

Application de l'extension bivariate de la statistique Fisher aux données d'anisotropie de susceptibilité magnétique : intégration des incertitudes de mesure sur l'orientation des directions principales

C.R. Acad. Sci. Paris,
t. 320, série II a,
p. 1037 à 1042
1995

Bernard Henry et Maxime Le Goff

GDR « Magnétisme des Roches »
du CNRS,
4, avenue de Neptune,
94107 Saint-Maur Cedex, France ;

B. H. : Laboratoire
de Paléomagnétisme et
Géodynamique,
Institut de Physique
du Globe de Paris,
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05,
France ;

M.L. G. : Département de Géologie,
École Normale Supérieure,
24, rue Lhomond,
75231 Paris Cedex 05, France.

Résumé L'application de l'extension bivariate de la statistique de Fisher permet d'associer un tenseur d'inertie à chaque direction principale de susceptibilité d'un échantillon de roche, en incluant l'incertitude liée à la mesure. Il devient alors possible, après sommation tensorielle (éventuellement pondérée) d'estimer, de façon véritablement significative, l'ovale de confiance autour de chacun des axes principaux de susceptibilité de l'ensemble des échantillons d'un même site.

Mots-clés : Statistique sphérique, Anisotropie de susceptibilité magnétique, Directions orientées.

Abstract **Application of the bivariate extension of Fisher's statistics to the magnetic susceptibility anisotropy data: integration of the measurement uncertainties on the orientation of the principal directions**

Application of the bivariate extension of Fisher's statistics allows the determination of the inertia tensor, for each principal susceptibility direction of each rock sample, including the uncertainty related to measurement. The diagonalization of the tensorial means then yield to obtain significant uncertainty for the orientation of each principal axis of susceptibility for all the samples within the same site.

Keywords: Spherical statistics, Magnetic susceptibility anisotropy, Oriented directions.

Abridged English Version

THE classical statistical analyses for the magnetic anisotropy data are based on the mean tensor (Hext, 1963; Jelinek, 1978), possibly connected with the bootstrap method (Constable and Tauxe, 1990), or on axial (Watson, 1960; Scheidegger, 1965) or vectorial (Fisher, 1953) statistics (Ellwood and Whitney, 1980; Parks *et al.*, 1988). However, none of them integrates the measurement uncertainties (Jelinek, 1973, 1977) on the orientation of the principal directions themselves. The bivariate extension of Fisher's statistics (Le Goff, 1990; Le Goff *et al.*, 1992;

Henry and Le Goff, 1995) yields to take this uncertainty into account.

This method is fully parametric and is based on the establishment, independently for each of the principal susceptibility axis, of simple algebraic relations between the inertia tensor (three principal directions D , I with the indices max, int or min, and their corresponding principal values A , B and C with $A > B \gg C$ and $A + B + C = 2N$ where N is the number of unit vectors) and the parameters of the bivariate statistics (Direction D , I , and its confidence ellipse defined by the minimum and maximum precision parameters k_x and k_y and the

Note

présentée par
Jean-Louis le Mouél.

remise le 22 mars 1995,
acceptée après révision
le 5 avril 1995.

angle Ω between the long axis of the ellipse and the meridian).

From the inertia tensor, these parameters are given by

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} k_x = (B + A) / (C + B - A) \\ \text{and} \\ k_y = (B + A) / (C - B + A), \end{array} \right.$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{95}(x) = 140 / \sqrt{k_x N}, \\ \alpha_{95}(y) = 140 / \sqrt{k_y N}, \end{array} \right.$$

and

$$(3) \quad \Omega = \arccos(\sin I_{\text{int}} / \cos I_{\text{min}}).$$

Inversely, to calculate the inertia tensor from the bivariate statistics data, the principal values are given by

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} C = 2 N (k_x + k_y) / (2 k_x k_y + k_x + k_y), \\ B = N (2 k_x k_y + k_x - k_y) / (2 k_x k_y + k_x + k_y) \\ A = N (2 k_x k_y - k_x + k_y) / (2 k_x k_y + k_x + k_y), \end{array} \right.$$

and two rotations are then applied (of the angle Ω around the vertical, and in the direction D, I).

For each of the principal susceptibility axes of each sample, the measurement procedure using Kappabridge KLY-2 associates a confidence ellipse defined by its maximum and minimum α_{95} values. It is easy from these two values to calculate, using the relations (2) to (4) first k_x and k_y (with $N = 1$ because the considered scattering is related to a single direction), and second the principal values of

the inertia tensor associated with this direction. Finally, as the maximum and intermediate directions of this inertia tensor are the other susceptibility axes, Ω can be calculated and therefore the whole inertia tensor.

The mean inertia tensor becomes the sum of each of these last tensors for all the samples of a site. This calculation yields thus the integration of the measurement uncertainty in the determination [using relations (1) to (3)] of the confidence ellipse for the considered susceptibility axis. The same procedure is repeated for the two other susceptibility axes, in order to obtain the three confidence ellipses.

A weighting can be applied for this determination of the mean inertia tensors. The most interesting weighting is based on the concentration parameters (for example using $\sqrt{k_x k_y}$ which is the inverse of the variance of the scattering). This is equivalent to a dissociation of the study of the different susceptibility axes. For each axis independently, one sets off by this weighting the best specified directions (and thus very probably the ones closest to the structural directions). The figure shows an example with a weak anisotropy and a strong scattering in the magnetic foliation. Using the classical Hext-Jelinek statistics, the directions are undetermined in this plane, but the bivariate statistics, particularly using a weighting by $\sqrt{k_x k_y}$ yield the structural directions locally visible in the studied site.

INTRODUCTION

L'analyse d'un ensemble de données d'anisotropie de susceptibilité magnétique provenant d'un même site géologique se fait, de façon classique, par le calcul du tenseur moyen de l'ensemble des tenseurs d'anisotropie associés à chaque échantillon (Hext, 1963). La difficulté majeure pour interpréter les résultats de ce calcul provient de la dispersion (qui peut être grande) des valeurs individuelles de la susceptibilité globale (bulk susceptibility) et de celle des rapports

d'axe d'anisotropie. En un mot, les directions propres des tenseurs d'anisotropie entrant dans le calcul de leurs moyennes ne sont pas statistiquement équivalentes. Il semble, *a priori*, plus significatif d'effectuer, pour chaque échantillon, une normalisation préalable des termes du tenseur par la susceptibilité globale, pour éviter que la moyenne tensorielle ne soit dominée par les échantillons à forte susceptibilité (Jelinek, 1978). Mais dans ce cas, des échantillons à très faible susceptibilité, ceux dont l'incertitude de mesure sur les directions peut être impor-

tante, ont le même poids que des échantillons pour lesquels l'anisotropie est plus précisément définie grâce à une plus forte susceptibilité. Ce procédé de normalisation introduit, lui aussi, un biais dans le calcul des moyennes et ne permet donc pas d'obtenir des informations statistiquement satisfaisantes sur la dispersion des directions propres d'anisotropie. De plus, si le tenseur d'anisotropie de susceptibilité, par la grandeur relative de ses valeurs propres, contient intrinsèquement ses variances (Hext, 1963), il ne faut pas oublier que viennent se superposer les incertitudes de mesure (Jelinek, 1973, 1977). Or, les méthodes proposées actuellement ne tiennent compte que de la dispersion statistique des directions principales individuelles, ou des variances intrinsèques des tenseurs moyens, sans se préoccuper de la propagation de ces incertitudes de mesure. La méthode proposée ici comble cette lacune, et permet en même temps une analyse statistique générale des directions moyennes de l'anisotropie représentative d'un site ou d'une formation géologique.

LES MÉTHODES STATISTIQUES UTILISÉES

Les méthodes utilisées actuellement peuvent être décomposées en trois groupes :

– Les premières (Hext, 1963 ; Jelinek, 1978) supposent d'abord que le tenseur moyen normalisé est un bon estimateur de la susceptibilité de l'ensemble des échantillons. L'estimation des limites de confiance est faite ensuite en étudiant les variances dans le plan perpendiculaire aux vecteurs propres, en appliquant la propagation linéaire de petites fluctuations à valeur moyenne nulle, selon l'hypothèse d'une distribution normale. C'est une technique robuste, même si on observe une sous-estimation des incertitudes dans le cas des fortes dispersions (Constable et Tauxe, 1990 ; Lienert, 1991).

– Les secondes sont une adaptation des statistiques axiales ou vectorielles habituelles (tenseur d'inertie) (Watson, 1960, 1966), tenseur d'orientation (Scheidegger, 1965 ; Mark, 1973), statistique de Fisher (1953), mais en considérant, cette fois, les trois lots

de directions principales indépendamment (Ellwood et Whitney, 1980 ; Parks *et al.*, 1988). Le caractère elliptique de la dispersion autour des axes principaux n'étant pas pris en compte, ces méthodes sont en défaut, particulièrement dans les cas où les échantillons présentent un ellipsoïde de susceptibilité à symétrie quasiment de révolution (Ernst et Pearce, 1989).

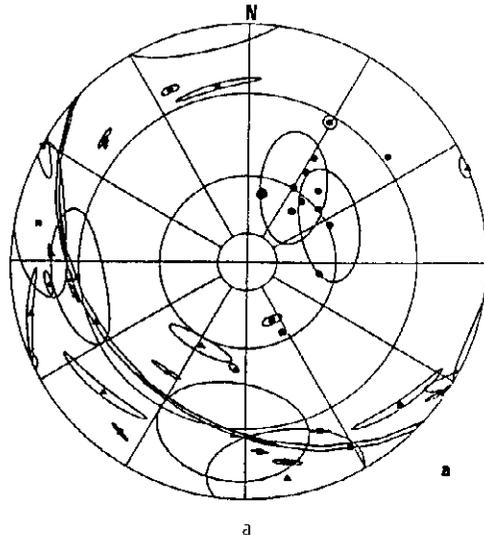
– Les troisièmes font appel aux procédés de la simulation statistique dont la méthode « bootstrap » de Constable et Tauxe (1990) est un récent exemple. Le « bootstrap » est appliqué à la génération d'un nombre artificiellement grand de « pseudo-tenseurs d'anisotropie moyens normalisés » calculés à partir des valeurs réellement mesurées, et redistribuées au hasard. Les « variabilités » autour de chaque direction propre « moyenne » sont analysées séparément à l'aide de la statistique FB_3 de Kent (1982) qui, contrairement aux méthodes du deuxième groupe, tient compte de l'ellipticité de la dispersion des axes. Même si cette technique est attrayante, elle n'est pas miraculeuse, et un trop faible nombre de spécimens (moins de 12) limitera toujours la fiabilité des estimations, que ce soit par des méthodes paramétriques ou par des simulations.

NOUVELLE MÉTHODE PROPOSÉE

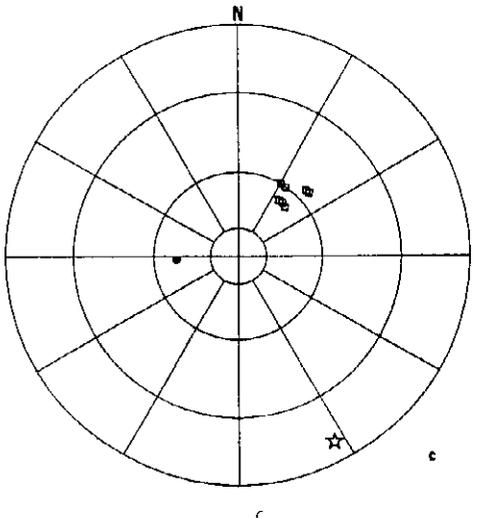
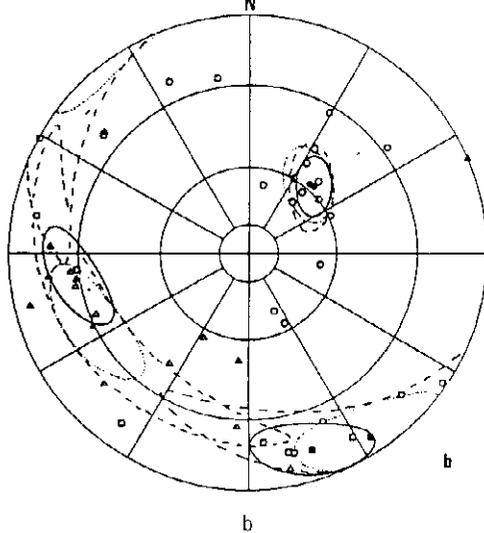
Mettant à profit le caractère entièrement paramétrique et « algébriquement réversible » de l'extension bivariée de la statistique de Fisher (Le Goff, 1990 ; Le Goff *et al.*, 1992 ; Henry et Le Goff, 1995), le calcul des moyennes vectorielles n'est plus celui de directions propres isolées, mais celui de directions propres auxquelles sont associés des paramètres d'une ellipse d'erreur.

Sans entrer dans les détails de la démonstration, on peut écrire que les paramètres de la statistique bivariée sont tous contenus dans le tenseur d'inertie \mathbf{I} (opposé tensoriel de la matrice des covariances) de l'ensemble des directions individuelles considérées. Ces paramètres sont le nombre N de directions initiales (ou d'échantillons), la direction moyenne (\bar{D} , \bar{I}), les coefficients de concen-

Exemple pris dans un site des grès rouges permien de la bordure SW de l'Argentera (projection stéréographique dans l'hémisphère inférieur) : a) Axes de susceptibilité maximale (carrés), intermédiaire (triangles) et minimale (cercles) avec leur ellipse de confiance liée à la mesure pour les différents échantillons. b) Axes de susceptibilité (voir ci-dessus) des échantillons (figurés vides) et moyens (figurés pleins) ; ellipses de confiance par les méthodes Hext-Jelinek (tirets) et bivariate, avec (traits continus) et sans (pointillés) pondération par $\sqrt{k_x k_y}$. c) Pôles des plans de stratification (carrés vides) et de schistosité de fracture visible très localement (cercle plein) et intersection stratification-schistosité (étoile vide).



Example from a site of Permian red sandstone in the south-western border of the Argentera (stereographic projection in the lower hemisphere): a) Maximal (squares), intermediate (triangles) and minimal (circles) susceptibility axes with their confidence ellipse related to the measurement for the different samples. b) Susceptibility axes (see above) of the samples (open symbols) and mean axes (full symbols); Confidence ellipses using Hext-Jelinek (dashes) and bivariate with (continuous lines) or without (dotted lines) weighting by $\sqrt{k_x k_y}$ methods. c) Stratification (open squares) and local fracture cleavage (full circle) poles and intersection stratification-cleavage (open star).



tration perpendiculaires k_x et k_y , et l'angle Ω définissant la direction d'allongement de l'ellipse par rapport au méridien de la direction moyenne. Cette statistique converge strictement vers celle de Fisher avec $k = k_x = k_y$ (et Ω indéterminé). Inversement, connaissant les paramètres $N_i, \bar{I}_i, \bar{D}_i, k_{x,i}, k_{y,i}, \Omega_i$ d'une population de M directions moyennes, on connaît aussi immédiatement le tenseur I_i , et, pour calculer une moyenne pondérée de ces M directions, on calcule la somme tensorielle suivante, où w_i est le poids attribué à chaque direction :

$$I_{\text{moy}} = \sum_{i=1}^M w_i I_i / \sum w_i.$$

On extrait ensuite de I_{moy} les paramètres $\bar{I}, \bar{D}, k_x, k_y, \Omega$ représentatifs de la moyenne de la population. L'ellipse de confiance autour de cette dernière direction moyenne peut alors être calculée en considérant qu'elle a été obtenue avec le total pondéré des échantillons de chaque direction individuelle :

$$N_{\text{moy}} = \sum_{i=1}^M w_i N_i.$$

A, B et C étant les valeurs propres de I , avec $A > B \gg C$, et les directions (D, D) propres minimale, intermédiaire et maximale d'inertie étant affectées des indices min, int et max, les formules spécifiques de la statistique bivariate sont les suivantes.

(1) les paramètres de dispersion perpendiculaires

$$k_x = (B + A) / (C + B - A)$$

et

$$k_y = (B + A) / (C - B + A) ;$$

(2) les demi-axes de confiance autour de la direction moyenne $\alpha_{95}(x) = 140 / \sqrt{k_x N}$ et $\alpha_{95}(y) = 140 / \sqrt{k_y N}$.

(3) angle $\Omega : \Omega = \arccos(\sin I_{\text{int}} / \cos I_{\text{min}})$;

(4) inversement, pour calculer le tenseur

I quand on connaît $\bar{D}, \bar{I}, k_x, k_y, \Omega$:

d'abord les valeurs propres (ou le tenseur diagonal),

$$C = 2 N (k_x + k_y) / (2 k_x k_y + k_x + k_y),$$

$$B = N(2k_x k_y + k_x - k_y) / (2k_x k_y + k_x + k_y),$$

$$A = N(2k_x k_y - k_x + k_y) / (2k_x k_y + k_x + k_y),$$

ensuite, une première rotation d'un angle Ω autour de Oz et enfin une deuxième rotation dans la direction (\bar{I}, \bar{D}) .

Cette statistique bivariate permet en pratique une analyse beaucoup plus complète que la simple étude de directions mesurées ou la méthode « bootstrap », puisqu'elle peut apporter une réponse au problème-clé de l'intégration dans le calcul des incertitudes sur l'orientation de chaque axe principal de susceptibilité. Pour chaque échantillon, la procédure de mesure utilisée avec le Kappabridge KLY-2 associe, à chacune des trois directions principales, un ovale de confiance (lié à la précision de la mesure) défini par deux valeurs de α_{95} (Jelinek, 1973, 1977). En pratique, on obtient, en même temps que les trois directions principales, trois valeurs de α_{95} associées chacune à un plan contenant deux des trois directions principales. Or, connaissant les deux valeurs maximale et minimale de α_{95} pour une direction principale d'anisotropie, on peut, par les relations (2) à (4), calculer d'abord k_x et k_y (en faisant $N = 1$ puisqu'il s'agit de la dispersion autour de la direction considérée et non de l'incertitude sur une moyenne), puis les valeurs propres du tenseur d'inertie associé à cette direction. Cette dernière correspond à la direction principale minimale du tenseur d'inertie. Les deux autres directions principales de ce tenseur d'inertie sont les deux autres directions propres du tenseur d'anisotropie, mais rangées dans l'ordre des α_{95} croissants, ce qui permet de calculer Ω , puis le tenseur d'inertie complet. Il est alors possible de sommer les tenseurs pour les différents échantillons, afin d'obtenir par les relations (1) à (3) l'ellipse de confiance associée, pour cet axe d'anisotropie, à l'ensemble des échantillons. En répétant cette opération pour les deux autres axes d'anisotropie, on obtient finalement les trois ellipses de confiance.

Les pondérations à appliquer peuvent être de différentes natures selon les cas. Il devient inutile d'appliquer une pondération par un coefficient lié à la forme de l'ellipsoïde de susceptibilité, car les différentes valeurs de α_{95} sont en relation directe avec cette forme. Une pondération en relation avec la susceptibilité globale peut faire ressortir le cas de différentes familles minéralogiques. La pondération la plus intéressante reste toutefois basée sur la concentration, en utilisant par exemple $\sqrt{k_x k_y}$ qui est l'inverse de la variance de la dispersion. Cela revient à dissocier l'étude de chaque direction principale en faisant ressortir indépendamment pour chaque axe, par une pondération, les directions les mieux définies (donc sans doute les plus près des directions structurales auxquelles elles sont liées); le résultat n'est alors plus biaisé par le fait que les trois directions principales moyennes sont nécessairement perpendiculaires pour les statistiques basées sur un tenseur d'anisotropie moyen, ce qui n'est pas toujours le cas des directions structurales.

La figure présente un exemple où l'anisotropie est faible, la dispersion importante dans le plan de la foliation magnétique et l'incertitude de mesure très différente d'un échantillon à l'autre : pour les axes intermédiaires et maximaux, les directions sont presque indéterminées dans ce plan selon les résultats de la méthode Hext-Jelinek, alors qu'elles sont distinctes avec l'analyse bivariate, en particulier après pondération par $\sqrt{k_x k_y}$. Ces directions traitées par la statistique bivariate apparaissent en relation étroite avec les directions structurales dominantes visibles (axe minimal et pôle de la stratification-schistosité), malgré une dispersion très importante des directions mesurées. L'application d'une pondération apporte ici une diminution de la zone d'incertitude des axes de susceptibilité. Cette méthode permet donc d'affiner l'analyse des directions principales d'anisotropie dans certains cas difficiles.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- CONSTABLE, C. et TAUXE, L., 1990. The bootstrap for magnetic susceptibility tensors, *J. Geophys. Res.*, 95, p. 8383-8395.
- ELLWOOD, B. B. et WHITNEY, J. A., 1980. Magnetic fabric of the Elberton Granite, Northeast Georgia, *J. Geophys. Res.*, 83, p. 1481-1486.
- ERNST, R. E. et PEARCE, G. W., 1989. Averaging of anisotropy of magnetic susceptibility data, *Pap. Geol. Surv. Can.*, 89-9, p. 297-305.
- FISHER, N. I., LEWIS, T. et EMBLETON, B. J., 1987. *Statistical analysis of spherical data*, Cambridge Univ. Press, New York, 329 p.
- FISHER, R. A., 1953. Dispersion on a sphere, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 217, p. 295-305.
- HENRY, B. et LE GOFF, M., 1995. A tool for paleomagnetic interpretation: the bivariate extension of the Fisher statistique, *Geophys. J. Int.* (soumis).
- HEXT, G. R., 1963. The estimation of second order tensors, with related tests and designs, *Biometrika*, 50, p. 353-373.
- JELINEK, V., 1973. Precision AC Bridge set for measuring magnetic susceptibility of rocks and its anisotropy, *Studia geoph. et geod.*, 17, p. 36-48.
- JELINEK, V., 1977. The statistical theory of measuring anisotropy of magnetic susceptibility of rocks and its application, *Geofyzika*, Brno, 88 p.
- JELINEK, V., 1978. Statistical processing of anisotropy of magnetic susceptibility measured on groups of specimens, *Studia geoph. et geod.*, 22, p. 50-62.
- KENT, J. T., 1982. The Fisher-Bingham distribution on the sphere, *J. R. Statist. Soc. B*, 44, p. 71-80.
- LE GOFF, M., 1990. Lissage et limites d'incertitude des courbes de migration polaire : pondération des données et extension bivariate de la statistique de Fisher, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 311, série II, p. 1191-1198.
- LE GOFF, M., HENRY, B. et DALY, L., 1992. Practical method for drawing a VGP path, *Phys. Earth Planet. Int.*, 70, p. 201-204.
- LIENERT, B. R., 1991. Monte Carlo simulation of errors in the anisotropy of magnetic susceptibility: a second rank symmetric tensor, *J. Geophys. Res.*, 96, p. 19539-19544.
- MARK, D. M., 1973. Analysis of axial orientation data, including till fabrics, *Geol. Soc. Am. Bull.*, 84, p. 1369-1374.
- PARK, J. K., TANCZYK, E. I. et DESBARATS, A., 1988. Magnetic fabric and its significance in the 1400 Ma Mealy diabase dykes of Labrador, Canada, *J. Geophys. Res.*, 93, p. 13689-13704.
- SCHEIDEGGER, A. E., 1965. On the statistics of the orientation of bedding planes, grain axes, and similar sedimentological data, *US Geol. Surv. Prof. Pap.*, 525C, p. 1-11.
- WATSON, G. S., 1960. More significance tests on the sphere, *Biometrika*, 47, p. 87-91.
- WATSON, G. S., 1966. The statistics of orientation data, *J. Geol.*, 74, p. 786-797.