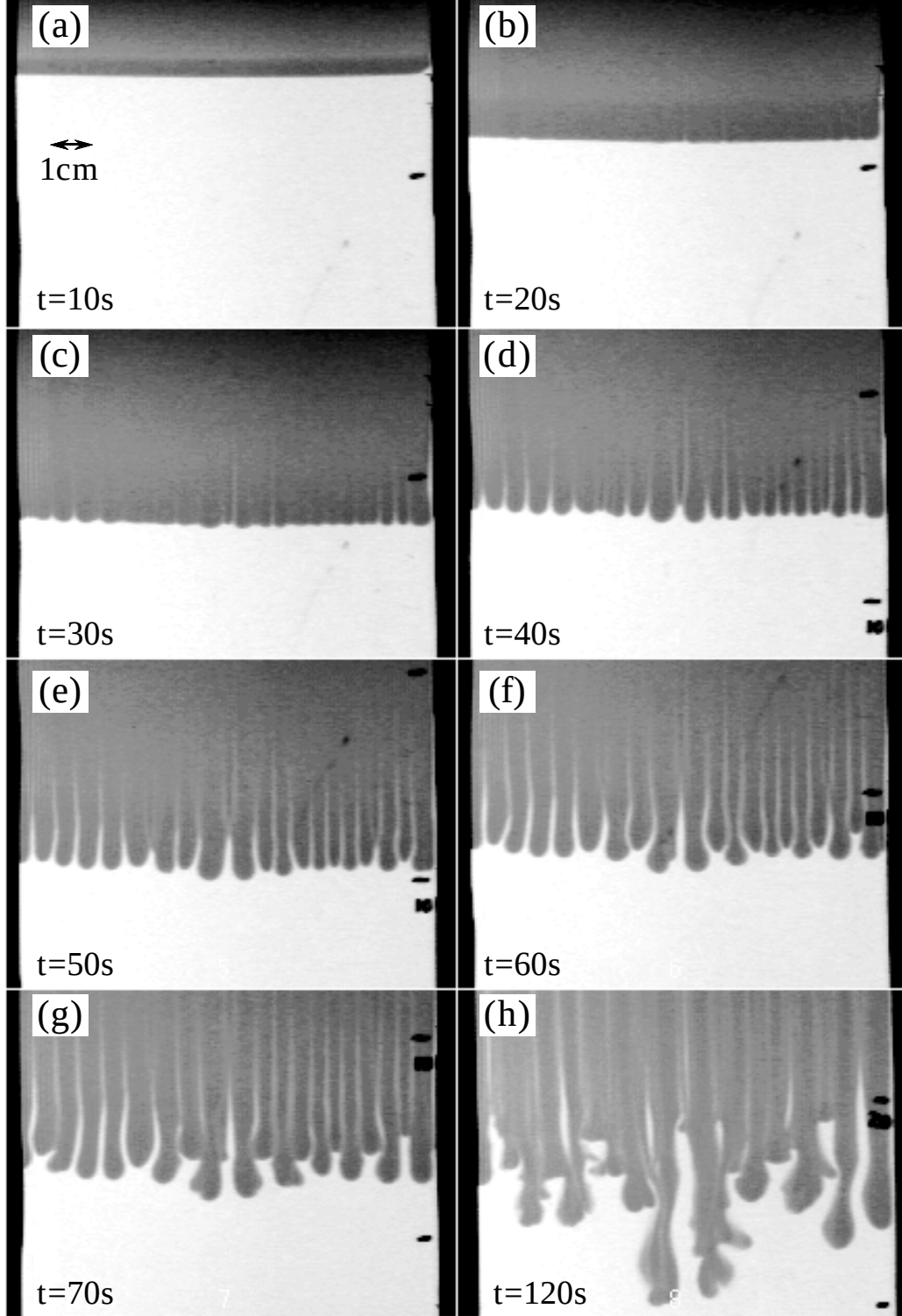


FIG. 3.9 – *Evolution du motif d'instabilité au cours du temps pour $M = 55,8$ et $U = 1,54 > U_T = 0,85$: (a) régime 2D transitoire. (b) apparition de modulations sur le front plan. (c) et (d) Formation de doigts. (e), (f) et (g) écrantage d'un doigt sur deux en moyenne. (h) Division en deux des doigts "survivants".*

3.4.3 Description du régime non linéaire

Une fois formés, les doigts entrent en compétition suivant un scénario quasiment identique d'une expérience à l'autre et illustré sur la figure 3.9. Après un régime 2D transitoire (Fig.3.9a), des modulations apparaissent sur le front plan (Fig.3.9b) qui conduisent rapidement à la formation de doigts (Fig.3.9b et c). Ces doigts subissent ensuite une "compétition" qui conduit à "l'écrantage" d'un doigt sur deux en moyenne Fig.3.9 e, f et g). Les doigts "survivants" forment des "blobs" qui s'élargissent et se divisent en deux Fig.3.9 g et h) lorsque leur largeur devient supérieure à une taille critique de l'ordre de 7 à $8b$.

Notons que la sélection d'un doigt sur deux ainsi que l'élargissement et la division en deux des doigts "survivants" ont été observés dans les études numériques de Tan et Homsy [78] et Zimmerman et Homsy [90]. Cependant, ces simulations numériques, basées sur la loi de Darcy, ne sont valables en cellule de Hele-Shaw que dans la limite des faibles nombres de Péclet. La similitude entre ces simulations et les comportements observés dans nos expériences ne permet donc pas de tirer de conclusions claires.

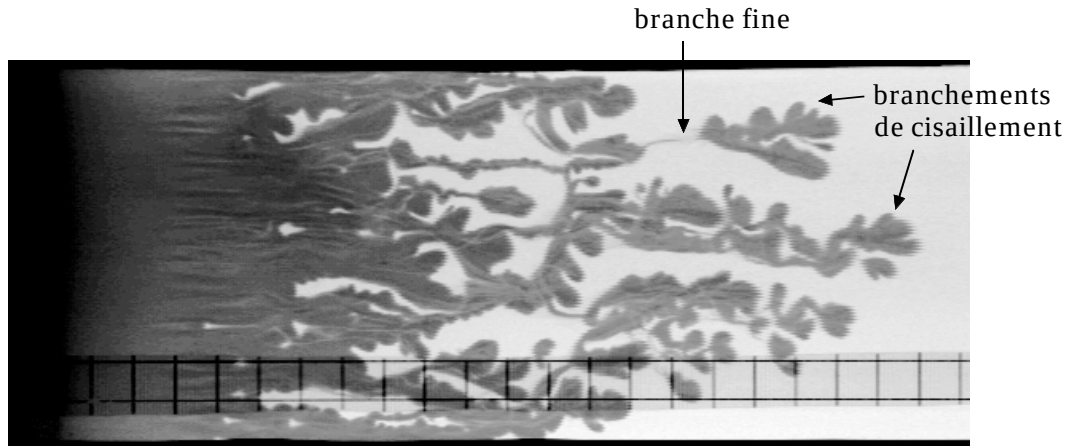


FIG. 3.10 – Régime développé observé loin du seuil ($M = 55,8$ et $U = 23,1 > U_T = 0,85$).

L'évolution ultérieure du motif d'instabilité est très complexe. En plus des phénomènes d'écrantage et de division, nous avons observé plusieurs instabilités secondaires:

1. Lorsque la vitesse de l'écoulement est suffisamment rapide, certains "doigts" situés très en avant du front subissent une instabilité qui conduit à la formation de branchements sur leur côté. Nous pensons que cette instabilité est une instabilité de type Kelvin-Helmoltz, due au fort cisaillement sur le côté du doigt (Fig.3.10).
2. Certains "blobs" sont alimentés par une branche extrêmement fine, qui peut même se briser. Le blob forme alors une bulle de fluide injecté, isolée au sein du fluide déplacé (Fig.3.10).

3. Deux doigts peuvent fusionner et conduire au contraire à la formation de bulles de fluide déplacé, piégée au sein du fluide injecté (Fig.3.10).

L'ensemble de ces mécanismes conduit lorsque U s'éloigne du seuil U_T à la formation de motifs très complexes tels que celui représenté sur la figure 3.10.

3.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une étude expérimentale du déplacement de deux fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw verticale à grand nombre de Péclet. Dans ce régime non diffusif, on peut se restreindre aux deux paramètres de contrôle M et U . La différence de densité étant toujours stabilisante, nous n'avons exploré que la région $U > 0$. Deux zones ont été identifiées dans le plan M, U , délimitées par une courbe $U_T(M)$.

Dans la première zone, correspondant au régime 2D, une "langue" de fluide injecté symétrique par rapport à l'axe ox et invariante le long de l'axe oy se forme entre les plaques. En fonction des valeurs de M et U , cette langue peut être autosimilaire ou présenter des chocs.

Lorsque $M > M_T$ avec $M_T \approx 2$, il existe une valeur critique U_T pour U , au-dessus de laquelle la langue 2D se forme mais se déstabilise ce qui conduit à un motif d'instabilité tridimensionnel, consistant en des doigts de fluide injecté régulièrement espacés et séparés par un petit interstice de fluide déplacé (régime 3D).

Nous avons observé expérimentalement que la transition vers le régime 3D pourrait coïncider avec la formation d'un choc de vitesse $V_{choc} > 1,5$ sur les fronts de concentration. Quoiqu'il en soit, la déstabilisation du front semble provoquée par une modification de la structure de l'écoulement entre les plaques et nécessite donc une meilleure compréhension de l'évolution des fronts de concentration.

Chapitre 4

Modélisation du régime 2D aux grands nombres de Péclet

L'objectif de ce chapitre est de décrire théoriquement le régime 2D dans la limite des grands nombres de Péclet (typiquement $Pe > 10^4$) [39]. Rappelons que dans cette limite, on peut définir une interface entre les deux fluides. Cette interface, observée entre les plaques, a la forme d'une "langue" symétrique par rapport à l'axe ox et invariante le long de l'axe oy . La concentration moyennée est donc égale à l'épaisseur relative de cette langue: $\bar{c}(x,y,t) = \beta(x,y,t)$.

Pour modéliser le régime 2D, nous avons utilisé l'approche de Yang et Yortsos [87] décrite au chapitre 1. Ces auteurs ont étudié la forme de l'interface entre deux fluides miscibles en écoulement entre deux plaques (ou dans un tube cylindrique) en l'absence de forces de gravité et aux grands nombres de Péclet. Dans ce chapitre, nous reprenons et étendons leur modèle en prenant en compte l'effet d'une différence de densité entre les fluides.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. La première partie est consacrée à l'établissement d'une équation hyperbolique décrivant l'évolution de l'interface. Nous rappelons dans la seconde partie quelques propriétés générales de la théorie des ondes cinématiques avant de l'appliquer à la description du régime 2D dans la troisième partie. La section 4.4 est consacrée à la comparaison entre les prédictions théoriques et les observations expérimentales. Dans la cinquième partie, nous étendons le modèle à la description du déplacement de fluides miscibles dans un tube vertical. Avant de conclure, nous donnerons un aperçu des résultats expérimentaux obtenus avec une cellule de Hele-Shaw d'épaisseur faible, dans laquelle la diffusion n'est plus négligeable.

4.1 Hypothèses et formulation du modèle

4.1.1 Hypothèses et notations

Considérons le déplacement d'un fluide 1 de densité ρ_1 et de viscosité η_1 par un fluide 2 de densité ρ_2 et de viscosité η_2 entre les deux plaques d'une cellule de Hele-Shaw verticale. On suppose que le fluide 2, injecté à débit constant, forme une langue symétrique par rapport à l'axe ox et invariante le long de la direction oy . Nous travaillerons donc dans le plan oxz . On note $\beta(x,t)$ l'épaisseur locale de la langue normalisée par rapport à l'épaisseur de la cellule b (Fig.4.1). Nous ne cherchons pas à décrire le régime transitoire qui conduit à la formation de cette langue. Nous nous intéressons au contraire à la forme et à l'évolution de celle-ci dans la limite des temps longs, i.e. lorsque la longueur de la langue l est grande devant l'épaisseur de la cellule b . Les hypothèses du modèle sont les suivantes¹:

1. L'écoulement est invariant le long de la direction oy . On néglige donc toute dépendance en y .
2. La vitesse moyenne d'injection q est suffisamment importante pour que le mélange diffusif soit négligeable. En d'autres termes, le nombre de Péclet est grand $Pe = qb/D_m \gg 1$.
3. On suppose que l'épaisseur de la langue $\beta(x,t)$ est une fonction lentement variable de x ($b \partial\beta/\partial x \ll 1$). Cette condition suppose, entre autre, que la longueur de la langue, l , est très grande devant l'épaisseur de la cellule: $l \gg b$.
4. Les fluides sont supposés suffisamment visqueux pour que l'écoulement puisse être considéré quasi-stationnaire. En d'autres termes, le nombre de Reynolds de l'écoulement est petit dans chaque fluide $Re_i = q\rho_i b/\eta_i \ll 1$ avec $i = 1,2$.

La condition d'incompressibilité s'écrit:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.1)$$

où u et w sont les composantes de la vitesse suivant les axes ox et oz . Dimensionnellement, cette équation implique que $w \sim u b/l \ll u$. L'écoulement est donc localement parallèle dans la direction ox (les composantes suivant l'axe oz de la vitesse et, par conséquent, du gradient de pression sont négligeables).

Avec ces hypothèses, l'équation de conservation de la masse de fluide 2 s'écrit:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uc) = 0 \quad (4.2)$$

où $c(x,z,t)$ est la concentration locale de fluide injecté. En moyennant cette équation le long de l'épaisseur, il vient:

$$\frac{\partial \bar{c}(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial qF(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (4.3)$$

1. Notons que les points 3 et 4 correspondent à l'hypothèse dite de "lubrification".

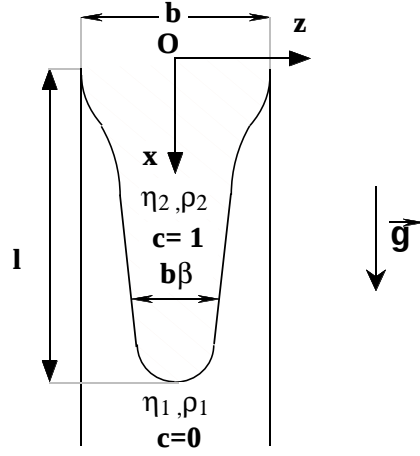


FIG. 4.1 – Schéma de l'interface entre les deux fluides dans le plan oxz i.e. entre les plaques de la cellule. L'interface a la forme d'une "langue", d'épaisseur $\beta(x,t)$. La longueur de la langue l est grande devant l'épaisseur de la cellule b .

$\bar{c}(x,t)$ est la concentration de fluide 2 moyennée le long de l'épaisseur, définie par:

$$\bar{c}(x,t) = \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c(x,z,t) dz \quad (4.4)$$

$F(x,t)$ est le flux local de fluide 2 adimensionné par rapport au débit d'injection qb :

$$F(x,t) = \frac{1}{qb} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c(x,z,t) u(x,z,t) dz \quad (4.5)$$

Puisque les deux fluides ne se mélangent pas, l'expression de la concentration locale $c(x,z,t)$ est très simple (Fig.4.1):

$$c(x,z,t) = 0 \text{ pour } |z| \in [b\beta(x,t)/2, b] \quad (4.6)$$

$$c(x,z,t) = 1 \text{ pour } |z| \in [0, b\beta(x,t)/2] \quad (4.7)$$

Les équations (4.4) et (4.5) se simplifient donc considérablement:

$$\bar{c}(x,t) = \beta(x,t) \quad (4.8)$$

$$F(x,t) = \frac{2}{qb} \int_0^{+\frac{b\beta}{2}} u(x,z,t) dz \quad (4.9)$$

4.1.2 Calcul de la fonction de flux

A. Détermination du profil de vitesse

Pour calculer l'intégrale (4.9), il faut déterminer le profil de vitesse $u(x,z,t)$, qui est solution de l'équation de Stokes dans chaque fluide:

$$\eta_1 \frac{d^2 u_1}{dz^2} = \frac{dp}{dx} - \rho_1 g \text{ pour } |z| \in [b\beta(x,t)/2, b] \quad (4.10)$$

$$\eta_2 \frac{d^2 u_2}{dz^2} = \frac{dp}{dx} - \rho_2 g \text{ pour } |z| \in [0, b\beta(x,t)/2] \quad (4.11)$$

où u_1 et u_2 sont les profils de vitesse dans le fluide 1 ($|z| \in [b\beta/2, b]$) et 2 ($|z| \in [0, b\beta/2]$). Puisque l'écoulement est quasi parallèle, le gradient de pression dp/dx est identique dans chaque fluide. Le champ de vitesse doit également satisfaire les conditions aux limites suivantes :

1. La condition de non glissement aux parois solides: $u_1 = 0$ pour $|z| = \frac{b}{2}$;
2. La condition de continuité de la vitesse à l'interface entre les deux fluides:
 $u_1 = u_2$ pour $|z| = \frac{b\beta(x,t)}{2}$;
3. La continuité de la contrainte visqueuse à l'interface entre les deux fluides:
 $\eta_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = \eta_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}$ pour $|z| = \frac{b\beta(x,t)}{2}$.

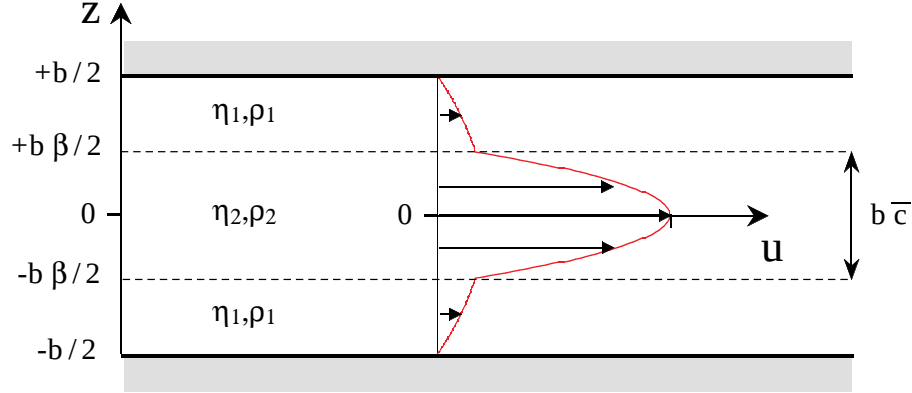


FIG. 4.2 – Schéma de la configuration des deux fluides entre les plaques dans l'hypothèse d'un écoulement quasi-parallèle. Le profil de vitesse correspondant est parabolique dans chaque fluide.

La résolution de ces équations conduit à l'expression suivante du champ de vitesse:

$$u_1 = \frac{b^2}{8\eta_1} \left[\left(\rho_1 g - \frac{dp}{dx} \right) \left(1 - 4 \frac{z^2}{b^2} \right) - 2\Delta\rho g \bar{c} \left(1 - 2 \frac{|z|}{b} \right) \right] \quad (4.12)$$

$$u_2 = \frac{b^2}{8\eta_1} \left\{ \left(\rho_1 g - \frac{dp}{dx} \right) \left[M \left(\bar{c}^2 - 4 \frac{z^2}{b^2} \right) + (1 - \bar{c}^2) \right] - 2\Delta\rho g \left[\frac{M}{2} \left(\bar{c}^2 - 4 \frac{z^2}{b^2} \right) + \bar{c}(1 - \bar{c}) \right] \right\} \quad (4.13)$$

où $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$. Le profil de vitesse correspondant, parabolique dans chaque fluide, est schématisé sur la figure 4.2.

B. Loi de Darcy effective

A partir du profil de vitesse, on peut calculer les flux locaux de chaque fluide q_1 et q_2 en fonction de $\bar{c}$:

$$q_1 = \frac{2}{b} \int_{b\beta/2}^b u_1 dz = \frac{b^2}{24\eta_1} (\bar{c} - 1)^2 \left[\left(\rho_1 g - \frac{dp}{dx} \right) (\bar{c} + 2) - 3\Delta\rho g \bar{c} \right] \quad (4.14)$$

$$q_2 = \frac{2}{b} \int_0^{b\beta/2} u_2 dz = \frac{b^2}{8\eta_1} \bar{c} \left[\left(\rho_1 g - \frac{dp}{dx} \right) \left(\bar{c}^2 \left(\frac{2}{3}M - 1 \right) + 1 \right) - 2\Delta\rho g \bar{c} \left(\bar{c} \left(\frac{M}{3} - 1 \right) + 1 \right) \right] \quad (4.15)$$

Notons que $F = q_2/q$. La conservation du débit, qui s'écrit: $q = q_1 + q_2$, permet d'exprimer la vitesse moyenne q en fonction de $\bar{c}$ et du gradient de pression:

$$q = -\frac{b^2}{12\eta_e} \left(\frac{dp}{dx} - \rho_e g \right) \quad (4.16)$$

où les coefficients η_e et ρ_e sont définis par:

$$\eta_e = \frac{\eta_1}{\bar{c}^3(M-1) + 1} \quad (4.17)$$

$$\rho_e = \rho_1 + \Delta\rho \bar{c} \frac{\bar{c}^2 \left(\frac{3}{2} - M \right) - \frac{3}{2}}{\bar{c}^3(M-1) + 1} \quad (4.18)$$

L'équation (4.16) est formellement identique à la loi de Darcy (1.27) appliquée au déplacement d'un fluide "effectif" dont la densité ρ_e et la viscosité η_e dépendent de la concentration moyennée $\bar{c}(x,t)$.

C. Expression de la fonction de flux

L'équation (4.16) permet d'exprimer le gradient de pression dp/dx en fonction de q et de calculer $F = q_2/q$:

$$F(x,t) = F(\bar{c}) = \frac{\bar{c}}{2} \frac{[(2M-3)\bar{c}^2 + 3]}{[1 + (M-1)\bar{c}^3]} - \frac{\bar{c}^2(1-\bar{c})^3}{4U} \frac{[(4M-3)\bar{c} + 3]}{[1 + (M-1)\bar{c}^3]} \quad (4.19)$$

Le flux F dépend donc uniquement de la variable $\bar{c}$ et des paramètres de contrôle M et U . $F(\bar{c})$ représentant le flux adimensionné de fluide 2 à travers la tranche d'épaisseur $b\bar{c}(x,t)$ de la langue 2D, il vérifie $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$.

Pour deux fluides de même densité, U est infini et on retrouve le résultat de Yang et Yortsos [87]:

$$F(\bar{c}) = \frac{\bar{c}}{2} \frac{[(2M-3)\bar{c}^2 + 3]}{[1 + (M-1)\bar{c}^3]} \quad (4.20)$$

D. Remarques

Nous avons vu lors du premier chapitre de cette partie du mémoire qu'à faible nombre de Péclet, le déplacement de deux fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw est décrit par la loi de Darcy (1.27). Sous l'effet de la diffusion, la concentration locale est homogène dans l'épaisseur. La viscosité et la densité varient donc en fonction de la concentration moyennée dans l'épaisseur $\bar{c}(x,t)$, dont l'évolution est gouvernée par l'équation de dispersion-convection (1.28).

Nous constatons à présent qu'aux grands nombres de Péclet, il est également possible d'appliquer la loi de Darcy à condition de considérer un fluide "effectif" de densité ρ_e et de viscosité η_e . Bien que les fluides 1 et 2 ne se mélangent pas, ρ_e et η_e dépendent de la concentration moyennée $\bar{c}(x,t)$. Cette fois, l'évolution de $\bar{c}(x,t)$ est décrite par l'équation de conservation moyennée (4.3). La détermination de la forme des fronts de concentration est un des objectifs de ce chapitre.

4.2 Théorie des ondes cinématiques

Puisque la fonction de flux ne dépend que de la concentration moyennée: $F(\bar{c})$, l'équation de conservation (4.3) prend la forme d'une équation hyperbolique:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + q \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (4.21)$$

Cette équation très générale décrit la propagation des ondes cinématiques [32, 42, 84, 87]. Elle intervient dans la description de nombreux phénomènes comme la sédimentation [42] ou la description du trafic routier [84]. On trouve notamment une description des conditions d'auto-raïdissement dans un front de sédimentation dans la thèse de J. Martin [42] à laquelle cette partie du mémoire doit beaucoup.

Dans les paragraphes suivants, nous commençons par rappeler quelques unes des propriétés de l'équation (4.21) avant de les appliquer à la description du régime 2D. Nous renvoyons le lecteur désireux d'approfondir plus avant la théorie des ondes cinématiques aux références bibliographiques.

4.2.1 Vitesse de propagation d'une concentration dans un profil

L'équation (4.21) permet en particulier de calculer la vitesse normalisée de chaque concentration $\bar{c}$ définie par:

$$V(\bar{c}) = \frac{1}{q} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\bar{c}} \quad (4.22)$$

En effet, $\bar{c}$ étant fonction de x et t , on a:

$$d\bar{c} = \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right)_t dx + \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} \right)_x dt \quad (4.23)$$

A $\bar{c}$ fixé, il vient donc:

$$V(\bar{c}) = \frac{1}{q} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\bar{c}} = - \frac{(\partial \bar{c} / \partial t)_x}{(\partial \bar{c} / \partial x)_t} \quad (4.24)$$

Or d'après (4.21):

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = -q \frac{\partial F}{\partial x} = -q \frac{dF}{d\bar{c}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (4.25)$$

Il vient donc finalement:

$$V(\bar{c}) = \frac{1}{q} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\bar{c}} = \frac{dF}{d\bar{c}} \quad (4.26)$$

Cette équation n'est valable que si le profil de concentration $\bar{c}(x,t)$ est dérivable. Dans ce cas, la vitesse de propagation $V(\bar{c}_0)$ d'une concentration $\bar{c}_0$ donnée dans un front est égale à la pente de la tangente à la "courbe de flux" au point de coordonnées $\bar{c}_0, F(\bar{c}_0)$ (Fig.4.3).

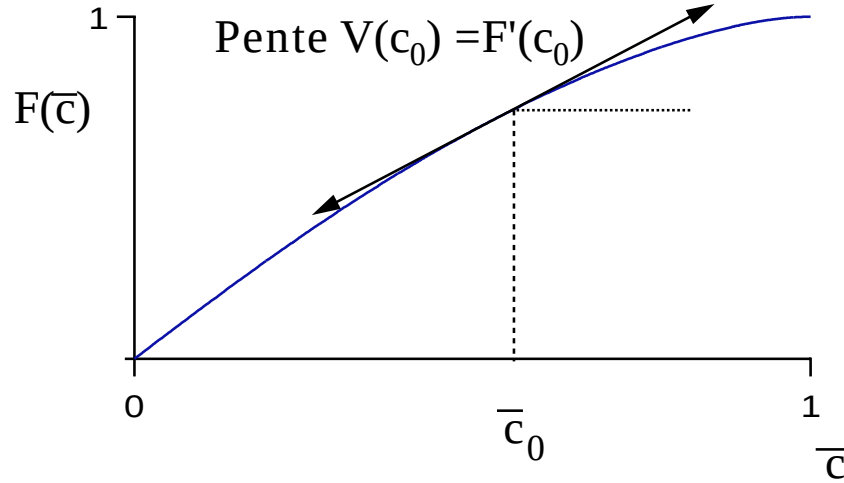


FIG. 4.3 – *Exemple de courbe de flux. La vitesse de propagation $V(\bar{c}_0)$ d'une concentration $\bar{c}_0$ donnée est égale à la pente de la tangente à la "courbe de flux" au point de coordonnées $(\bar{c}_0, F(\bar{c}_0))$.*

Il est important de remarquer que la vitesse $V(\bar{c})$ représente la vitesse de propagation d'une grandeur physique, la concentration moyenne $\bar{c}$, et non la vitesse d'une particule matérielle.

4.2.2 Evolution locale d'un profil de concentration aux temps courts

Avec l'expression de $V(\bar{c})$, on peut prévoir l'évolution locale d'un profil. Considérons pour cela une petite partie de profil comprise entre $\bar{c}_0$ et $\bar{c}_0 + d\bar{c}$ ($d\bar{c} > 0$). Conformément à la forme de nos fronts et aux conventions d'orientation des axes définies auparavant,

nous supposons que la tranche $\bar{c}_0$ se trouve devant la tranche $\bar{c}_0 + d\bar{c}$ (i.e. en x plus grand). Le gradient de concentration est donc négatif. Deux situations sont susceptibles de se produire.

Cas 1: auto-étalement

Si la vitesse de la tranche $\bar{c}_0$ est plus grande que celle de la tranche $\bar{c}_0 + d\bar{c}$, le gradient de concentration diminue (en valeur absolue) proportionnellement au temps (Fig.4.4) . On parle d'auto-étalement du front.

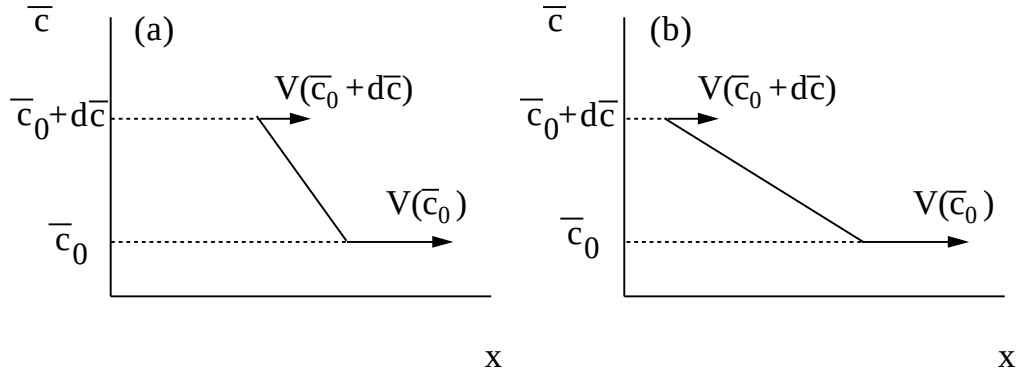


FIG. 4.4 – *Position relative des tranches de concentration $\bar{c}_0$ et $\bar{c}_0 + d\bar{c}$ aux instants t (a) et $t + dt$ (b). La vitesse de la tranche $\bar{c}_0$ étant plus grande que celle de la tranche $\bar{c}_0 + d\bar{c}$, le front s'auto-étale.*

Cas 2: auto-raidissement

Si, au contraire, la vitesse de la tranche $\bar{c}_0$ est plus faible que celle de la tranche $\bar{c}_0 + d\bar{c}$, cette dernière rattrape la tranche $\bar{c}_0$ de sorte que le gradient de concentration augmente (en valeur absolue) proportionnellement au temps (Fig.4.5) . On parle d'auto-raidissement du front.

Condition d'auto-raidissement

D'après l'équation (4.26):

$$V(\bar{c}_0 + d\bar{c}) - V(\bar{c}_0) = \frac{d^2 F}{d\bar{c}^2} d\bar{c} \quad (4.27)$$

de sorte que les conditions décrivant les deux situations possibles se traduisent par:

1. auto-étalement si $\frac{d^2 F}{d\bar{c}^2} < 0$
2. auto-raidissement si $\frac{d^2 F}{d\bar{c}^2} > 0$

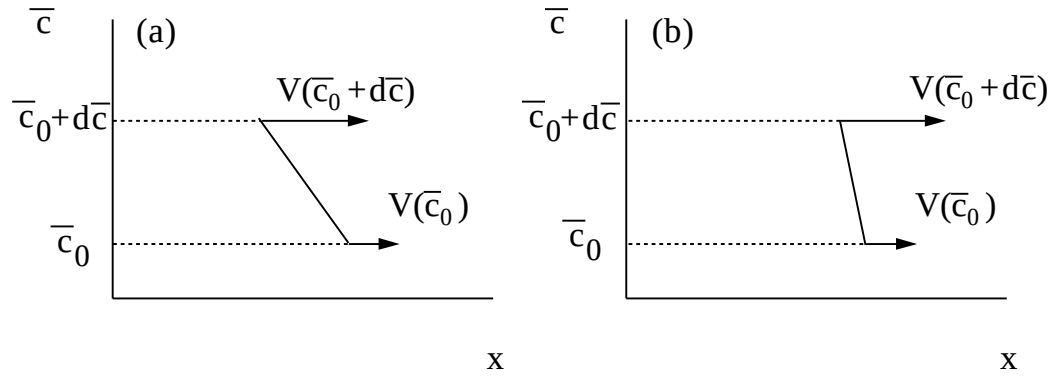


FIG. 4.5 – *Position relative des tranches de concentration $\bar{c}_0$ et $\bar{c}_0 + d\bar{c}$ aux instants t (a) et $t + dt$ (b). La vitesse de la tranche $\bar{c}_0$ étant plus faible que celle de la tranche $\bar{c}_0 + d\bar{c}$, le front s'auto-raïdit.*

L'évolution locale d'un profil dépend donc de la concavité de la courbe de flux. Le front s'auto-étale si la concavité est tournée vers le bas ($F''(\bar{c}) < 0$). Au contraire, le front s'auto-raïdit si la concavité est tournée vers le haut ($F''(\bar{c}) > 0$).

4.2.3 Evolution d'un profil de concentration aux temps longs

Dans le paragraphe précédent, nous avons considéré l'évolution d'une petite partie différentiable du profil de concentration $\bar{c}(x,t)$ sur un intervalle de temps court. Nous allons étudier maintenant l'évolution du profil de concentration entier sur un intervalle de temps long. Pour un profil $\bar{c}(x,t)$ décroissant de manière monotone, ce qui correspond à la situation qui nous intéresse dans ce chapitre, deux types de situations peuvent se présenter.

Cas 1: profil autosimilaire

Si $F''(\bar{c}) \leq 0$ sur tout l'intervalle de concentrations $\bar{c} \in [0,1]$, l'analyse donnée au paragraphe précédent reste valable sur l'ensemble du profil de concentration. En effet l'ensemble du front s'auto-étale et le gradient de concentration diminue (en valeur absolue) avec le temps de sorte que le profil demeure différentiable aux temps supérieurs et que le raisonnement reste toujours applicable. On obtient donc un front de concentration continu et autosimilaire. La figure 4.6 donne un exemple de courbe de flux ainsi que le profil de vitesse associé correspondant à ce type de situation.

Cas 2: profil avec choc entre les concentrations $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_M$

Si il existe dans le profil un intervalle de concentration $[\bar{c}_1, \bar{c}_2]$ dans lequel $d^2 F / d\bar{c}^2 \geq 0$ (Fig.4.8), l'analyse locale devient insuffisante aux temps longs car le profil évolue vers un

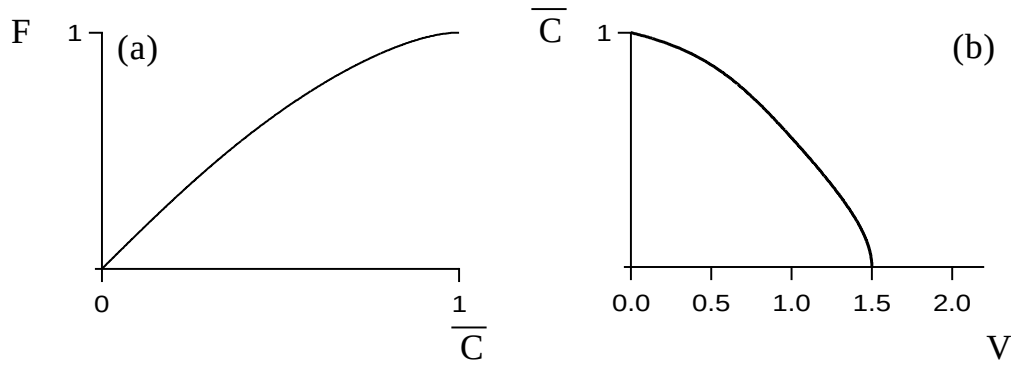


FIG. 4.6 – (a) courbe de flux $F(\bar{c})$ et (b) profil de vitesse correspondant au cas où $F''(\bar{c}) \leq 0$ sur tout l'intervalle de concentrations $\bar{c} \in [0,1]$.

profil non différentiable. Considérons la situation représentée sur la figure 4.5. La tranche de concentration $\bar{c}_0 + d\bar{c}$ va finir par "rattraper" la tranche de concentration $\bar{c}_0$ pour former un échelon, ou "choc", de concentration. Au moment où cela se produit, le gradient de concentration entre $\bar{c}_0$ et $\bar{c}_0 + d\bar{c}$ devient infini. Le profil de concentration n'est alors plus différentiable entre $\bar{c}_0$ et $\bar{c}_0 + d\bar{c}$. Le raisonnement local ne peut plus s'appliquer car l'équation (4.26) n'est plus valable et la vitesse $V(\bar{c})$ n'est plus définie entre $\bar{c}_0$ et $\bar{c}_0 + d\bar{c}$.

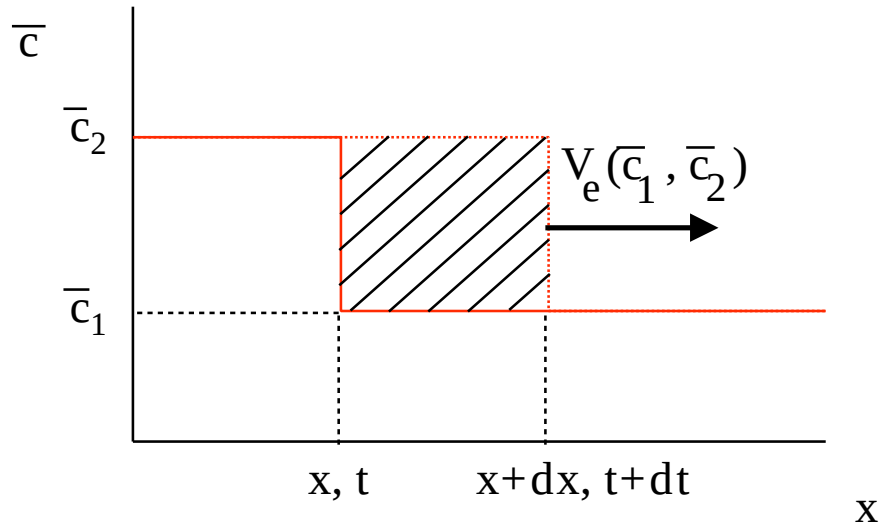


FIG. 4.7 – Schéma du principe de calcul de la vitesse de propagation d'un échelon.

Vitesse d'un choc. Pour comprendre l'évolution du front aux temps supérieurs, il est donc nécessaire de considérer la propagation d'un choc de concentration entre $\bar{c}_0$ et $\bar{c}_0 + d\bar{c}$. Plus généralement, puisque $d^2F/d\bar{c}^2 \geq 0$ pour $\bar{c}_1 \leq \bar{c} \leq \bar{c}_2$, il se forme un choc entre $\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2$. La vitesse de propagation $V(\bar{c})$ n'est plus définie entre $\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2$ et doit être

remplacée par la vitesse de propagation du choc notée $V_{choc}(\bar{c}_1, \bar{c}_2)$. Tout comme $V(\bar{c})$, la vitesse de propagation de l'échelon $V_{choc}(\bar{c}_1, \bar{c}_2)$ peut être calculée par des considérations de conservation du volume de fluide injecté.

La propagation d'un choc entre $\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2$ est schématisée sur la figure 4.7. Si l'échelon se trouve en x à l'instant t , sa position à $t + dt$ est $x + dx = x + V_{choc}(\bar{c}_1, \bar{c}_2)dt$. Le volume A de fluide contenu dans l'aire hachurée sur le schéma 4.7 s'écrit:

$$A = V_{choc}(\bar{c}_1, \bar{c}_2)(\bar{c}_2 - \bar{c}_1)dt \quad (4.28)$$

Ce volume est par ailleurs égal à la quantité de fluide injecté traversant la tranche en x d'épaisseur $\bar{c}_2$ pendant l'intervalle dt moins la quantité de fluide traversant la tranche en $x + dx$ d'épaisseur $\bar{c}_1$ pendant l'intervalle dt , ce qui s'écrit d'après la définition de la fonction de flux:

$$A = (F(\bar{c}_2) - F(\bar{c}_1))dt \quad (4.29)$$

En égalant les deux expressions (4.28) et (4.29) de A , on obtient l'expression de la vitesse de propagation d'un échelon de concentration entre $\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2$ [42]:

$$V_{choc}(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = \frac{F(\bar{c}_2) - F(\bar{c}_1)}{\bar{c}_2 - \bar{c}_1} \quad (4.30)$$

Sur la courbe de flux, la vitesse $V_{choc}(\bar{c}_1, \bar{c}_2)$ correspond à la pente de la corde joignant le point de coordonnées $(\bar{c}_1, F(\bar{c}_1))$ au point de coordonnées $(\bar{c}_2, F(\bar{c}_2))$. La condition d'existence du choc $d^2F/d\bar{c}^2 \geq 0$ sur l'intervalle $[\bar{c}_1, \bar{c}_2]$ implique que cette corde se trouve au-dessus de la courbe de flux (Fig.4.8).

Condition d'autoraidissement au voisinage du choc. Une fois connue la vitesse du choc entre $\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2$, la condition d'autoraidissement du front doit être réexaminée de part et d'autre de $\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2$ en tenant compte de la vitesse relative de l'échelon par rapport au reste du profil de concentration. Considérons, par exemple, le profil entre $\bar{c}_2$ et $\bar{c}_2 + d\bar{c}$ (avec $d\bar{c} > 0$). Si la vitesse de la tranche de concentration $\bar{c}_2$, donnée par la vitesse de l'échelon $V_{choc}(\bar{c}_1, \bar{c}_2)$, est inférieure à la vitesse de la tranche $\bar{c}_2 + d\bar{c}$, donnée par $dF/d\bar{c}(\bar{c}_2 + d\bar{c})$, le profil évoluera vers un échelon entre $\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2 + d\bar{c}$. Cette nouvelle condition d'auto-raïdissement s'écrit:

$$V_{choc}(\bar{c}_1, \bar{c}_2) < \frac{dF}{d\bar{c}}(\bar{c}_2 + d\bar{c}) \quad (4.31)$$

Graphiquement, elle se traduit par le fait que la pente de la corde joignant le point $(\bar{c}_1, F(\bar{c}_1))$ au point $(\bar{c}_2, F(\bar{c}_2))$ est inférieure à la pente de la tangente à la courbe de flux au point $(\bar{c}_2 + d\bar{c}, F(\bar{c}_2 + d\bar{c}))$. Plus simplement, le point de la courbe de flux correspondant à la concentration $\bar{c}_2 + d\bar{c}$ se trouve au-dessus de la droite prolongeant la corde. Si cette condition est remplie, il se forme un nouveau choc entre $\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2 + d\bar{c}$.

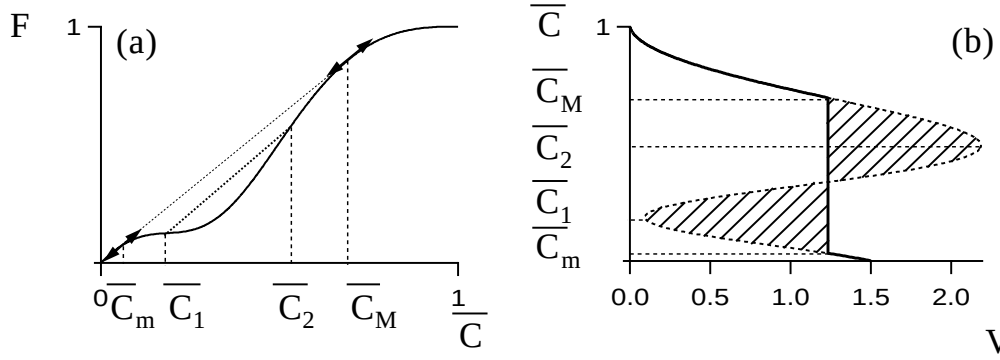


FIG. 4.8 – (a) courbe de flux $F(\bar{c})$ dans le cas d'un choc entre $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_M$. $F''(\bar{c}) \geq 0$ sur l'intervalle de concentration $[\bar{c}_1, \bar{c}_2]$ et $F''(\bar{c}) \leq 0$ sur le reste du profil. La vitesse du choc est donnée par la pente de la corde (ligne pointillée) joignant les points de la courbe de flux correspondant à $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_M$. La corde est tangente à la courbe de flux en $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_M$. (b) Dérivée de la fonction de flux (traits pointillés) et profil de vitesse (trait plein) correspondant.

Le même raisonnement s'applique alors entre le nouvel échelon et la tranche de concentration voisine $\bar{c}_2 + 2d\bar{c}$, et ainsi de suite. L'étude pour les concentrations inférieures à $\bar{c}_1$ conduit au même résultat.

Notre problème consiste à présent à trouver une solution stationnaire, c'est à dire un front de concentration avec un choc dont les bornes n'évoluent pas au cours du temps. D'après la condition d'auto-raïdissement (4.31), tout choc entre deux concentrations $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_M$ avec $\bar{c}_m < \bar{c}_1$ et $\bar{c}_M > \bar{c}_2$ dont la vitesse est donnée par (4.30) et vérifiant l'inégalité:

$$\frac{dF}{dc}(\bar{c}_m) \geq \frac{F(\bar{c}_M) - F(\bar{c}_m)}{\bar{c}_M - \bar{c}_m} \geq \frac{dF}{dc}(\bar{c}_M) \quad (4.32)$$

conduit à un front stationnaire. En effet, si cette condition est vérifiée, la vitesse est une fonction décroissante de $\bar{c}$ et la condition d'auto-raïdissement n'est plus vérifiée nulle part sur le profil. Hors du choc, i.e. pour les intervalles de concentration $[0, \bar{c}_m]$ et $[\bar{c}_M, 1]$, la vitesse de chaque tranche reste donnée par l'équation (4.26).

Pour que cette solution soit effectivement réalisée, il faut de plus qu'elle soit stable par rapport à de petites perturbations du choc. La seule solution stable est celle qui assure la continuité du profil de vitesse aux deux extrémités de l'échelon (on parle de choc de contact):

$$V_{choc}(\bar{c}_m, \bar{c}_M) = V(\bar{c}_m) = V(\bar{c}_M) \quad (4.33)$$

ce qui se traduit par:

$$\frac{F(\bar{c}_M) - F(\bar{c}_m)}{\bar{c}_M - \bar{c}_m} = \frac{dF}{dc}(\bar{c}_m) = \frac{dF}{dc}(\bar{c}_M) \quad (4.34)$$

Ce système d'équations permet de déterminer $\bar{c}_m$, $\bar{c}_M$ et $V_{choc}(\bar{c}_m, \bar{c}_M)$.

La détermination géométrique de $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_M$ est représentée sur la figure 4.8a. La vitesse du choc est égale à la pente de la corde (ligne pointillée) joignant les points de la courbe de flux correspondant à $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_M$. Pour que l'équation (4.34) soit satisfaite, il faut que la corde soit tangente à la courbe de flux aux points $(\bar{c}_m, F(\bar{c}_m))$ et $(\bar{c}_M, F(\bar{c}_M))$. Le profil de vitesse correspondant est représenté sur la figure 4.8b. En-dessous de $\bar{c}_m$ et au-dessus de $\bar{c}_M$, la vitesse de propagation du profil est donnée par la dérivée de la fonction de flux $F'(\bar{c})$. Entre $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_M$, la vitesse de l'échelon V_{choc} est telle que les aires hachurées de part et d'autre du choc sont égales, de façon à assurer la conservation du débit imposée par (4.30).

Stabilité du choc. Examinons à présent la stabilité du choc en commençant, par exemple, par sa borne supérieure. Supposons qu'il se forme un choc entre $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_0 > \bar{c}_M$ (Fig.4.9a). Si une perturbation "lisse" le choc de façon à ce que le profil de concentration soit à nouveau dérivable entre les deux concentrations $\bar{c}_M$ et $\bar{c}_0$ (Fig.4.9b), l'approche "locale" est à nouveau utilisable et la vitesse $V(\bar{c})$ des concentrations comprises entre $\bar{c}_M$ et $\bar{c}_0$ est donnée par la dérivée de la fonction de flux. Sur l'intervalle $\bar{c} \in [\bar{c}_M, \bar{c}_0]$, $F'(\bar{c}) < V_{choc}(\bar{c}_m, \bar{c}_M)$. Le profil évolue donc au cours du temps vers un choc entre $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_M$.

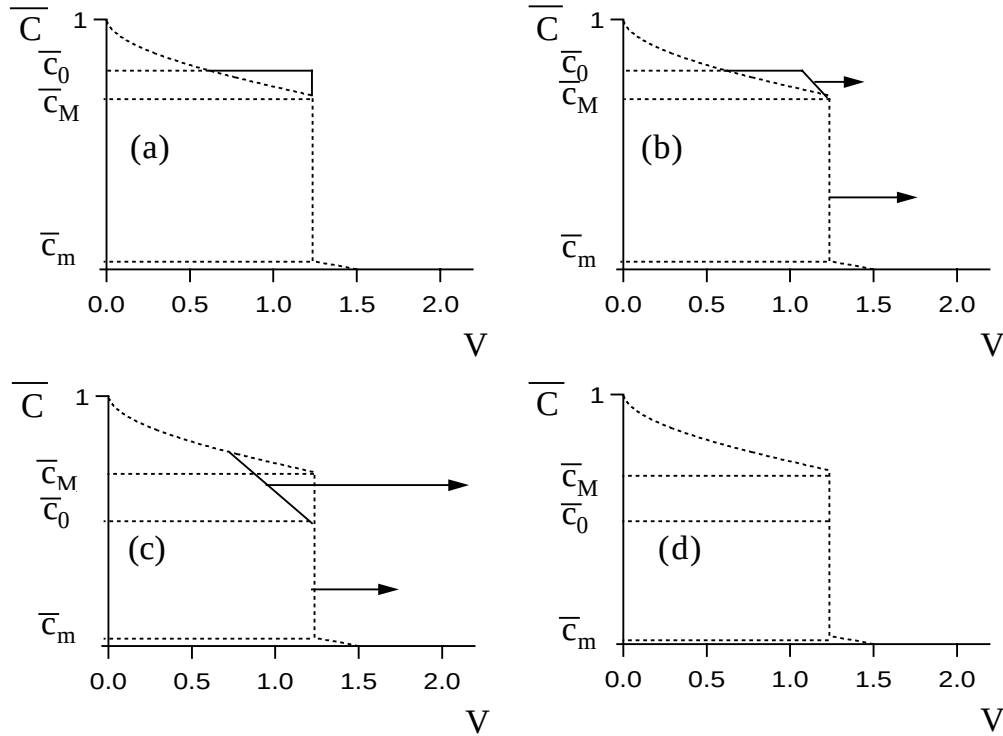


FIG. 4.9 – Evolution d'une perturbation (en trait plein) sur le profil de concentration (en traits pointillés).

Considérons à présent un choc entre $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_0 < \bar{c}_M$ (Fig.4.9c). La vitesse $V(\bar{c})$ des concentrations comprises entre $\bar{c}_0$ et $\bar{c}_M$ est donnée par la dérivée de la fonction de flux. Sur l'intervalle $\bar{c} \in [\bar{c}_0, \bar{c}_M]$, $F'(\bar{c}) > V_{choc}(\bar{c}_m, \bar{c}_M)$. Le profil évolue à nouveau vers un choc entre $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_M$ (Fig.4.9d).

En procédant de manière analogue pour la borne inférieure $\bar{c}_m$, on vérifie que le seul choc stable est celui qui vérifie la condition (4.34).

Cas 3: profil avec choc entre 0 et $\bar{c}_M$

Dans le cas important où aucun couple de concentrations $\bar{c}_m, \bar{c}_M$ satisfaisant (4.34) ne peut être trouvé dans l'intervalle $[0,1]$, on cherche alors une solution en imposant $\bar{c}_m = 0$, ce qui conduit à résoudre:

$$\frac{F(\bar{c}_M)}{\bar{c}_M} = \frac{dF}{dc}(\bar{c}_M) \quad (4.35)$$

Ce cas est illustré sur la figure 4.10. La corde joignant les points de la courbe de flux correspondant aux concentrations $\bar{c}_m = 0$ et $\bar{c}_M$ n'est pas tangente à la courbe en $\bar{c}_m = 0$. La vitesse du choc est en effet supérieure à $F'(\bar{c} = 0)$.

On pourrait de la même façon rechercher une solution en imposant $\bar{c}_M = 1$. Le choix entre les deux solutions possibles se fait en analysant leur stabilité.

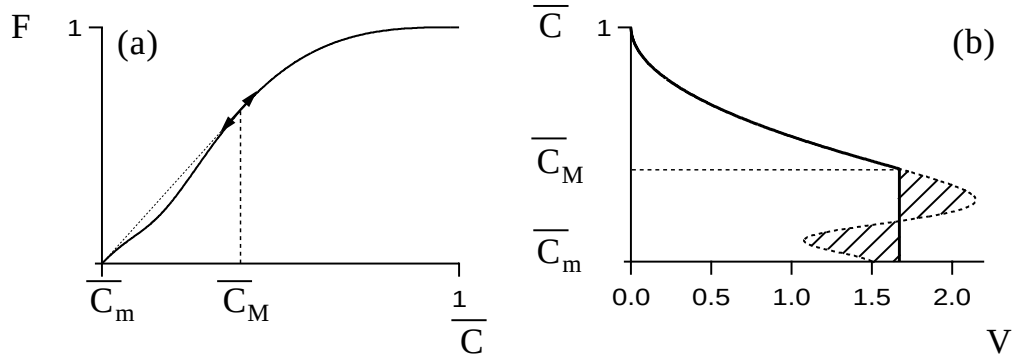


FIG. 4.10 – (a) courbe de flux $F(\bar{c})$ dans le cas d'un choc entre $\bar{c}_m = 0$ et $\bar{c}_M$. $F''(\bar{c}) \geq 0$ sur l'intervalle de concentration $[\bar{c}_1, \bar{c}_2]$ et $F''(\bar{c}) \leq 0$ sur le reste du profil. La vitesse du choc est égale à la pente de la corde (ligne pointillée) joignant les points de la courbe de flux correspondant à $\bar{c} = 0$ et $\bar{c}_M$. La corde est tangente à la courbe de flux uniquement en $\bar{c}_M$. (b) Dérivée de la fonction de flux (traits pointillés) et profil de vitesse (trait plein) correspondant.

Cas 4: choc sans contact

L'expression de la fonction de flux (4.19), et par conséquent l'ensemble du modèle développé précédemment, ne sont valables que dans l'hypothèse où l'écoulement entre

les plaques est localement parallèle. Cette condition, qui suppose un gradient de concentration $d\bar{c}/dx$ infiniment petit, n'est évidemment pas satisfaite au voisinage d'un choc. L'expression de la fonction de flux dans cette région n'est donc pas donnée par l'équation (4.19). Les arguments développés pour justifier la recherche d'un choc de contact supposent pourtant que l'équation (4.19) reste valable près du choc. Ils ne s'appliquent donc pas forcément dans notre cas.

En pratique, un choc dont la vitesse est donnée par l'équation (4.30) et satisfaisant la condition (4.32) est une solution stationnaire acceptable: elle conserve le flux de fluide injecté et la condition d'autoraidissement du front n'est satisfaite nulle part sur le profil. Un exemple de telle solution correspondant à la même courbe de flux que pour la figure 4.8 est donné sur la figure 4.11.

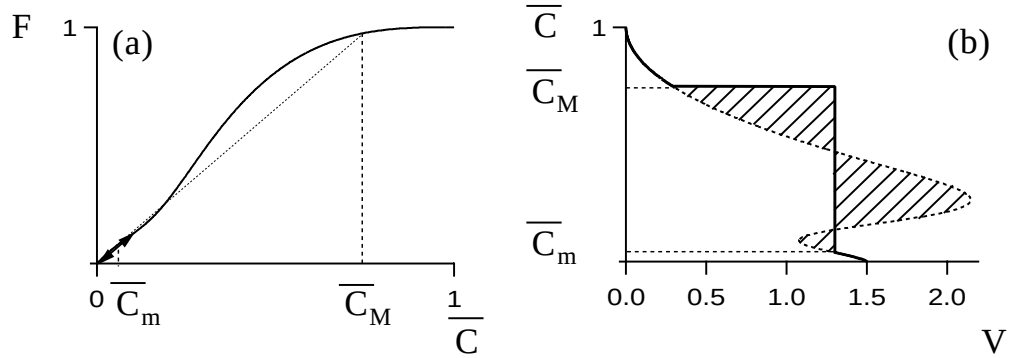


FIG. 4.11 – Construction géométrique d'un choc qui n'est pas un choc de contact pour la courbe de flux (a) identique à celle de la figure 4.8. (b) Dérivée de la fonction de flux (traits pointillés) et profil de vitesse (trait plein) correspondant.

4.3 Applications de la théorie des ondes cinématiques à la description du régime 2D

4.3.1 Différents types de profil de vitesse

Revenons à présent à la description du régime 2D. Bien que la formation de chocs "sans contact" ne soit pas exclue, nous n'avons considéré que le cas de chocs de contact. Sans cette hypothèse, il manque une équation pour déterminer les caractéristiques du choc. D'après la discussion précédente, la forme des profils dépend des propriétés de la fonction de flux. $F(\bar{c}, M, U)$, dont l'expression est donnée par l'équation (4.19), dépend de la variable $\bar{c}$ et des paramètres M et U . L'analyse montre que l'on peut définir trois domaines dans le plan (M, U) dont les frontières sont tracées sur la figure 4.13:

1. Dans le domaine 1, les profils sont autosimilaires: $F''(\bar{c}) \leq 0$ sur l'intervalle

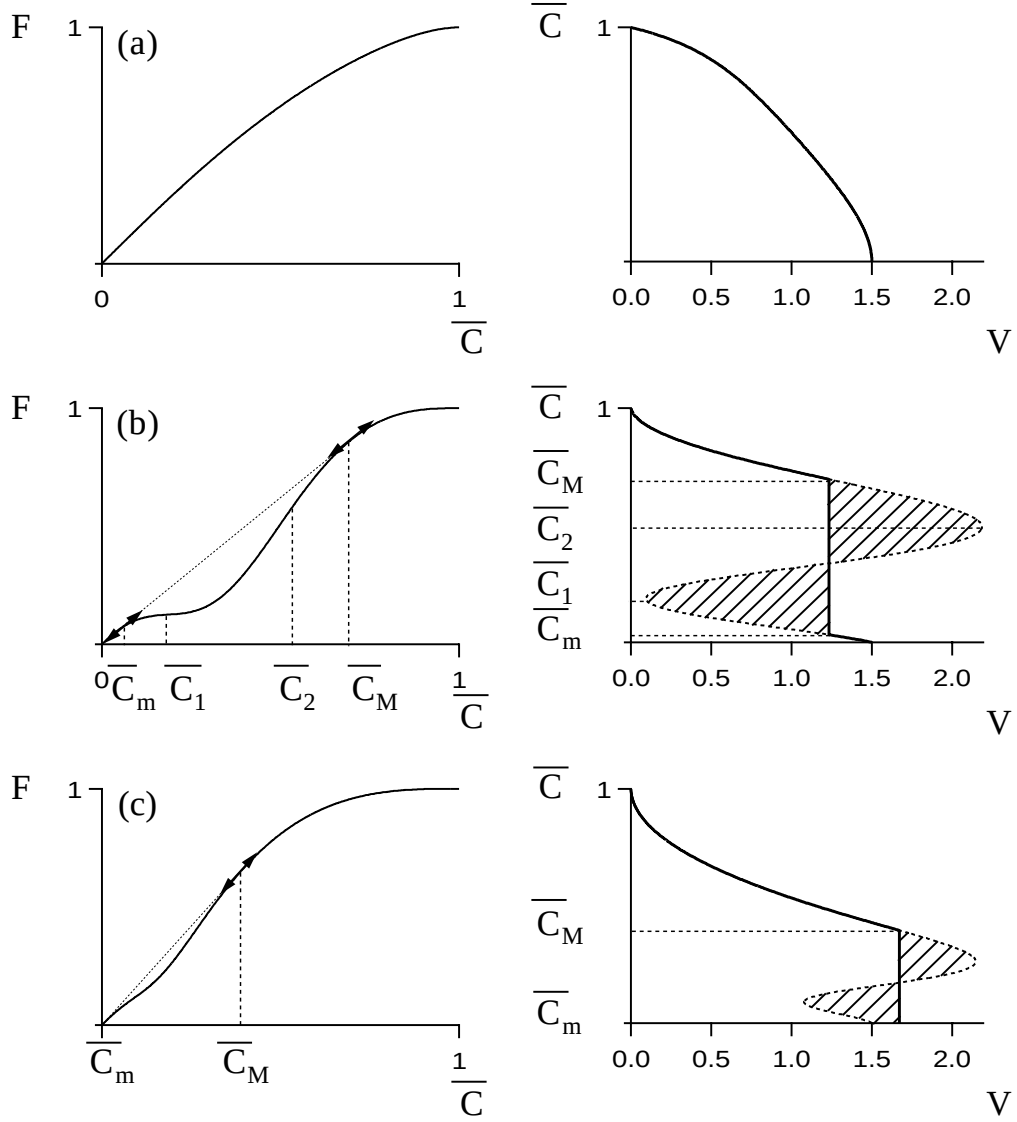


FIG. 4.12 – Gauche: fonction de flux $F(\bar{c})$. La pente des lignes pointillées entre $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_M$ est égale à la vitesse de choc. Les flèches indiquent les points pour lesquels cette ligne est tangente à la courbe de flux. Droite: $\bar{c}$ en fonction de la vitesse V (ligne pleine) et de la dérivée de la fonction de flux (ligne pointillée). (a) domaine 1 ($M = 0,5, U = 1000$). (b) domaine 2 ($M = 10, U = 0,23$). (c) domaine 3 ($M = 100, U = 0,7$).

$\bar{c} \in [0,1]$ (Fig.4.12a). La vitesse maximum du profil, atteinte pour $\bar{c} = 0$, est égale à la vitesse maximale d'un profil parabolique: $V(0) = V_0 = 1,5$.

2. Dans le domaine 2, le profil développe un choc entre deux concentrations $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_M$ (Fig.4.12b). Le reste du profil est autosimilaire. La vitesse du choc V_{choc} est inférieure à 1,5. Le choc est donc précédé par une pointe autosimilaire. La vitesse maximale du profil est toujours $V_0 = 1,5$ en $\bar{c} = 0$.
3. Dans le domaine 3, le profil possède un choc entre $\bar{c}_m = 0$ et $\bar{c}_M$, de vitesse $V_{choc} \geq 1,5$ (Fig.4.12c). Pour $\bar{c} > \bar{c}_M$, le profil est autosimilaire.

On notera que quelles que soient les valeurs de M et de U , $F'(\bar{c} = 0)$ reste égal à $V_0 = 1,5$, ce qui correspond à la vitesse maximale dans un profil de vitesse de Poiseuille (profil parabolique).

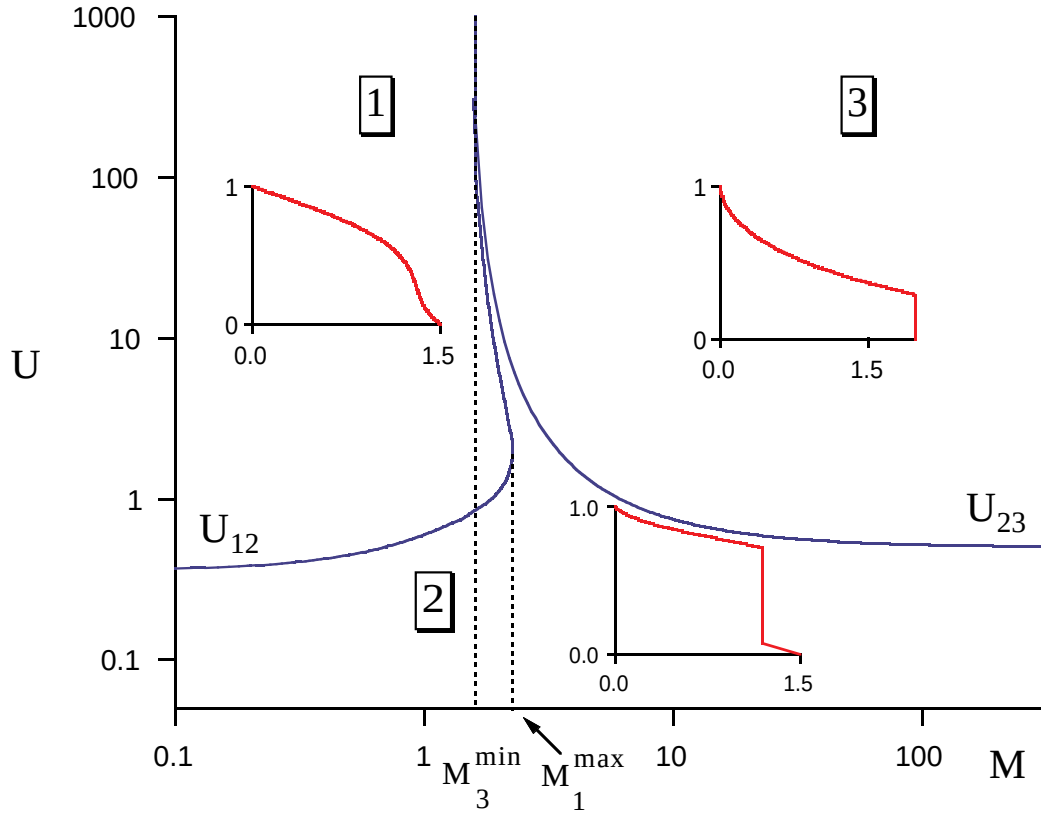


FIG. 4.13 – Frontières $U_{12}(M)$ et $U_{23}(M)$ séparant dans le plan M, U les domaines 1, 2 et 3. $M_1^{max} = 2,25$ correspond à la limite supérieure en M du domaine 1. $M_3^{min} = 1,5$ correspond à la limite inférieure en M du domaine 3.

4.3.2 Détermination des frontières dans le plan (M, U)

A. Frontière entre les domaines 2 et 3

La frontière entre les domaines 2 et 3, $U_{23}(M)$, se calcule de la façon suivante. On cherche, pour un rapport de viscosité M donné, la valeur de U correspondant à la formation d'un choc entre 0 et $\bar{c}_M = \bar{c}_{23}$ dont la vitesse est égale à $V_0 = 1,5$, ce qui s'écrit :

$$\frac{F(\bar{c}_{23}, M, U_{23})}{\bar{c}_{23}} = 1,5 \quad (4.36)$$

La continuité de la vitesse en $\bar{c}_{23}$ implique de plus :

$$\frac{dF}{d\bar{c}}(\bar{c}_{23}, M, U_{23}) = 1,5 \quad (4.37)$$

La résolution de ce système d'équation permet de calculer U_{23} et $\bar{c}_{23}$ en fonction de M . Cette frontière a une forme analytique simple :

$$U_{23} = \frac{8M^3}{(2M-3)^2(4M-3)} \quad \text{pour } M > M_3^{min} = 1,5 \quad (4.38)$$

et la valeur de $\bar{c}_{23}$ s'écrit :

$$\bar{c}_{23} = \frac{2M-3}{4M-3} \quad \text{pour } M > M_3^{min} = 1,5 \quad (4.39)$$

Pour $M < M_3^{min} = 1,5$, le système (4.36) (4.37) n'admet pas de solution.

B. Frontière entre les domaines 1 et 2

Le calcul de la frontière $U_{12}(M)$ entre les domaines 1 et 2 est plus difficile. Dans le domaine 2, la fonction de flux possède deux points d'inflexion dans l'intervalle de concentration $[0,1]$. Dans le domaine 1 au contraire, la fonction de flux ne présente aucun point d'inflexion dans l'intervalle de concentration $[0,1]$. Au moment de la transition entre ces deux domaines, la courbe de flux ne présente plus qu'un seul point d'inflexion en $\bar{c} = \bar{c}_0$. La détermination de la frontière $U_{12}(M)$ se fait donc en cherchant à M fixé la valeur de U pour laquelle la courbe de flux ne présente qu'un seul point d'inflexion. Mathématiquement, cette condition se traduit par le système d'équations :

$$\frac{d^2 F}{d\bar{c}^2}(\bar{c}_0, U, M) = 0 \quad (4.40)$$

$$\frac{d^3 F}{d\bar{c}^3}(\bar{c}_0, U, M) = 0 \quad (4.41)$$

La résolution de ce système d'équation conduit à la frontière $U_{12}(M)$. Ce système d'équation n'étant pas soluble analytiquement, nous l'avons résolu numériquement (avec le logiciel Mathematica). Notons que la condition nécessaire pour l'existence du domaine 1 est $M \leq M_1^{max}$ avec $M_1^{max} = 2,25$.

Dans la limite $U \rightarrow \infty$, les deux branches $U_{12}(M)$ et $U_{23}(M)$ fusionnent sur l'asymptote verticale $M = M_3^{min} = 1,5$. On retrouve donc dans cette limite les résultats de Yang et Yortsos [87] pour un écoulement sans force de flottaison ($\Delta\rho = 0$), i.e. un front autosimilaire pour $M < 1,5$ et un choc entre 0 et $\bar{c}_M$ pour $M > 1,5$.

On notera également que, pour M appartenant à l'intervalle $[M_3^{min}, M_1^{max}]$, la courbe $U_{12}(M)$ est bivaluée. Pour une valeur de M donnée dans cet intervalle, l'augmentation continue de U permet d'explorer successivement les domaines 2, 1, puis à nouveau 2 et finalement 3.

4.3.3 Remarques: limites de validité de la théorie des ondes cinématiques

L'expression de la fonction de flux (4.19), et par conséquent l'ensemble du modèle développé précédemment, ne sont valables que dans l'hypothèse où l'écoulement entre les plaques est localement parallèle. Cette condition suppose que le gradient de concentration $d\bar{c}/dx$ soit infiniment petit.

Dans le domaine 1, le profil s'auto-étale. Le gradient de concentration moyennée diminue (en valeur absolue) proportionnellement au temps. L'hypothèse d'un écoulement quasi-parallèle est donc "de mieux en mieux" satisfaite au fur et à mesure que le temps passe.

Il n'en va pas de même dans les domaines 2 et 3. L'hypothèse d'écoulement quasi-parallèle n'est évidemment pas satisfaite au voisinage d'un choc. La continuité de la vitesse des fluides à travers le choc impose en particulier l'existence d'une zone de recirculation permettant le raccord avec les profils de vitesse paraboliques en amont et aval du choc. La largeur ϵ de cette zone doit être de l'ordre de b et rester constante lorsque le choc se propage. En effet, si ϵ devenait grand devant b , l'hypothèse d'écoulement parallèle serait à nouveau satisfaite, ce qui conduirait à l'auto-raïdissement de cette zone, en application du modèle.

L'écoulement n'étant pas parallèle dans la région du choc, l'expression de la fonction de flux donnée par l'équation (4.19) n'est pas valable dans cette région. Il n'y a pas de raison a priori pour que le modèle développé précédemment donne des résultats en accord avec les observations expérimentales dans les domaines 2 et 3.

Notons que l'existence de courants de recirculation au voisinage des chocs a été mise en évidence dans les simulations numériques de Chen et Meiburg [15] et Watzky [82]. La figure 4.14 représente le champ de vitesse du déplacement de fluides miscibles entre les plaques d'une cellule de Hele-Shaw, observé dans le référentiel en mouvement à la vitesse 1,5. Les deux fluides ayant même densité, cette simulation ne correspond pas totalement à notre cas de figure. On observe cependant l'existence d'une zone de recirculation au niveau de l'avant de l'interface.

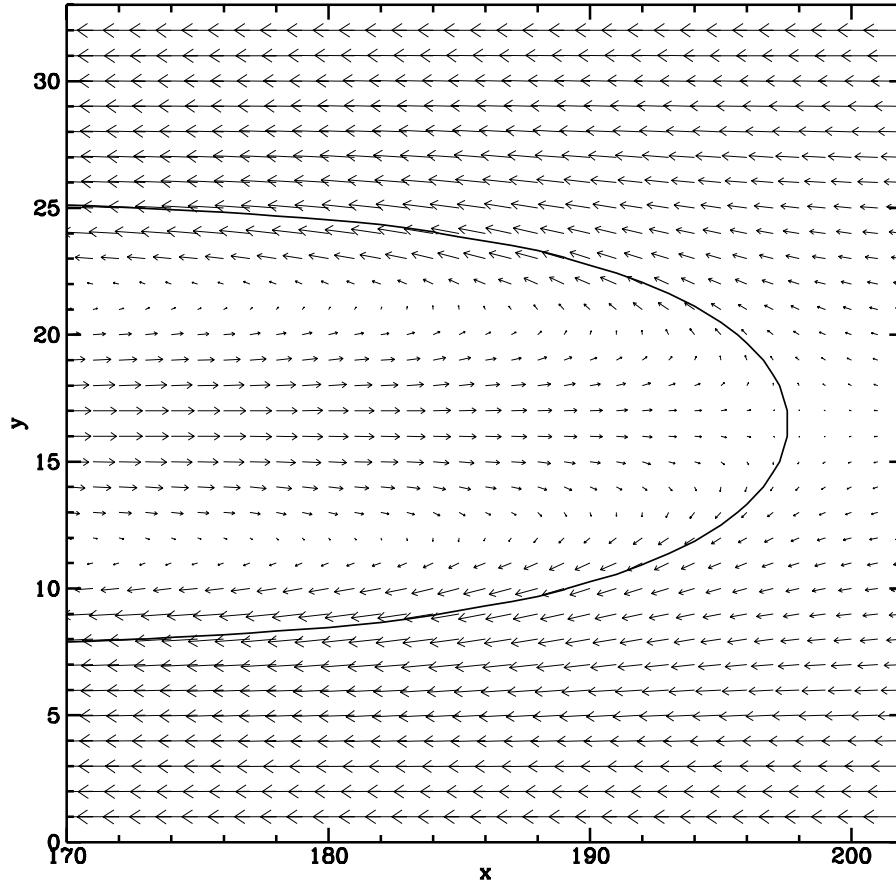


FIG. 4.14 – *Champ de vitesse pour le déplacement de fluides miscibles entre les plaques d'une cellule de Hele-Shaw obtenu par simulation numérique (méthode de gaz sur réseau). Le rapport de viscosité est $M = 100$. Les deux fluides ont même densité $\Delta\rho = 0$. Le champ est observé dans le référentiel du bout du doigt en mouvement à la vitesse $V_0 = 1,5$. (Extrait de la thèse de P. Watzky [82]).*

Ces courants de recirculation sont très probablement responsables de l'existence de "bosses" aux voisinages des chocs sur certains fronts de concentrations. De telles "bosses" sont visibles sur les profils expérimentaux présentés au chapitre précédent (Fig.3.5). Ces bosses pourraient correspondre à la formation d'une structure de type "plume" au voisinage du choc, provoquée par la recirculation. De telles "plumes" ont d'ailleurs été directement observées dans des écoulements en tube par Petitjeans et Maxworthy [59].

4.4 Comparaison théorie/expérience

4.4.1 Profils de vitesse

Nous avons réalisé une série d'expériences en variant U et M de manière à comparer les profils de vitesses mesurés aux prédictions du modèle sur une large gamme de valeurs

des paramètres de contrôle. La figure 4.15 montre quelques résultats de comparaison théorie/expérience pour des profils expérimentaux typiques de chacun des domaines 1, 2 et 3. Nous avons observé que la théorie décrit de manière satisfaisante (qualitativement et quantitativement) tous les profils expérimentaux correspondant aux domaines 1 et 2 (Fig.4.15a, b et c).

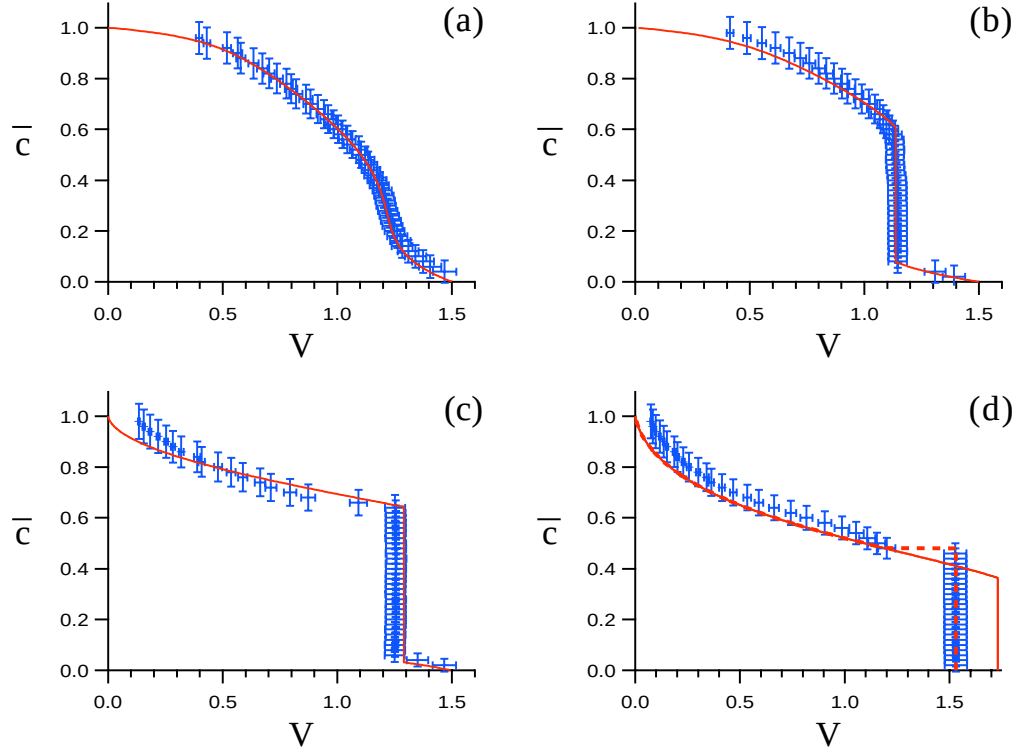


FIG. 4.15 – Comparaison entre les profils de vitesse expérimentaux (croix) et théoriques (trait plein) pour: (a) domaine 1: $M = 0,22$, $U = 0,53 > U_{12}$ ($U_{12} = 0,39$). (b) domaine 2: $M = 0,22$, $U = 0,21 < U_{12}$. (c) domaine 2: $M = 12,2$, $U = 0,31 < U_{23}$ ($U_{23} = 0,69$). (d) domaine 3: $M = 12,2$, $U_{23} < U = 1,84 < U_T$ ($U_T = 1,95 \pm 0,6$).

En ce qui concerne les profils auto-similaires (i.e. de type 1) (Fig.4.15a), l'accord théorie/expérience n'est pas surprenant puisque ce type de profil obéit complètement aux hypothèses du modèle.

Pour les profils de type 2, l'accord entre la théorie et l'expérience, valable aussi bien pour les profils correspondant à $M < M_1^{max}$ (Fig.4.15b) que pour ceux obtenus pour $M > M_3^{min}$ (Fig.4.15c), est un résultat remarquable. L'hypothèse d'écoulement quasi-parallèle n'étant pas vérifiée au niveau des chocs, l'existence de chocs sans contact n'est pas interdite par la théorie. Pourtant, dans le domaine 2, les profils expérimentaux développent des chocs de contact.

Dans le domaine 3, le profil de vitesse expérimental est discontinu au niveau de la borne supérieure du choc, qui n'est donc plus un choc de contact (Fig.4.15d). Pour $U > U_{23}$, le

modèle perd donc son pouvoir prédictif: le choc étant discontinu, il manque une équation pour calculer ses caractéristiques. On peut cependant appliquer le modèle à posteriori en calculant, par exemple, la vitesse de choc correspondant aux bornes $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_M$ mesurées expérimentalement. Le résultat de cette procédure est représenté en traits pointillés sur la figure 4.15d. Le profil de vitesse ainsi obtenu est en bon accord avec le profil expérimental.

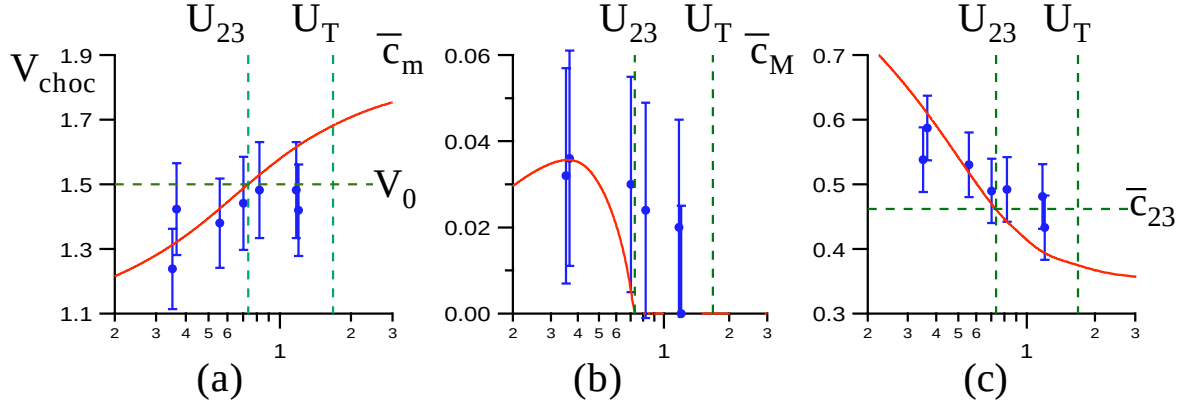


FIG. 4.16 – (a) Vitesse du choc V_{choc} , (b) $\bar{c}_m$ et (c) $\bar{c}_M$ en fonction de U pour $M = 10,5 > M_3^{min}$. $U_{23} = 0,73$ correspond à la transition du domaine 2 vers le domaine 3. $U_T = 1,62$ est la valeur de transition vers le régime 3D.

4.4.2 Evolution du choc en fonction de U

La formation de chocs "sans contact" pour $U > U_{23}$ est également visible sur les figures 4.16 qui représente l'évolution de la vitesse V_{choc} et des bornes $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_M$ de concentration du choc en fonction de U pour $M = 10,5 > M_3^{min}$. A ce rapport de viscosité, on passe du domaine 2 au domaine 3 lorsque U augmente. Sur la figure, nous avons également représenté U_{23} , qui correspond à la transition de profils de type 2 vers des profils de type 3, et U_T correspondant à la transition du régime 2D vers le régime 3D. Tant que $U < U_{23}$, l'accord entre la théorie et les expériences est satisfaisant. Les limites $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_M$ du choc ainsi que sa vitesse sont correctement décrites par le modèle.

Pour $U > U_{23}$, on observe une déviation des valeurs expérimentales de V_{choc} , $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_M$ par rapport aux prédictions théoriques. Alors que la théorie prévoit des vitesses de choc supérieures à $V_0 = 1,5$, les valeurs expérimentales restent inférieures à $V_0 = 1,5$. Parallèlement, les valeurs expérimentales de $\bar{c}_M$ sont supérieures à celles calculées. Quant aux valeurs de $\bar{c}_m$, la théorie prévoit qu'elle s'annule pour $U > U_{23}$ ce qui ne correspond pas aux observations expérimentales. Ce désaccord indique clairement que pour $U > U_{23}$, les chocs ne sont plus des chocs de contact: lorsque la vitesse du choc devient de l'ordre de $V_0 = 1,5$, le profil de vitesse semble "préférer" augmenter la taille du choc plutôt

qu'augmenter sa vitesse. Ce comportement est particulièrement visible sur la figure 4.15d.

Notons que des chocs "sans contact" sont également observés dans les études numériques de Chen et Meiburg [15] et Rakotomalala *et al.* [63].

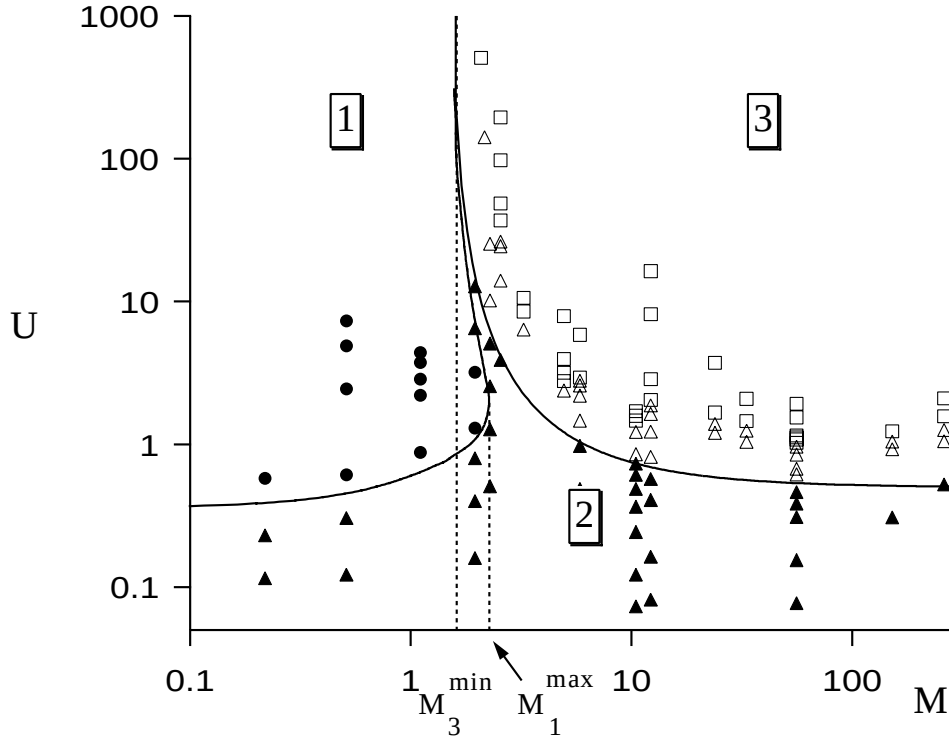


FIG. 4.17 – Diagramme de phase du déplacement de deux fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw verticale. Les lignes continues correspondent aux frontières théoriques $U_{12}(M)$ et $U_{23}(M)$. Les symboles pleins correspondent aux expériences en accord quantitatif avec la théorie: les ronds pleins indiquent des profils expérimentaux de type 1 (fronts de concentration autosimilaires) et les triangles pleins des profils expérimentaux de type 2 (profil avec choc de vitesse inférieur à 1,5). Les triangles vides correspondent aux profils expérimentaux en désaccord avec le modèle (choc sans contact). Les carrés vides correspondent au régime 3D.

4.4.3 Diagramme de phase dans le plan (M, U)

Les observations expérimentales ont également été comparées au diagramme de phase théorique dans le plan M, U . Les résultats sont représentés sur la figure 4.17. Les lignes continues correspondent aux frontières théoriques $U_{12}(M)$ et $U_{23}(M)$. Les ronds pleins correspondent à des profils de type 1 et les triangles pleins à des profils de type 2. Les triangles vides correspondent aux profils expérimentaux en désaccord avec le modèle, c'est

à dire avec des discontinuités dans le profil de vitesse (choc sans contact). Enfin, les carrés vides correspondent au régime 3D.

Pour M appartenant à l'intervalle $[M_3^{min}, M_1^{max}]$, la courbe théorique $U_{12}(M)$ est bi-valuée. Pour une valeur de M donnée dans cet intervalle, l'augmentation continue de U devrait donc permettre d'explorer successivement les domaines 2, 1, puis à nouveau 2 et finalement 3. Pour le vérifier, nous avons réalisé une série d'expériences en déplaçant de l'huile Rhodorsil V10 par de la V5. Le rapport de viscosité pour ce couple d'huile, égal à $M = 2$, est compris entre $M_3^{min} = 1,5$ et $M_1^{max} = 2,25$. En augmentant U à chaque écoulement, nous avons observé des fronts de concentration correspondant successivement aux domaines 2, puis 1, puis à nouveau 2 conformément aux prédictions théoriques. La capacité limitée de la pompe ne nous a pas permis d'atteindre le domaine 3.

La figure 4.17 montre que la théorie des ondes cinématiques (dans la limite des grands nombres de Péclet et des faibles nombres de Reynolds) donne une description quantitative correcte des domaines 1 et 2 (i.e. tant que $M < M_3^{min}$ ou $U < U_{23}$).

Le désaccord théorie/expérience concerne la zone correspondant aux profils de type 3. Ce type de profil n'a pas été observé. Pour $U > U_{23}$, les chocs expérimentaux ne sont pas des chocs de contact. La vitesse des chocs semble saturer autour de 1,5. Lorsque U augmente encore, l'écoulement finit par se déstabiliser vers le régime 3D.

4.4.4 Transition vers le régime 3D

L'ensemble des résultats obtenus ne permet pas d'expliquer la transition vers le régime 3D. Néanmoins, on peut préciser le "scénario" de cette transition.

Pour $M > M_3^{min}$ et U petit, le profil de concentration présente un choc, suivi d'une pointe dont la vitesse est égale à la vitesse maximale d'un profil parabolique $V_0 = 1,5$ (domaine 2). La vitesse du choc augmente avec U jusqu'à atteindre la valeur $V_{choc} = V_0 = 1,5$ lorsque $U = U_{23}$.

Au fur et à mesure que la vitesse du choc augmente, les courants de recirculation au voisinage du choc s'intensifient. Nous pensons que cette recirculation est responsable du fait que le profil développe un choc "sans contact" pour $U > U_{23}$ et provoque finalement la déstabilisation de la langue 2D lorsque U est encore augmenté.

Le modèle ne permet pas de calculer le seuil de transition U_T vers le régime 3D. La courbe $U_{23}(M)$ constitue cependant une estimation inférieure de la vitesse adimensionnée de transition U_T (Fig.4.18). Il est intéressant de remarquer que cette courbe prévoit un rapport de viscosité de transition différent de 1: $M_T = M_1^{max} = 1,5$.

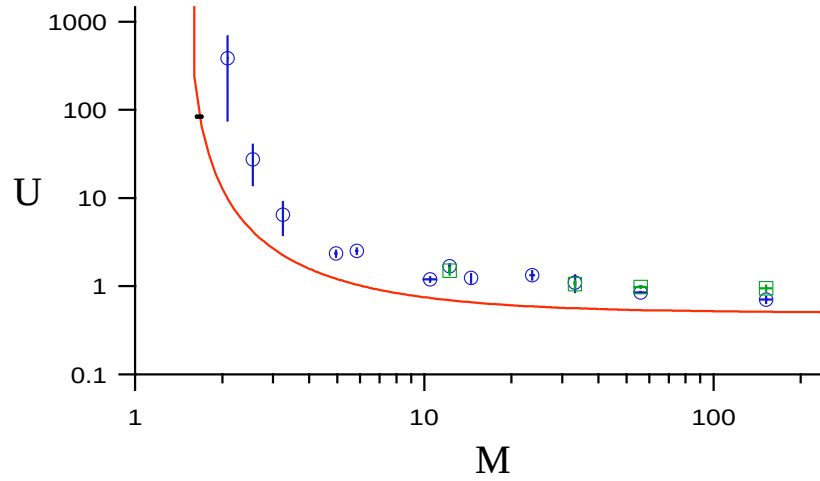


FIG. 4.18 – Vitesse adimensionnée U_T de transition vers le régime 3D mesurée en fonction du rapport de viscosité M . Les cercles et les carrés correspondent respectivement aux expériences en cellule d'épaisseur 0,96mm et 1,92mm. La courbe en trait plein correspond à $U_{23}(M)$.

4.5 Déplacement de fluides miscibles en tube vertical dans la limite des grands nombres de Péclet

Le modèle théorique développé pour la cellule de Hele-Shaw peut être facilement adapté pour décrire le déplacement de deux fluides miscibles dans un tube vertical. Cette géométrie autorise de plus l'observation directe de la forme de l'interface. Nous avons donc réalisé une série d'expériences à grands nombres de Péclet en tube et comparé les observations expérimentales aux prédictions du modèle adapté.

4.5.1 Dispositif expérimental et traitement des données

Le protocole expérimental et le traitement des données en tube sont assez semblables à ceux utilisés en cellule de Hele-Shaw. Nous les décrivons donc rapidement.

A. Montage

Nos expériences ont été réalisées dans un tube en altuglass vertical de rayon 6mm et de longueur 1m (Fig.4.19). L'épaisseur du tube 4mm est suffisante pour éviter des problèmes de flexion.

Le protocole expérimental est identique à celui adopté pour la cellule de Hele-Shaw. Le tube est d'abord rempli de fluide déplacé (le plus dense), injecté dans la cellule par la vanne C tandis que l'air est chassé par la vanne A (Fig.4.19). Cette opération est réalisée grâce à la gravité puisque le fluide initial est contenu dans un réservoir situé au-dessus

du tube. On injecte ensuite le deuxième fluide par la vanne B (la vanne C est fermée) à faible débit de façon à ce qu'il entre très doucement en contact avec le premier fluide en coulant le long des parois du tube. Lorsque tout l'air a été chassé de la cellule, la vanne A est fermée et la C est ouverte.

Le fluide 2 est ensuite injecté à débit constant en B. Le débit d'injection est suffisamment élevé pour que les deux fluides n'aient pas le temps de se mélanger sous l'effet de la diffusion moléculaire ($Pe \gg 1$). On observe alors la formation d'un doigt axisymétrique de fluide injecté (Fig.4.19).

La procédure de remplissage prenant quelques minutes, la diffusion moléculaire mélange les deux fluides sur une zone de l'ordre de $0,1mm$ autour de l'interface.

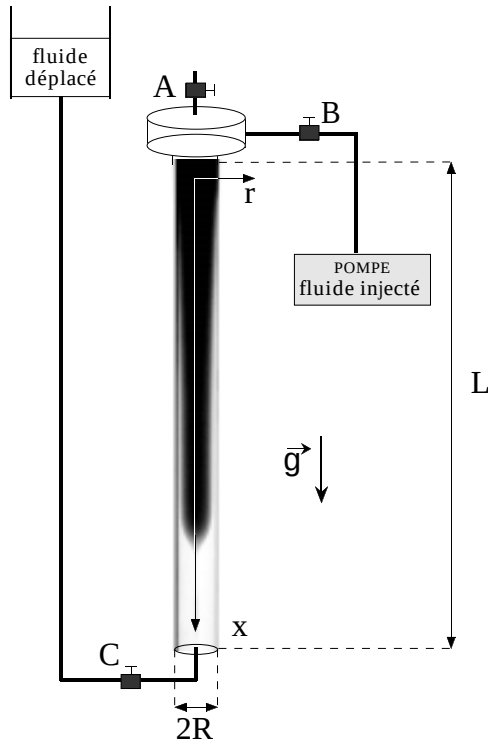


FIG. 4.19 – Schéma du tube utilisé pour les expériences. $R = 6mm$ et $L = 1m$.

B. Acquisition des données

Le tube est éclairé par une lumière blanche et filmé par le système d'acquisition (caméra CCD reliée à un ordinateur). Les deux fluides ne se mélangeant pas, le niveau de gris perçu par l'ordinateur le long de l'axe central du tube (axe ox) s'écrit :

$$N_g(x,t) = N_\infty + (N_0(x,y) - N_\infty) e^{-\alpha R \beta(x,t)} \quad (4.42)$$

où $\beta(x,t)$ est le rayon local du doigt de fluide injecté normalisé par le rayon du tube. $N_0(x,y)$ est le niveau de gris mesuré lorsque le tube est saturé en fluide déplacé (incolore)

et N_∞ correspond au niveau de gris qui serait mesuré par le système si le tube était rempli avec un fluide opaque. N_0 , N_∞ et α sont évalués de la même manière que pour les expériences en cellule de Hele-Shaw.

$\beta(x,t)$ et l'incertitude $\Delta\beta(x,t)$ sont évaluées comme en cellule de Hele-Shaw:

$$\beta(x,y) = \frac{1}{\alpha b} \ln \left(\frac{N_\infty - N_0(x,y)}{N_\infty - N_g(x,y)} \right) \quad (4.43)$$

$$\Delta\beta = \frac{1}{\alpha b} \left(\frac{\Delta N_0 - \Delta N_\infty}{N_\infty - N_0} + \frac{\Delta N_\infty + \Delta N_g}{N_\infty - N_g} \right) + \beta \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \quad (4.44)$$

4.5.2 Modélisation du régime 2D en tube axisymétrique vertical

A. Calcul de la fonction de flux

Les hypothèses et la résolution des équations du modèle en tube sont pour l'essentiel identiques au modèle en cellule de Hele-Shaw. Nous rappellerons donc brièvement les différentes étapes du calcul sans entrer dans les détails.

On considère le déplacement d'un fluide 1 par un fluide 2 dans un tube axisymétrique vertical de rayon R . On se place en coordonnées cylindriques r, θ, x où l'axe ox est confondu avec l'axe du tube. On suppose que le fluide 2, injecté à débit constant, forme un doigt axisymétrique centré sur l'axe ox . Comme dans le cas de la cellule de Hele-Shaw, on note q la vitesse moyenne d'injection et $\beta(x,t)$ le rayon local du doigt normalisée par rapport au rayon du tube R (Fig 4.20).

Les hypothèses du modèle sont identiques à celles utilisées dans la description du régime 2D en cellule de Hele-Shaw:

1. L'écoulement est supposé axisymétrique. On néglige donc toute dépendance en θ .
2. La vitesse moyenne d'injection q est suffisamment importante pour que le mélange diffusif soit négligeable (Le nombre de Péclet est grand $Pe = qR/D_m \gg 1$).
3. On considère l'interface pleinement développée c'est à dire dans la limite où la longueur de la langue l est très grande devant le rayon du tube R , de sorte que l'écoulement est localement parallèle dans la direction ox (les composantes radiales et orthoradiales de la vitesse et du gradient de pression sont négligeables).
4. Les fluides sont supposés suffisamment visqueux pour que l'écoulement puisse être considéré quasi-stationnaire (Le nombre de Reynolds de l'écoulement est petit dans chaque fluide: $Re_i = q\rho_i R/\eta_i \ll 1$ avec $i = 1,2$).

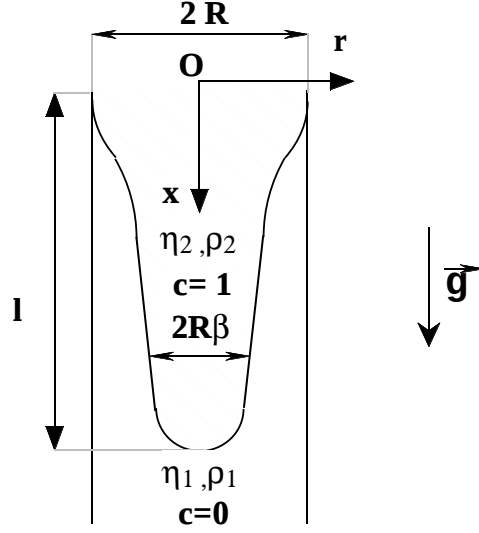


FIG. 4.20 – Schéma de l'interface entre les deux fluides observée dans un tube. L'interface a la forme d'un doigt de rayon $R\beta(x,t)$.

L'équation de conservation de la masse de fluide injecté (fluide 2) moyennée sur la section du tube s'écrit:

$$\frac{\partial \bar{c}(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial qF(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (4.45)$$

où $\bar{c}(x,t)$ est la concentration de fluide 2 moyennée sur la section du tube et $F(x,t)$ est le flux local de fluide 2 adimensionné par rapport au débit d'injection qb . Le nombre de Péclet étant grand, les deux fluides ne se mélangent pas et les expressions de $\bar{c}(x,t)$ et $F(x,t)$ sont considérablement simplifiées:

$$\bar{c}(x,t) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr c(r,x,t) = \beta^2(x,t) \quad (4.46)$$

$$F(x,t) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dR c(r,\theta,x,t) u(r,\theta,x,t) = \frac{2}{R^2} \int_0^{\beta(x,t)} r dr u(r,x,t) = F(\bar{c}(x,t)) \quad (4.47)$$

où $c(r,x,t)$ est la concentration locale de fluide injecté et $u(r,x,t)$ est la composante de la vitesse suivant l'axe ox . La détermination du profil de vitesse par résolution de l'équation de Stokes permet d'exprimer le flux F en fonction de $\bar{c}$, M et U :

$$F(\bar{c}) = \bar{c} \frac{(M-2)\bar{c}+2}{1+(M-1)\bar{c}^2} + \frac{\bar{c}^2(1-\bar{c})[4-M+(4+3M)\bar{c}]}{U[1+(M-1)\bar{c}^2]} + \frac{2\bar{c}^2}{U} \ln \bar{c} \quad (4.48)$$

L'expression de la vitesse adimensionnée U est cependant légèrement différente de celle pour une cellule de Hele-Shaw:

$$U = \frac{8\eta_1 q}{R^2 \Delta \rho g} \quad (4.49)$$

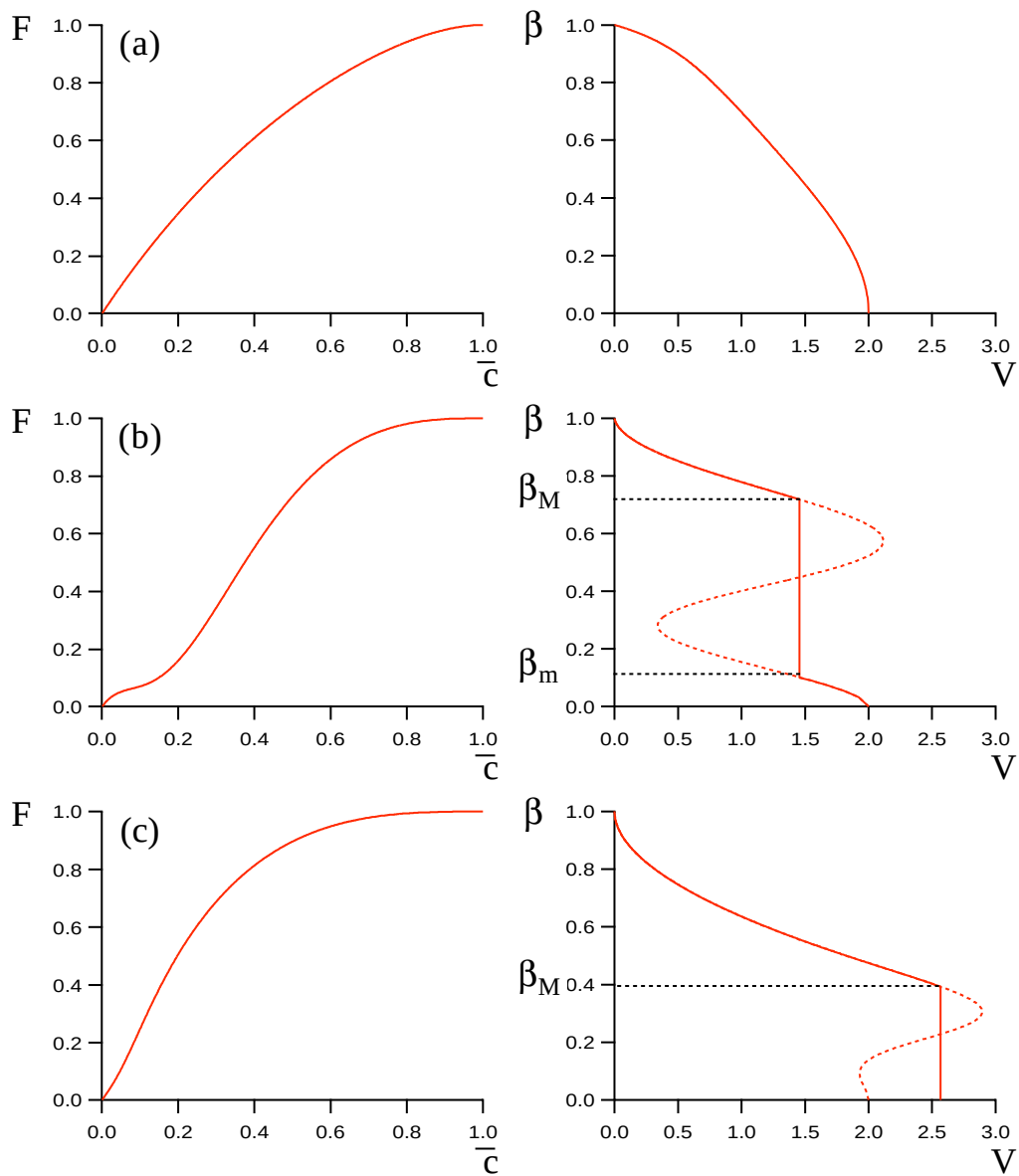


FIG. 4.21 – *Fonction de flux $F(\bar{c})$ en tube (à gauche) et $\bar{c}$ en fonction de la vitesse V (ligne pleine) et de la dérivée de la fonction de flux (ligne pointillée) (à droite). (a) domaine 1 ($M = 0,5$, $U = 1000$). (b) domaine 2 ($M = 10$, $U = 0,4$). (c) domaine 3 ($M = 100$, $U = 1$).*

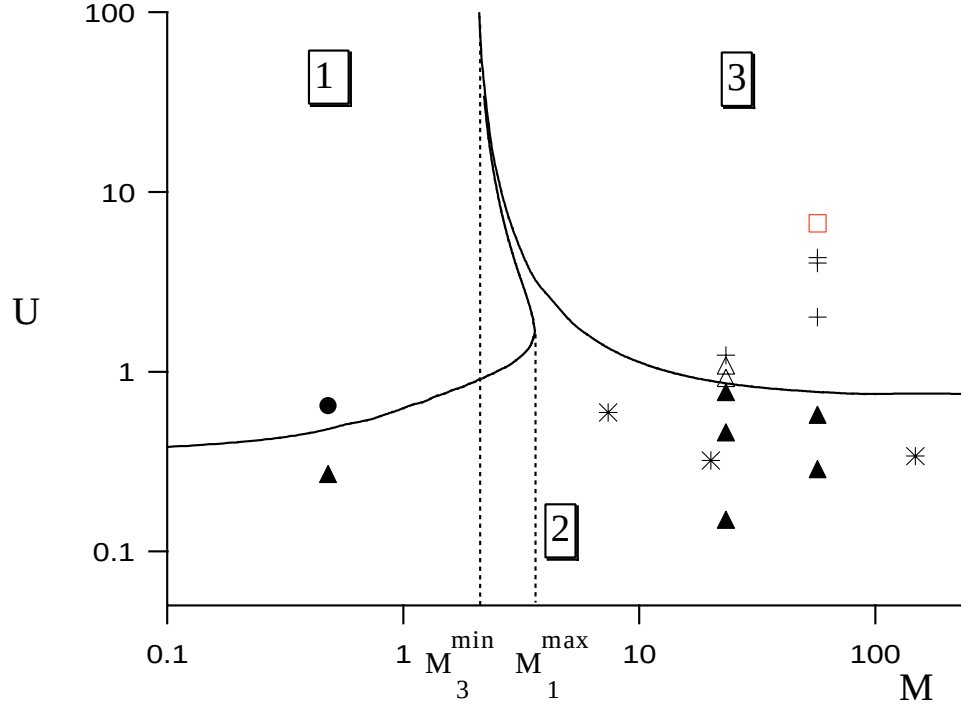


FIG. 4.22 – Diagramme de phase du déplacement de deux fluides miscibles en tube vertical. Les lignes continues correspondent aux frontières théoriques $U_{12}(M)$ et $U_{23}(M)$ séparant dans le plan M, U les domaines 1, 2 et 3. $M_1^{\max} = 3,6$ correspond à la limite supérieure en M du domaine 1. $M_3^{\min} = 2$ correspond à la limite inférieure en M du domaine 3. Les symboles pleins correspondent aux expériences en accord quantitatif avec la théorie: les ronds pleins indiquent des profils expérimentaux de type 1 (fronts de concentration autosimilaires) et les triangles pleins des profils expérimentaux de type 2 (profil avec choc de vitesse inférieur à 1,5). Les étoiles correspondent aux simulations numériques de Chen et Meiburg [15] qui tombent toutes dans le domaine 2 en accord avec la théorie. Les triangles vides et les croix correspondent respectivement à des chocs "sans contact" suivis d'une pointe et des chocs "sans contact" et sans pointe. Les carrés vides correspondent au régime instable.

B. Application de la théorie des ondes cinématiques

Comme dans le cas de la cellule de Hele-Shaw, la fonction de flux dépend de la concentration moyennée et des paramètres de contrôle U et M : $F(\bar{c}, M, U)$. L'application de la théorie des ondes cinématiques à l'équation (4.45) permet à nouveau de définir trois domaines dans le plan (M, U) correspondant aux trois types de profils déjà présentés dans la section précédente. Par soucis de comparaison avec les profils expérimentaux, les profils de vitesse théoriques sont représentés en fonction de $\beta = \sqrt{\bar{c}}$ et non pas en fonction de $\bar{c}$.

1. Dans le domaine 1, les profils sont autosimilaires sans aucun choc (Fig.4.21a). La vitesse maximum du profil, atteinte pour $\beta = 0$, est égale à $V(0) = V_0 = 2$, ce qui correspond à la vitesse maximale dans un profil de vitesse de Poiseuille en tube.
2. Dans le domaine 2, le profil développe un choc entre $\beta_m \neq 0$ et β_M (Fig.4.21b). Le reste du profil est autosimilaire. La vitesse du choc V_{choc} est inférieure à 2.
3. Dans le domaine 3, le profil développe un choc entre $\beta_m = 0$ et β_M , de vitesse $V_{choc} \geq 2$ (Fig.4.21c). Pour $\beta > \beta_M$, le profil s'auto-étale.

Comme dans le cas de la cellule de Hele-Shaw, la valeur de la dérivée de la fonction de flux en $\bar{c} = 0$ (i.e. $\beta = 0$) est égale à la vitesse maximale d'un profil de vitesse de Poiseuille en tube: $F'(\bar{c} = 0) = V_0 = 2$ quelles que soient les valeurs de M et de U .

Les frontières $U_{12}(M)$ et $U_{23}(M)$ séparant les trois domaines sont représentées sur la figure 4.22. Ce diagramme est très similaire à celui obtenu en cellule de Hele-Shaw. Les valeurs de M_3^{min} et M_1^{max} sont différentes: $M_3^{min} = 2$ et $M_1^{max} = 3,6$. Ces modifications exceptées, les comportements identifiés dans le cadre de l'analyse précédente s'appliquent à nouveau ici.

4.5.3 Comparaison théorie/expérience

A. Profils de vitesse

Comme dans le cas de la cellule de Hele-Shaw, l'accord théorie/expérience est satisfaisant dans les domaines 1 et 2 et mauvais dans le domaine 3.

Un profil de vitesse correspondant au domaine 2 est représenté sur la figure 4.23a. Le profil présente un choc suivi d'une petite pointe correspondant à des vitesses plus rapides. Au cours du temps, la distance entre le choc et l'avant de la pointe augmente continûment (proportionnellement au temps).

Une succession d'images correspondant à un écoulement appartenant au domaine 2 est représentée sur la figure 4.24. Ces images confirment l'axisymétrie de l'interface et permettent d'observer directement la croissance de la pointe. Ces observations sont cohérentes avec celles de Petitjeans et Maxworthy. Ces derniers [59] ont également observé la croissance d'une pointe dans certaines de leurs expériences réalisées en tube, corres-

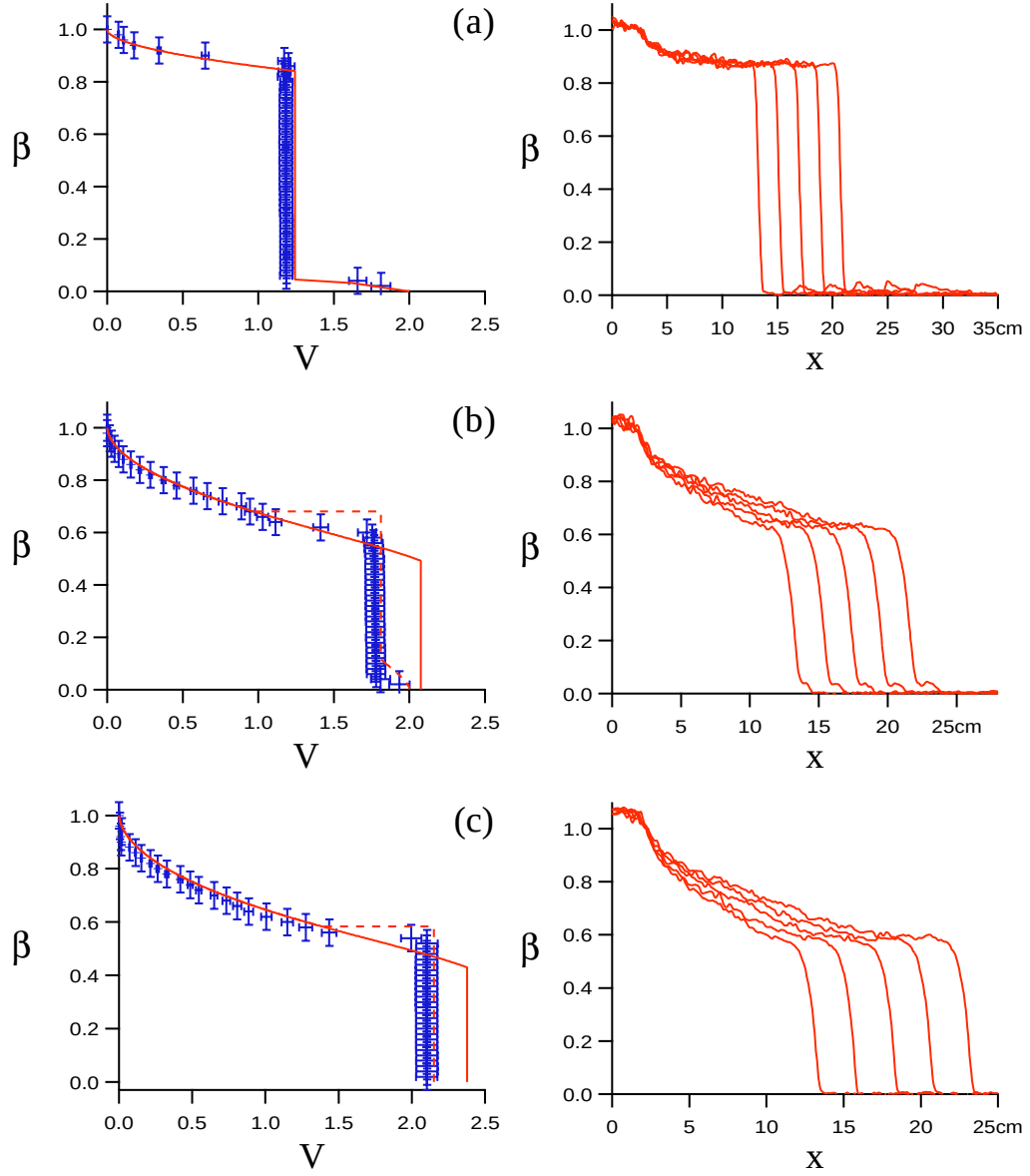


FIG. 4.23 – Gauche: comparaison entre le profil de vitesse expérimental (croix) et théorique (trait plein). Droite: Rayon relatif du doigt $\beta(x,t)$ à intervalles de temps réguliers. $M = 23,9$ et (a) domaine 2: $U = 0,15 < U_{23}$ ($U_{23} = 86$). (b) domaine 3: $U = 0,92 > U_{23}$ et (c) domaine 3: $U = 1,23 > U_{23}$.

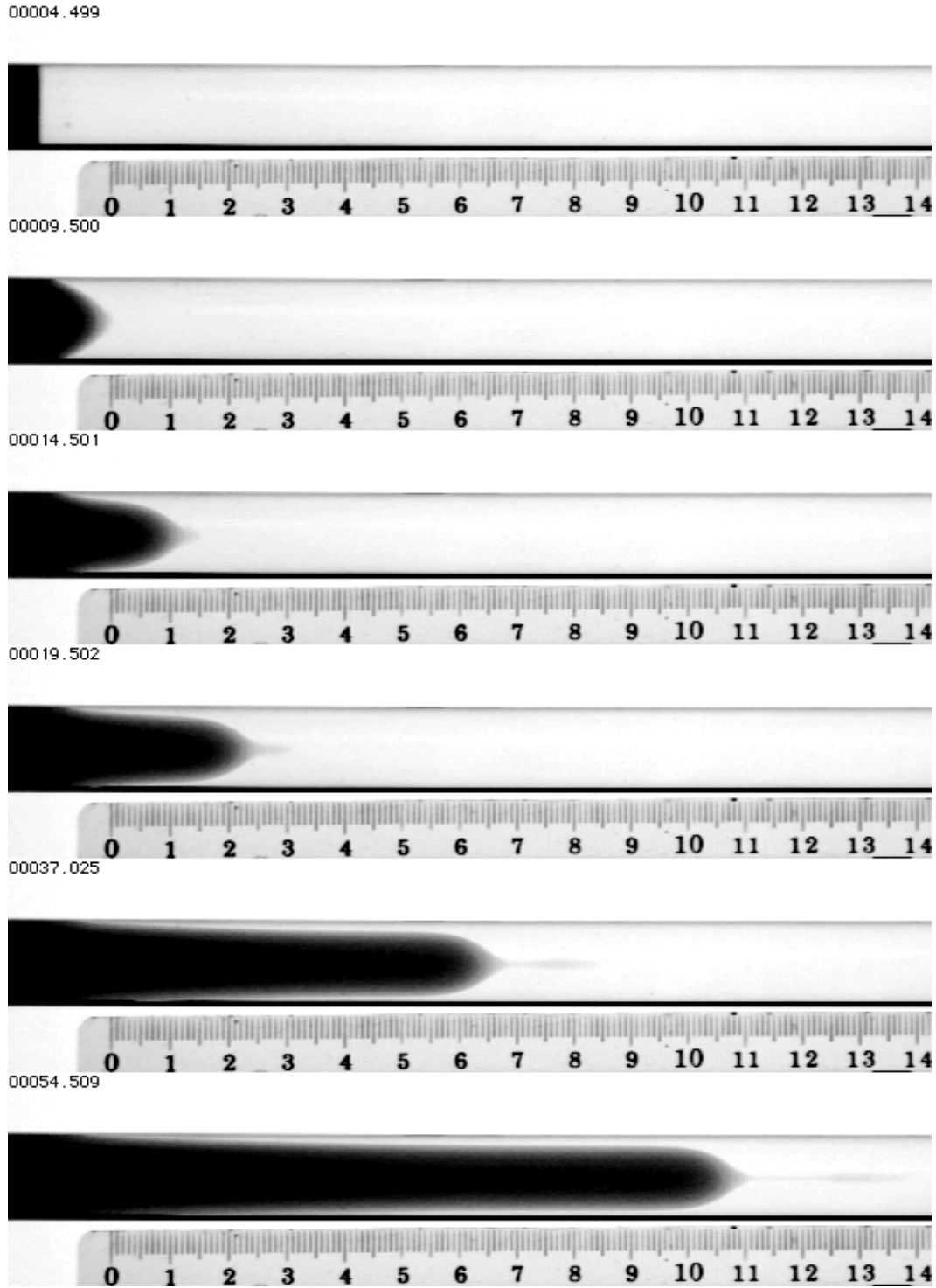


FIG. 4.24 – Images successives d'un écoulement en tube correspondant au domaine 2 ($M = 57$, $U = 0,57 < U_{23} = 0,77$). Le temps (en s) est indiqué dans le coin supérieur gauche de chaque image.

pondant à ce qu'ils nomment le régime non-stationnaire. Quoique leurs résultats obtenus pour une pression d'injection constante ne puissent pas être directement comparés à nos prédictions théoriques (valables pour une injection à débit constant), il est probable que le régime non-stationnaire tombe dans ce que nous appelons le domaine 2. Les écoulements correspondant à ce type de profil sont représentés par un triangle plein sur le diagramme de phase dans le plan M, U (Fig.4.22).

Dans le domaine 3, l'accord théorie/expérience n'est plus bon (Fig.4.23b et c). On observe alors deux types de comportements lorsque la vitesse adimensionnée augmente. Dans un premier temps, les profils expérimentaux présentent un choc de vitesse V_{choc} inférieure à $V_0 = 2$ suivi d'une pointe autosimilaire (Fig.4.23b). Contrairement aux calculs théoriques, la borne inférieure du choc β_m est en effet différente de 0. Ceci s'explique par le fait que le profil de vitesse est discontinu au niveau de la borne supérieure du choc β_M : le choc sur le profil expérimental n'est pas un choc de contact. Les écoulements correspondant à ce type de profil sont représentés par un triangle vide sur le diagramme de phase dans le plan (M, U) (Fig.4.22).

Comme en cellule de Hele-Shaw, les profils de vitesse expérimentaux développent des chocs "sans contact" dans le domaine 3 de sorte que la théorie n'est plus prédictive dans cette région. On observe alors deux types de comportements successifs au fur et à mesure que la vitesse adimensionnée augmente. Dans un premier temps, les profils expérimentaux présentent un choc de vitesse V_{choc} inférieure à $V_0 = 2$ suivi d'une pointe autosimilaire (Fig.4.23b). Les écoulements correspondant à ce type de profil sont représentés par un triangle vide sur le diagramme de phase dans le plan (M, U) (Fig.4.22). Lorsque U augmente, on finit par observer des profils avec un choc dont la limite inférieure β_m est nulle et la vitesse V_{choc} est supérieure à $V_0 = 2$ (Fig.4.23c). Les écoulements correspondant à ce type de profil sont représentés par une croix sur le diagramme de phase dans le plan M, U (Fig.4.22).

Le choc étant discontinu, il manque une équation pour calculer ses caractéristiques. On peut cependant appliquer la théorie à posteriori en calculant, par exemple, V_{choc} à partir des valeurs expérimentales de β_m et β_M . Le résultat de cette procédure est représenté en traits pointillés sur les figures (Fig.4.23b et c). Les profils de vitesse ainsi obtenus sont en bon accord avec les profils expérimentaux.

B. Evolution du choc en fonction de U

Les évolutions de la vitesse du choc et des rayons normalisés, β_m et β_M sont représentées en fonction de U sur la figure 4.25 pour le rapport de viscosité $M = 23,9$. La ligne continue correspond aux prédictions théoriques tandis que les cercles correspondent aux mesures expérimentales.

Comme en cellule de Hele-Shaw, la théorie et l'expérience sont en bon accord tant que $U < U_{23}$. Pour $U > U_{23}$, les chocs ne sont plus des chocs de contact et on observe donc une

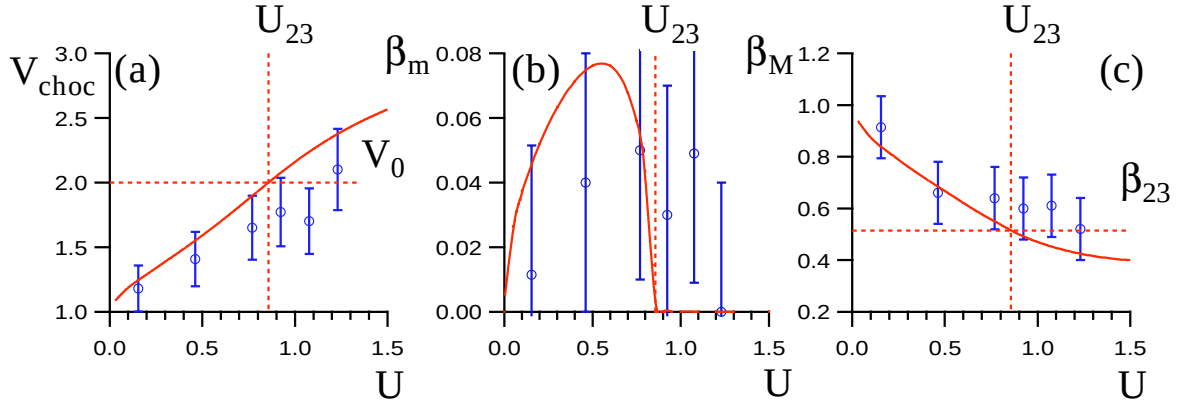


FIG. 4.25 – (a) Vitesse du choc V_{choc} , (b) β_m et (c) β_M en fonction de U pour $M = 23,9 > M_3^{min}$. La valeur théorique $U_{23} = 0,86$ est représentée par des traits pointillés.

déviations des valeurs expérimentales par rapport aux prédictions théoriques. Alors que la théorie prévoit des chocs de vitesse supérieure à $V_0 = 2$, les valeurs expérimentales restent inférieures à $V_0 = 2$. Parallèlement, les valeurs expérimentales de β_M sont supérieures à celles calculées. Lorsque la vitesse du choc devient de l'ordre de $V_0 = 2$, le profil de vitesse semble "préférer" augmenter la taille du choc plutôt que sa vitesse.

C. Diagramme de phase

Les observations expérimentales ont également été comparées au diagramme de phase théorique dans le plan M, U . Les résultats sont représentés sur la figure 4.22. Les ronds pleins correspondent à des profils de type 1 et les triangles pleins à des profils de type 2. Les triangles vides et les croix correspondent aux profils expérimentaux en désaccord avec le modèle (profil de vitesse discontinu) dont les vitesses de choc sont respectivement inférieures et supérieures à $V_0 = 2$. Les étoiles correspondent aux simulations numériques de Chen et Meiburg [15], qui tombent toutes dans le domaine 2.

Le nombre d'expériences menées en tube est très inférieure au nombre d'expériences menées en cellule de Hele-Shaw. On ne peut donc pas conclure aussi nettement que dans ce dernier cas. Cependant la figure 4.22 semble indiquer que la théorie des ondes cinématiques (dans la limite des grands nombres de Péclet et des faibles nombres de Reynolds) donne une description quantitative correcte des domaines 1 et 2.

Déstabilisation du régime 2D en tube

Comme en cellule de Hele-Shaw, le régime 2D finit par se déstabiliser lorsque U est assez grand. La figure 4.26 montre une succession d'images correspondant à un écoulement en tube instable. L'instabilité apparaît sur les cotés du doigt, loin derrière le choc situé

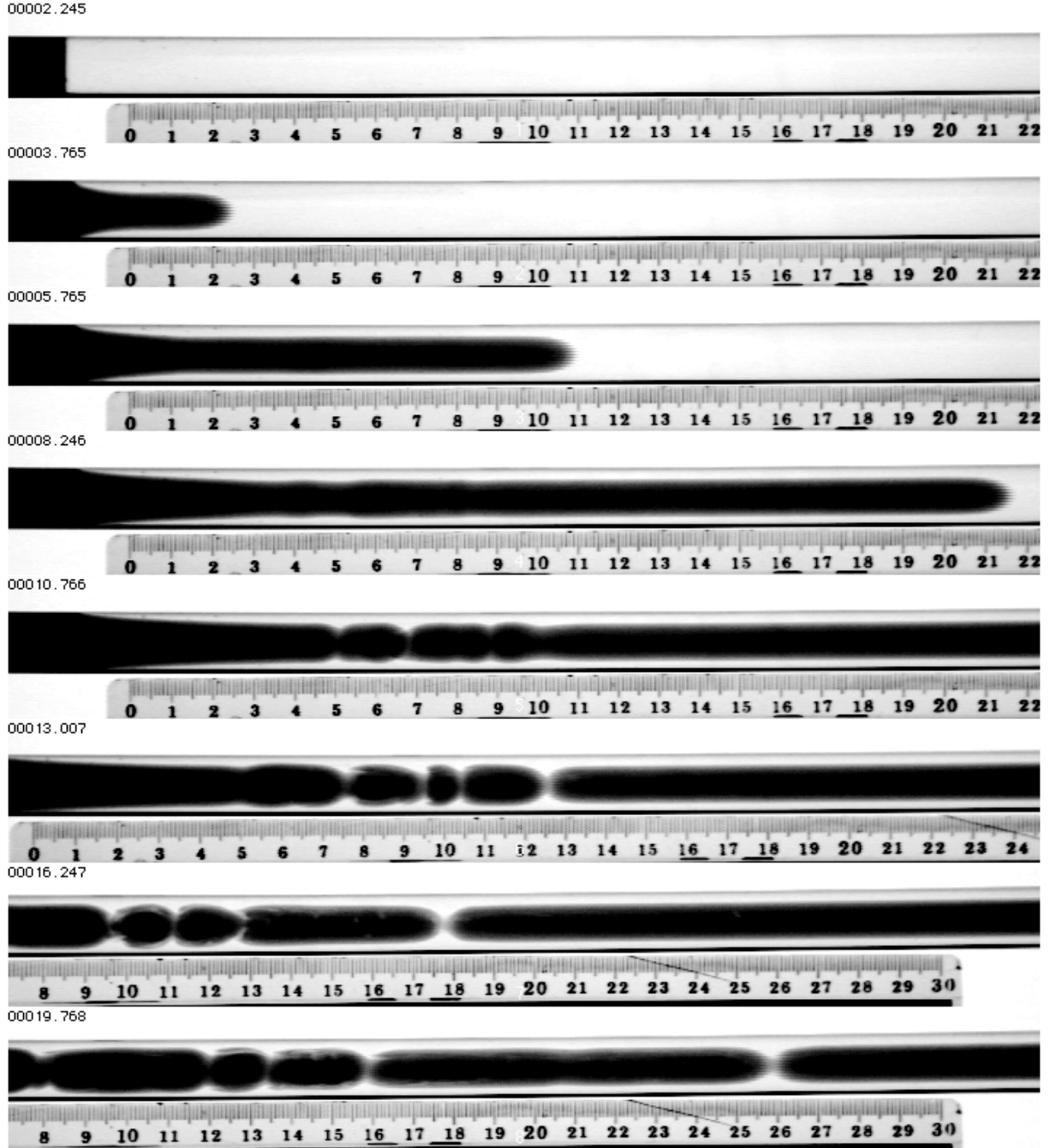


FIG. 4.26 – Succession d'images d'un écoulement instable en tube. ($M = 57$, $U = 6,7 > U_{23} = 0,77$). Le temps (en s) est indiqué dans le coin supérieur gauche de chaque image.

à l'extrémité du doigt. Dans cette zone, on observe aux temps longs la formation de "pincements" de l'interface. Peu à peu, ces pincements se creusent jusqu'à ce que de grosses gouttes de fluide injecté se forment. Bien que nous ne l'ayons pas étudié en détail, nous pensons que cette instabilité est une instabilité de cisaillement (de type Kelvin-Helmoltz). Notons qu'une instabilité du même type a déjà été étudiée expérimentalement et théoriquement par Bai, Chen et Joseph [6] mais dans le cas de fluides non miscibles.

4.6 Effets de la diffusion

Le régime haut Péclet décrit précédemment ne constitue qu'un régime transitoire. Aux temps longs, la diffusion moléculaire homogénéise la concentration dans la direction transverse à l'écoulement et modifie ainsi la forme des fronts de concentration. Comme expliqué dans le premier chapitre, l'importance de la diffusion transverse par rapport au transport convectif longitudinal est quantifiée par le nombre de diffusion transverse, défini comme le produit du nombre de Péclet par le rapport d'aspect de la cellule: $N_{dt} = Pe\epsilon = qb^2/D_m L$.

Le nombre de Péclet des écoulements effectués dans les cellules de Hele-Shaw d'épaisseur 0,96 et 1,92mm varie typiquement autour de $Pe \approx 10^4$, ce qui correspond à $N_{dt} \approx 10$. Pour cette gamme de valeur de N_{dt} , les effets de la diffusion ne sont pas observables à l'échelle de temps d'une expérience. L'utilisation d'une cellule d'épaisseur 0,48mm, nous a permis d'abaisser le nombre de Péclet jusqu'à $Pe \approx 10^2 - 10^3$, correspondant à $N_{dt} \approx 0,1 - 1$. Les écoulements réalisés dans cette cellule nous ont permis d'observer des modifications de la forme des fronts de concentration liées à la transition vers un régime diffusif. L'étude de ce régime n'étant pas achevée, nous nous contenterons d'énumérer dans cette section assez courte les observations expérimentales effectuées à ce jour.

4.6.1 Effet de la diffusion sur la forme des fronts de concentration en régime 2D

D'un écoulement à l'autre, nous avons observé le même type de comportement de la langue 2D. Aux temps courts, les fronts de concentration sont identiques à ceux observés à fort nombre de Péclet dans les cellules d'épaisseur 0,96 et 1,92mm. On observe en particulier dans le domaine 2 la formation de chocs de concentration entre $\bar{c}_m$ et $\bar{c}_M$ comparables à ceux observés en régime non diffusif. Cependant, le choc disparaît progressivement: sa hauteur $\bar{c}_M$ diminue tandis qu'il s'élargit dans la direction de l'écoulement. Ce comportement est illustré sur la figure 4.27. La disparition progressive du choc est provoquée par la diffusion. Considérons l'interface au voisinage du choc. Au cours du temps, des particules de fluide injecté diffusent vers les lignes de courant voisines au sein du fluide déplacé. Dans cette zone, la vitesse des particules fluides est inférieure à la vitesse du choc et elles

sont donc advectées vers l'arrière du choc. Aux temps longs, le front de concentration

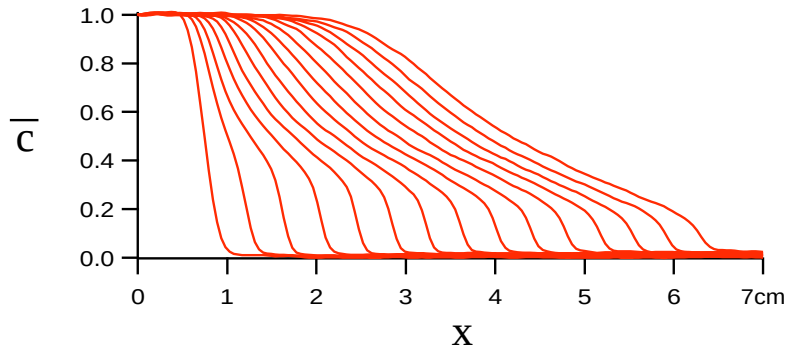


FIG. 4.27 – *Fronts de concentration à intervalles de temps réguliers $\Delta t = 10s$. $M = 55,9$, $U = 1,85$, $Pe = 2100$ et $N_{dt} = 1,3$.*

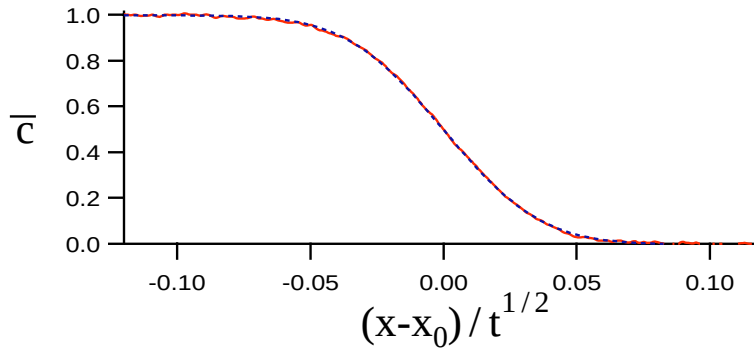


FIG. 4.28 – *Front de concentration à $t = 1220s$ en fonction de $(x - x_0)/\sqrt{t}$ où x_0 est la position de la tranche de concentration $\bar{c} = 0,5$. $M = 33,2$, $U = 5$ et $Pe = 1000$ et $N_{dt} = 0,6$. Le trait plein correspond au front de concentration expérimental. L'ajustement du front expérimental par une fonction du type (4.50) est représenté en traits pointillés.*

évolue asymptotiquement vers un front de diffusion convection de la forme (Fig.4.28):

$$\bar{c}(x,y,t,) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - x_0}{2\sqrt{D_{\parallel}t}} \right) \right] \quad (4.50)$$

où x_0 est la position de la tranche de concentration $\bar{c} = 0,5$. La figure 4.28 représente un tel front tracé en fonction de $(x - x_0)/\sqrt{t}$. L'ajustement de ce front par la fonction (4.50) en utilisant la méthode des moindres carrés permet de mesurer le coefficient $D_{\parallel}$. En supposant que ce coefficient est donné par la formule de Taylor (1.23), on peut en déduire la valeur du coefficient de diffusion moléculaire:

$$D_m = \frac{b^2 q^2}{205 D_{\parallel}} \quad (4.51)$$

En appliquant cette procédure au front de concentration représenté sur la figure 4.28, on trouve un coefficient de diffusion moléculaire: $D_m = 7,10^{-7} cm^2 s^{-1}$ alors que celui mesuré par la méthode de déviation d'un faisceau laser vaut $D_m = 5,10^{-7} cm^2 s^{-1}$. Ces deux valeurs sont très proches. Ce résultat est assez surprenant. L'expression (1.23) du coefficient de dispersion $D_{||}$, établie par Taylor [71], suppose en effet que le profil de vitesse soit parabolique. Or la présence de chocs sur les fronts de concentration au début de l'écoulement indique clairement que ce n'est pas le cas, au moins transitoirement.

Notons que la disparition progressive du choc et l'évolution vers un front de diffusion-convection ont été observées numériquement par Chen et Meiburg [15], Yang et Yortsos [87] et Rakotomalala, Salin et Watzky [63].

4.6.2 Effet de la diffusion sur le régime 3D

Les valeurs $U_T(M)$ de transition vers le régime 3D mesurées dans la cellule d'épaisseur $b = 0,48mm$ sont systématiquement supérieures aux seuils mesurés dans des cellules plus épaisses ($b = 0,96mm$ et $b = 1,92mm$) (Fig.4.29). Le mélange diffusif, qui atténue le contraste de viscosité, est probablement responsable de l'augmentation du seuil de stabilité. Pour déstabiliser l'interface, il est en effet nécessaire de compenser la baisse du contraste de viscosité en augmentant la vitesse d'injection et donc U_T . Nous n'avons pas, en revanche, observé de modification de la sélection en longueur d'onde au seuil qui reste égale à $\lambda \approx 5b$.

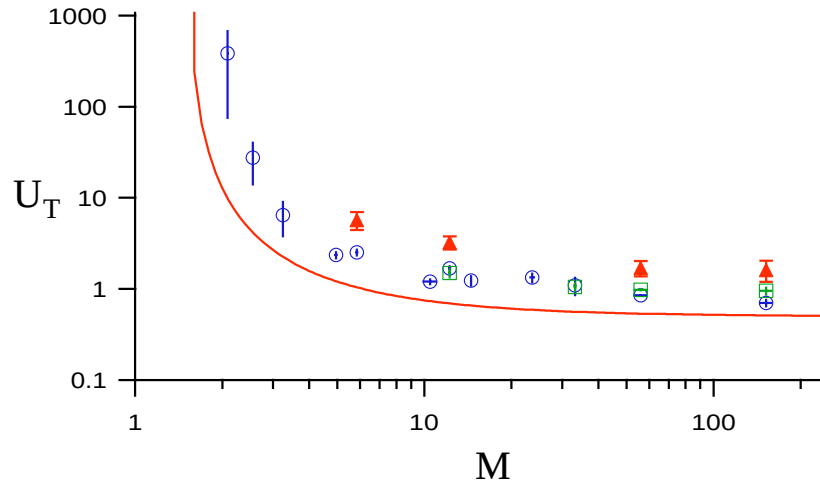


FIG. 4.29 – Vitesse adimensionnée U_T de transition vers le régime 3D mesurée en fonction du rapport de viscosité M . Triangles, cercles et carrés correspondent respectivement aux expériences en cellule d'épaisseur $0,48mm$, $0,96mm$ et $1,92mm$. La courbe en trait plein correspond à $U_{23}(M)$.

Pour tester les prévisions de l'analyse de stabilité linéaire de Tan et Homsy [76], il serait

nécessaire d'abaisser encore le nombre de Péclet de nos expériences. Une solution possible consisterait à travailler avec deux fluides de même densité et de viscosités différentes. Dans ce cas, la vitesse critique, q_c , est nulle. L'écoulement se déstabilise donc même à très faible vitesse, ce qui permet de travailler à très faible nombre de Péclet.

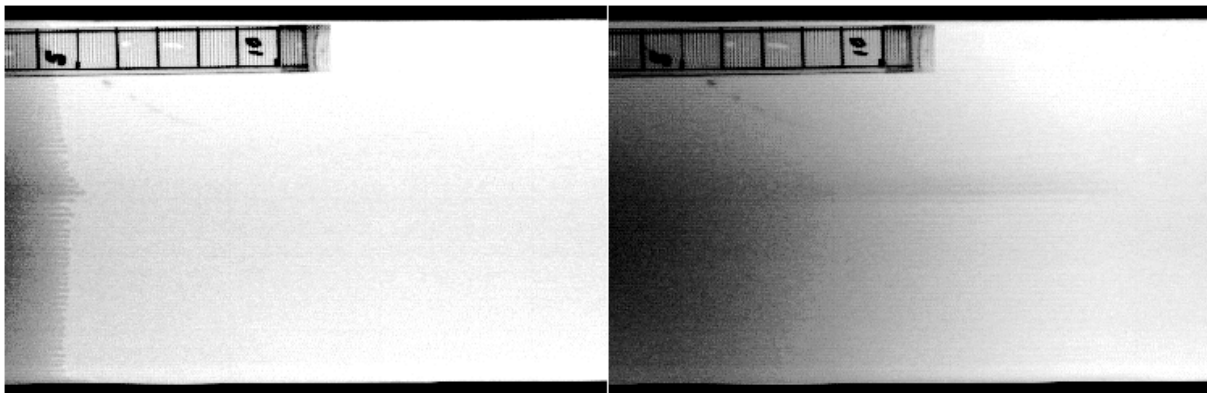


FIG. 4.30 – *Evolution d'un front instable. (a) $t=0$ formation de doigts (b) $t=$ les doigts disparaissent sous l'effet de la diffusion qui restabilise le front.*

L'évolution à long terme du motif d'instabilité est fortement affectée par la diffusion. Une fois formés, les doigts du motif d'instabilité disparaissent progressivement sous l'effet de la diffusion qui mélange les fluides (Fig.4.30). Dans certains cas, l'écoulement peut même être complètement restabilisé par la diffusion.

4.7 conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un modèle permettant de décrire le régime 2D aux grands nombres de Péclet en cellule de Hele-Shaw et en tube. Ce modèle, basé sur la théorie des ondes cinématiques, prévoit l'existence de trois domaines correspondant à trois types de profils de vitesse différents en fonction des valeurs de M et U . Pour les domaines 1 (correspondant à des fronts de concentration autosimilaires) et 2 (les profils développent des chocs dont la vitesse est inférieure à la vitesse maximale d'un profil parabolique), la théorie décrit parfaitement les observations expérimentales. Dans le domaine 3, les profils expérimentaux développent des chocs "sans contact". Il manque alors une équation pour calculer les caractéristiques du choc: le modèle n'est plus prédictif.

L'analyse théorique ne permet pas d'expliquer la transition vers le régime 3D observé en cellule de Hele-Shaw. Elle suggère néanmoins que cette transition est liée à l'existence d'un choc de vitesse supérieure à la vitesse maximale dans un profil parabolique ($V_0 = 1,5$). Les observations expérimentales confrontées à des simulations numériques suggèrent cependant que la déstabilisation pourrait être provoquée par l'augmentation de la recirculation au voisinage du choc lorsque U augmente. Nous n'avons toutefois aucun

moyen de vérifier cette hypothèse. La compréhension complète de la déstabilisation nécessite donc probablement une analyse de la stabilité du champ de vitesse à trois dimensions.

Notons que le modèle que nous avons développé ne peut s'appliquer qu'à des fluides miscibles. Les très faibles rayons de courbure prévus par le modèle au niveau de la pointe ne sont pas compatibles avec l'existence d'une tension de surface, même en considérant le cas où celle-ci serait très faible devant les forces visqueuses (limite des très grands nombres capillaires). Pour la même raison, nos résultats expérimentaux et théoriques ne nous semblent pas compatibles avec la possibilité de l'existence d'une tension de surface effective entre deux fluides miscibles, telle qu'elle est proposée dans plusieurs travaux [22, 33, 36, 58].

Conclusion

Dans la première partie de ce mémoire, consacrée à l'étude de la déstabilisation des doigts de Saffman-Taylor, nous avons montré que la trajectoire de l'axe d'un fjord, c'est à dire la ligne séparant les deux branches issues de la déstabilisation du doigt, est semblable à la trajectoire d'une particule advectée sur l'interface d'un doigt qui resterait stable. La longueur des fjords et, par conséquent, celle des branches secondaires sont sélectionnées par la position de départ du fjord sur le doigt stable. Plus elle est proche de l'extrémité du doigt et plus la branche secondaire est longue. Ce mécanisme est donc capable de générer des branches sur une très grande échelle de tailles différentes, variant entre l'infini et une longueur de coupure qui dépend de l'angle de la cellule.

Nous avons également observé que la forme et l'évolution des motifs d'instabilité complexes peuvent être interprétées en assimilant les axes des fjords à des murs virtuels. La croissance s'effectue alors comme si l'interface était confinée au sein de cellules virtuelles, dont les parois sont constituées par les fjords. Notons cependant que, bien que la notion de mur virtuel permette de rendre compte d'un grand nombre d'observations expérimentales, elle n'est pas justifiée théoriquement.

La taille et la forme d'un fjord sont entièrement déterminées une fois connu son point de départ sur le doigt. Notre modèle ne donne par contre aucune indication sur la position de ce point de départ. Nous avons néanmoins calculé la fonction de distribution de la taille des branches secondaires en supposant que l'instabilité du doigt de Saffman-Taylor soit déclenchée par un défaut des plaques de verre, dont la position est distribuée suivant une loi de probabilité uniforme. L'évolution des distributions théoriques ainsi obtenues correspond qualitativement aux observations expérimentales. Elle rend compte, en particulier, de l'augmentation de la taille des branches secondaires avec l'angle du secteur ainsi que de l'existence d'une longueur de coupure, l_{min} telle que la probabilité d'observer une branche de taille inférieure à l_{min} est très faible. Pour tester ce modèle de manière plus quantitative, il serait nécessaire de disposer d'un plus grand nombre de mesures de tailles de branches secondaires afin de comparer les histogrammes expérimentaux aux distributions

calculées. Ces mesures sont actuellement en cours de réalisation.

Nous avons enfin montré que la largeur du doigt au seuil de stabilité normalisée par la longueur capillaire diminue lorsque l'angle de la cellule augmente. Les points de départs possibles des fjords sont alors de plus en plus confinés au voisinage de l'extrémité du doigt, de sorte que la taille des branches secondaires augmente. Le système transite donc progressivement d'une situation où les branches de très grandes tailles sont très peu probables à une situation où elles sont très probables. Cet effet permet d'expliquer la transition progressive d'une situation où les divisions sont toutes imparfaites ($\theta_0 < 70^\circ$) à une situation où elles sont toutes parfaites ($\theta_0 > 90^\circ$) lorsque l'angle de la cellule augmente.

Cette analyse relativement simple propose néanmoins une vision cohérente de l'instabilité des doigts de Saffman-Taylor en reliant les caractéristiques morphologiques (tailles des branches secondaires, division imparfaite ou parfaite) aux paramètres de contrôle ω (largeur du doigt normalisée par la longueur capillaire) et θ_0 (angle de la cellule de Hele-Shaw). Nous pensons que l'ensemble de ces résultats pourrait constituer la base d'une étude théorique plus complète, qui prendrait en compte un certain nombre d'éléments que nous avons négligés tels que la déformation progressive des isobares au fur et à mesure que la branche secondaire se développe. Il serait également important d'approfondir la notion de mur virtuel d'un point de vue théorique.

Dans la seconde partie de ce mémoire, nous avons étudié le déplacement de deux fluides miscibles en cellule de Hele-Shaw verticale dans la limite des grands nombres de Péclet (régime non diffusif). La vitesse d'écoulement est alors suffisamment importante pour que les deux fluides, bien que miscibles, n'aient pas le temps de se mélanger. Il est donc possible de définir une interface, de sorte que cette situation est formellement semblable à l'écoulement de deux fluides non miscibles avec une tension de surface rigoureusement nulle. En nous restreignant au cas d'un écoulement stabilisé par la gravité ($U > 0$), nous avons observé l'existence de deux comportements différents de cette interface en fonction des paramètres de contrôle M (rapport de viscosité) et U (rapport des forces visqueuses aux forces de gravité).

Le premier type de comportement, appelé régime 2D, correspond à la formation d'une langue de fluide injecté dans l'épaisseur entre les plaques de la cellule. L'étude expérimentale de cette langue s'est faite grâce à des mesures de la concentration de fluide injecté moyennée dans l'épaisseur de la cellule, $\bar{c}$. Puisque les deux fluides ne se mélangent pas, $\bar{c}$ est simplement égale à l'épaisseur de la langue normalisée par l'épaisseur de la cellule.

Nous avons développé un modèle, basé sur la théorie des ondes cinématiques, qui permet de décrire le régime 2D. Ce modèle prévoit l'existence de trois domaines correspondant à trois types différents de profils de vitesse de propagation des concentrations en fonction des valeurs de M et U . Pour les domaines 1 (correspondant à des fronts de

concentration autosimilaires) et 2 (les profils développent des chocs dont la vitesse est inférieure à la vitesse maximale d'un profil parabolique), la théorie décrit parfaitement les observations expérimentales. Dans le domaine 3, les profils expérimentaux développent des chocs "sans contact", dont les caractéristiques ne sont pas prédites par le modèle.

Le modèle théorique développé pour la cellule de Hele-Shaw peut être facilement adapté pour décrire le déplacement de deux fluides miscibles dans un tube vertical. Cette géométrie autorise de plus l'observation directe de la forme de l'interface. Nous avons donc réalisé une série d'expériences en tube à grands nombres de Péclet. Comme dans le cas de la cellule de Hele-Shaw, la théorie décrit parfaitement les observations expérimentales dans les domaines 1 et 2.

Lorsque $M > M_T$ avec $M_T \approx 2$, il existe, en cellule de Hele-Shaw, une valeur critique U_T pour U , au-dessus de laquelle la langue 2D se déstabilise. On observe alors la formation d'un motif d'instabilité tridimensionnel, correspondant à ce que nous appelons le régime 3D. Notre analyse théorique du régime 2D ne permet pas d'expliquer la transition vers ce régime 3D. Les observations expérimentales confrontées à des simulations numériques suggèrent néanmoins que la formation de chocs sans contact et la déstabilisation vers le régime 3D pourraient être provoquées par l'augmentation de la recirculation au voisinage du choc lorsque U augmente. Ces effets de recirculation ne sont pas pris en compte dans le modèle basé sur l'hypothèse d'écoulement parallèle.

Nous pensons vérifier cette hypothèse grâce à des simulations numériques de l'écoulement de fluides miscibles entre deux plaques effectuées par N. Rakotomalala. Ces simulations, basées sur la méthode de gaz sur réseau et dans lesquelles les effets de la gravité ont été récemment pris en compte, donnent accès au champ de vitesse complet. Nous sommes donc en train d'étudier la modification du champ de vitesse au voisinage du choc lorsque U augmente.

Notons enfin que nous n'avons étudié que le cas où la différence de densité entre les fluides stabilise l'écoulement, ce qui correspond à $U > 0$. Le dispositif expérimental a été récemment modifié de manière à étudier l'effet d'une différence de densité déstabilisante et explorer la région $U < 0$ du diagramme de phase. Cette étude est actuellement en cours.

Bibliographie

- [1] R. Aris. Dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 235:66–67, 1956.
- [2] A. Arneodo, F. Argoul, Y. Couder, and M. Rabaud. *Diffusion controlled growth phenomena: from smooth interfaces to fractal structures*. in Growth and Form, pages 297-315. Eds M. Ben Amar (Plenum press, New York), 1991.
- [3] A. Arneodo, Y. Couder, G. Grasseau, V. Hakim, and M. Rabaud. Uncovering the analytical Saffman-Taylor finger in unstable viscous fingering and diffusion limited aggregation. *Phys. Rev. Lett.*, 63:984–87, 1989.
- [4] A. Arneodo, Y. Couder, G. Grasseau, V. Hakim, and M. Rabaud. *Pattern growth: from smooth interfaces to fractal structures*. in Nonlinear evolution of spatio-temporal structures in dissipative continuous systems, pages 481-86. Eds F.H. Busse and L. Kramer (Plenum press, New York), 1990.
- [5] A. Arneodo, J. Elezgaray, and F. Tallet. Statistical analysis of off-lattice diffusion limited aggregates in channel and sector geometries. *Phys. Rev. E*, 53:6200–23, 1996.
- [6] R. Bai, K. Chen, and D. Joseph. Lubricated pipelining: stability of core-annular flow. part 5. experiments and comparison with theory. *J. Fluid Mech.*, 240:97–132, 1992.
- [7] J. Bataille. Stabilité d'un déplacement radial non miscible. *Revue Inst. Pétrole*, 23:1349–64, 1968.
- [8] M. Ben Amar. Exact self similar shapes in viscous fingering. *Phys. Rev. A*, 43:5724–27, 1991.
- [9] M. Ben Amar. Viscous fingering in a wedge. *Phys. Rev. A*, 44:3673–85, 1991.
- [10] M. Ben Amar, V. Hakim, M. Marshaal, and Y. Couder. Self dilatating viscous fingers in wedge-shaped Hele-Shaw cells. *Phys. Fluids A*, 3:1687–90, 1991.
- [11] E. Ben-Jacob, G. Deutsch, P. Garik, N.G. Goldenfeld, and Y. Lareah. formation of dense branching morphology in interfacial growth. *Phys. Rev. Lett.*, 57:1903–06, 1986.
- [12] D. Bensimon. On the stability of viscous fingering. *Phys. Rev. A*, 33:1302–08, 1986.

- [13] D. Bensimon, L.P. Kadanoff, S. Liang, B. Shraiman, and C. Tang. Viscous flows in two dimensions. *Rev. of Mod. Phys.*, 58:977–99, 1986.
- [14] F.P. Bretherton. The motion of long bubbles in tubes. *J. Fluid Mech.*, 10:166–88, 1961.
- [15] C.Y. Chen and E. Meiburg. Miscible displacements in capillary tubes. Part.2 numerical simulations. *J. Fluid Mech.*, 326:57–90, 1996.
- [16] R.L. Chuoke, P. Van Meurs, and C. Van Der Poel. The instability of slow, immiscible, viscous liquid-liquid displacements in permeable media. *Trans. AIME*, 216:188–94, 1959.
- [17] R. Combescot and M. Ben Amar. Selection of Saffman-Taylor fingers in the sector geometry. *Phys. Rev. Lett.*, 67:453–56, 1991.
- [18] R. Combescot, T. Dombre, V. Hakim, and Y. Pomeau. Shape selection of the Saffman-Taylor fingers. *Phys. Rev. Lett.*, 56:2036–39, 1986.
- [19] R. Combescot, T. Dombre, V. Hakim, and Y. Pomeau. Analytic theory of the Saffman-Taylor fingers. *Phys. Rev. A*, 37:1270–83, 1988.
- [20] Y. Couder. *Viscous fingering in a circular geometry*. 1988.
- [21] Y. Couder. *Chaos, Order and Patterns*, pages 203–227. Eds R. Artuso, P. Cvitanovic and G. Casati (Plenum Press in cooperation with NATO Scientific Affairs Division, New York, 1991.
- [22] H.T. Davis. *A theory of tension at miscible displacement front*. ed. Wheeler M., IMA Volumes in Mathematics and its applications, 11, Springer Verlag, Berlin, 1988.
- [23] A.J. DeGregoria and L.W. Schwartz. A boundary-integral method for two-phase displacement in Hele-Shaw cells. *J. Fluid Mech.*, 164:383–400, 1986.
- [24] M.W. DiFrancesco and J.V. Maher. Hele-shaw scaling properties of low contrast Saffman-Taylor flows. *Phys. Rev. A*, 40:295–304, 1989.
- [25] V. Fleury. *Arbres de Pierre, la croissance fractale de la matière*. Flammarion, 1998.
- [26] E. Guyon, J.P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. InterEditions/Editions du CNRS, 1991.
- [27] S. Hill. Channelling in packed columns. *Chem. Eng. Sci.*, 1:247–53, 1952.
- [28] G.M. Homsy. Viscous fingering in porous media. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 19:271–311, 1987.
- [29] G.M. Homsy. *The effect of dispersion on fingering in miscible displacements*. in Disorder and Mixing, pages 237–50. Eds E. Guyon, J.P. Nadal and Y. Pomeau (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht), 1988.
- [30] D.C. Hong and J.S. Langer. Analytic theory of the selection mechanism in the Saffman-Taylor problem. *Phys. Rev. Lett.*, 56:2032–35, 1986.

- [31] J.P. Hulin and D. Salin. *Experimental study of tracer dispersion in model and natural porous media.* in Disorder and Mixing, pages 89-105. Eds E. Guyon, J.P. Nadal and Y. Pomeau (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht), 1988.
- [32] A. Jeffrey. *Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves.* Pitman, London, 1976.
- [33] D.D. Joseph. Fluid dynamics of two miscible liquids with diffusion and gradient stresses. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 9:565–96, 1990.
- [34] D.A. Kessler, Z. Olami, J. Oz, I. Procaccia, E. Somfai, and L.M. Sander. Diffusion-limited aggregation and viscous fingering in a wedge: evidence for a critical angle. *Phys. Rev. E*, 57:6913–16, 1998.
- [35] A.R. Kopf Sill and G.M. Homsy. Nonlinear unstable viscous fingers in Hele-Shaw flows, I experiments. *Phys. Fluids*, 31:242–49, 1988.
- [36] D.J. Korteweg. Sur la forme que prennent les équations du mouvements des fluides si l'on tient compte des forces capillaires causées par des variations de densité. *Arch. Neerl. Sci. Ex. Nat.*, 6:1–27, 1901.
- [37] E. Lajeunesse and Y. Couder. On the tip instability of viscous fingers. *manuscrit en cours de soumission à J. Fluid Mech.*
- [38] E. Lajeunesse, J. Martin, N. Rakotomalala, and D. Salin. 3d instability of miscible displacements in a Hele-Shaw cell. *Phys. Rev. Lett.*, 79:5254–57, 1997.
- [39] E. Lajeunesse, J. Martin, N. Rakotomalala, D. Salin, and Y. Yortsos. Miscible displacements in a Hele-Shaw cell at high rates. *à paraître dans J. Fluid Mech.*
- [40] D. Loggia, N. Rakotomalala, and D. Salin. The effect of mobility gradients on viscous instabilities in miscible flows in porous media. *Phys. Fluids*, 11:740–42, 1999.
- [41] O. Manickam and G.M. Homsy. Fingering instabilities in vertical miscible displacement flows in porous media. *J. Fluid Mech.*, 288:75–102, 1995.
- [42] J. Martin. *Exploration acoustique d'une suspension non-colloïdale perturbée. Mesure des grandeurs physiques du système, Thèse de doctorat de l'Université Paris 6.* 1995.
- [43] S.E. May and J.V. Maher. Fractal dimension of radial fingering patterns. *Phys. Rev. A*, 40:1723–26, 1989.
- [44] J.W. McLean and P.G. Saffman. The effect of surface tension on the shape of fingers in a hele shaw cell. *J. Fluid Mech.*, 102:455–69, 1980.
- [45] K.V. McCloud and J.V. Maher. Experimental perturbations to Saffman-Taylor flow. *Phys. Rep.*, 260:139–85, 1995.
- [46] M. Mineev-Weinstein. Selection of the Saffman-Taylor finger in the absence of surface tension: an exact result. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2113–16, 1998.
- [47] M. Muthukumar. Mean field theory for diffusion limited cluster formation. *Phys. Rev. Lett.*, 50:839–42, 1993.

- [48] C.W. Park, S. Gorell, and G.M. Homsy. Two-phase displacement in hele shaw cells: experiments on viscously driven instabilities. *J. Fluid Mech.*, 141:257–287, 1984. corrigendum:144:468-469.
- [49] C.W. Park and G.M. Homsy. Two-phase displacement in hele shaw cells: theory. *J. Fluid Mech.*, 139:291–308, 1984.
- [50] C.W. Park and G.M. Homsy. The instability of long fingers in Hele-Shaw flows. *Phys. Fluids*, 28:1583–85, 1985.
- [51] A. Paterson. *Mouillage de Surfaces Hétérogènes: cellule de Hele-Shaw imparfaite, Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6*. 1995.
- [52] A. Paterson, M. Fermigier, P. Jenffer, and L. Limat. Wetting on heterogeneous surfaces: Experiments in an imperfect Hele-Shaw cell. *Phys.Rev.E.*, 51:1291–98, 1995.
- [53] L. Paterson. Radial fingering in a Hele-Shaw cell. *J. Fluid Mech.*, 113:513–29, 1981.
- [54] L. Paterson. Diffusion limited aggregation and two fluids displacement in porous media. *Phys. Rev. Lett.*, 52:1621–23, 1984.
- [55] L. Paterson. Fingering with miscible fluids in a Hele-Shaw cell. *Phys. Fluids*, 28:26–30, 1985.
- [56] P. Pelcé. *Dynamic of curved fronts*. Academic Press, 1988.
- [57] T.K. Perkins, O.C. Johnston, and R.N. Hoffman. Mechanics of viscous fingering in miscible systems. *Soc. Pet. Eng.*, 5:310–17, 1965.
- [58] P. Petitjeans. Une tension de surface pour les fluides miscibles. *C. R. Acad. Sci.*, 322:673–79, 1996.
- [59] P. Petitjeans and T. Maxworthy. Miscible displacements in capillary tubes. Part.1 experiments. *J. Fluid Mech.*, 326:37–56, 1996.
- [60] E. Pitts. Penetration of fluid into a Hele-Shaw cell: the Saffman-Taylor experiment. *J. Fluid Mech.*, 97:53–64, 1979.
- [61] I. Procaccia and R. Zeitak. Shape of fractal growth patterns: Exactly solvable models and stability considerations. *Phys. Rev. Lett.*, 60:2511–14, 1988.
- [62] M. Rabaud, Y. Couder, and N. Gerard. Dynamic and stability of anomalous Saffman-Taylor fingers. *Phys. Rev. A*, 37:935–47, 1988.
- [63] N. Rakotomalala, D. Salin, and P. Watzky. Miscible displacement between two parallel plates: BGK lattice gas simulations. *J. Fluid Mech.*, 338:277–97, 1997.
- [64] S.N. Rauseo, P.D. Barnes Jr, and J.V. Maher. Development of radial fingering patterns. *Phys. Rev. A*, 35:1245–51, 1987.
- [65] D.A. Reinelt. Interface condition for two-phase displacement in Hele-Shaw cells. *J. Fluid Mech.*, 183:219–234, 1987.

- [66] D.A. Reinelt and P.G. Saffman. The penetration of a finger into a viscous fluid in a channel and tube. *SIAM J. Sci. Comput.*, 6:542–651, 1985.
- [67] P.G. Saffman and G.I. Taylor. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proc. R. Soc. Lond.*, 245:312–329, 1958.
- [68] A. Sarkissian and H. Levine. Comment on "selection of the Saffman-Taylor finger in the absence of surface tension: an exact result". *Phys. Rev. Lett.*, 81:4528–29, 1998.
- [69] L. Schwartz. Stability of Hele-Shaw flows: the wetting layer effect. *Phys. Fluids.*, 29:3086–88, 1986.
- [70] B.I. Shraiman. Velocity selection and the Saffman-Taylor problem. *Phys. Rev. Lett.*, 56:2028–31, 1986.
- [71] G.I. Sir Taylor. Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 219:186–203, 1953.
- [72] R.L. Slobod and R.A. Thomas. Effects of transverse diffusion on fingering in miscible-phase displacement. *Soc. Pet. Eng.*, 3:9–13, 1963.
- [73] D. Snyder and S. Tait. A flow-front instability in viscous gravity currents. *J. Fluid Mech.*, 369:1–21, 1998.
- [74] A. Sommerfeld. *Optics, Lectures on Theoretical Physics IV*. Academic Press, New York, 1954.
- [75] P. Tabeling, G. Zocchi, and A. Libchaber. An experimental study of the Saffman-Taylor instability. *J. Fluid Mech.*, 177:67–82, 1987.
- [76] C.T. Tan and G.M. Homsy. Stability of miscible displacements in porous media: Rectilinear flow. *Phys. Fluids*, 29:3549–56, 1986.
- [77] C.T. Tan and G.M. Homsy. Stability of miscible displacements in porous media: Radial source flow. *Phys. Fluids*, 30:1239–45, 1987.
- [78] C.T. Tan and G.M. Homsy. Simulations of nonlinear viscous fingering in miscible displacement. *Phys. Fluids*, 31:1330–38, 1988.
- [79] H. Thomé, M. Rabaud, V. Hakim, and Y. Couder. The Saffman-Taylor instability: from the linear to the circular geometry. *Phys. Fluids A*, 1:224–40, 1988.
- [80] M. Tokuyama and K. Kawasaki. Fractal dimension for diffusion limited aggregates. *Phys. Lett.*, 100 A:337–40, 1984.
- [81] J.M. Vanden-Broeck. Fingers in a Hele-Shaw cell with surface tension. *Phys. Fluids*, 26:2033–34, 1983.
- [82] P. Watzky. *Instabilités visqueuses et gravitationnelles entre fluides miscibles: approche par le modèle B.G.K. de gaz sur réseau, Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI*. 1997.

- [83] I. White, P.M. Colombero, and J.R. Philip. Experimental study of wetting front instability induced by a gradual change of pressure gradient and by heterogeneous porous media. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 41:483–489, 1976.
- [84] G.B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. Pure and applied mathematics, Wiley-Interscience Publication, 1974.
- [85] T. Witten and L.M. Sander. Diffusion limited aggregation, a kinetic critical phenomenon. *Phys. Rev. Lett.*, 47:1400–03, 1981.
- [86] T. Witten and L.M. Sander. Diffusion limited aggregation. *Phys. Rev. B*, 27:5686–97, 1983.
- [87] Z. Yang and Y.C. Yortsos. Asymptotic solutions of miscible displacements in geometries of large aspect ratio. *Phys. Fluids*, 9:286–98, 1997.
- [88] Y.C. Yortsos. Stability of the displacement processes in porous media in radial flow geometries. *Phys. Fluids*, 30:2928–35, 1987.
- [89] Ya.B. Zel’dovich, A.G. Istratov, and V.B. Librovich. Flame propagation in tubes: Hydrodynamics and stability. *Comb. Science and Tech.*, 24:1–13, 1980.
- [90] W.B. Zimmerman and G.M. Homsy. Nonlinear viscous fingering in miscible displacement with anisotropic dispersion. *Phys. Fluids*, A 3:1859–72, 1991.