

Lissage et limites d'incertitude des courbes de migration polaire : pondération des données et extension bivariate de la statistique de Fisher

Maxime LE GOFF

Résumé — Une méthode statistique de lissage des courbes de migration polaire et de représentation des limites d'incertitude par une succession d'ellipses est proposée. Elle est entièrement paramétrique et repose sur les relations entre le tenseur d'inertie et les paramètres de la statistique de Fisher, dont on déduit une extension bivariate. Elle fournit, après un calcul tensoriel élémentaire, les paramètres d'une ellipse de confiance autour de la direction moyenne d'un ensemble pondéré de populations vectorielles unimodales quelconques.

Polar wander path and its confidence limits: data weighting and bivariate extension of the Fisher distribution

Abstract — A statistical method for the smoothing of the polar wander paths and for giving their confidence limits by the mean of successive ellipses is proposed. It is fully parametrical and is based on the relations between the inertia matrix and the parameters of the Fisher distribution, from which a bivariate form is deduced. We can obtain, after an elementary tensorial calculation, the parameters of the confidence ellipse around a vectorial weighted mean, for any unimodal set of vectors.

Abridged English Version — INTRODUCTION. — Drawing a polar wander path requires determination of the averaged direction of a weighted sum of vectorial means derived from the Fisher statistics. Several methods have already been proposed ([5] to [8]). The new one, presented here, is elaborated around a bivariate extension of the Fisher statistics. The parameters of that statistical model are directly estimated from the terms of the inertia tensor which can be associated to any vectorial set. That permits easy introduction of many types of weighting.

MATHEMATICAL MODEL. — The mathematical development, done in spherical coordinates (co-latitude θ and longitude φ) in an orthonormal system (Ox , Oy , Oz), can easily be referred to in the French version, keeping in mind the following points:

1. We work on the assumption of strong concentrations around the mean direction (θ_0, φ_0) of N vectors (θ_i, φ_i) bearing a unit mass m_i at their end. First, in the particular case of the mean direction along Oz ($\theta_0 = 0$), we establish the approximate relation (2) between the diagonal terms (A , B , C) of the tensor D (1) and the estimator $k = N / (N - \sum \cos \theta_i)$ of the Fisher statistics ([1], [2], [4]). By many samplings, the validity limits of relation (2) have been established at 3% departure from $k > 8$ and at 0.5% from $k > 30$ whatever $N > 10$. In a second step, we determine all the terms of the tensor I in the general case of a mean direction (paleopole) of latitude λ and longitude φ (3).

2. The problem of the weighted summation of N populations $(\lambda_j, \varphi_j, k_j, N_j)$ can thus be solved as a tensorial addition ($I_t = \sum p_j I_j$), p_j being the weight given to the j th pole. The minimal eigen direction $(\lambda_{\min}, \varphi_{\min})$ of I_t is a good estimator of the mean direction of that new population [3], but the tensor has now lost its rotational symmetry ($A \neq B$).

Note présentée par Jean-Louis LE MOUËL.

3. Let the diagonal tensor of I_t be D_t , the eigen directions of which are Ox , Oy , Oz and keep the hypothesis of small scattering around Oz ($\theta_0 = 0$). When applying the Gauss statistics in the Oxy projection plane of the end of the vectors ($\theta_i, \varphi_i, m_i = 1$), it appears that the variances of (4) are already expressed in (1). That leads to the relations (5) which give, in function of the eigen values A, B, C of the inertia tensor, the parameters k_x and k_y , reciprocal of the variances in the plane. Multiplying numerator and denominator of (4) by $\exp(k_x \cos^2 \varphi + k_y \sin^2 \varphi) > 0$ and using $x = \theta \cos \varphi$, $y = \theta \sin \varphi$, and $(1 - \theta^2/2) \simeq \cos \theta$, we obtain (6) which is a particular form of Fisher statistics in which k is a function of φ .

4. These developments lead us to propose a bivariate probability function $P\{0, \kappa_x, \kappa_y\}$ (7), in which κ_x and κ_y may be estimated by (5). The normalisation factor can be computed using formula (8). It is easy to verify that for $\kappa_x = \kappa_y = \kappa$, we find exactly $P\{0, \kappa_x = \kappa_y = \kappa\} = F\{0, \kappa\}$.

5. To know the confidence surface at $p\%$, we need to solve equation (9), with respect to $\alpha(\varphi)$. Like for the Bingham statistics [9], there is no analytical solution for this integral. However, we have used a formula similar to that of the Fisher case giving α_{95} versus k , but with $k = k_x \cos^2 \varphi + k_y \sin^2 \varphi$. The result of this computation is that the departure of p from 95% is not greater than 1% even for values of k_x up to 70 and k_y down to 2. A verification was made for different values of p , and we can therefore consider that the Fisher formulae are well adapted for the computation of the confidence ellipse axes. Thus we write the formulae (10). The orientation of the ellipse, with respect to the meridian crossing the mean direction, is given by the angle Ω of the formulae (11).

A comparison with other calculations of confidence regions, made with a set of unit vectors treated with the Kent distribution model [4] and VGP data of the Harrison and Lindh AWP method [8] (see Fig. 1) shows a very good reliability of this new method.

CONCLUSION. — In order to illustrate this method, we have treated part of the selection of the North-American paleopoles used by Harrison and Lindh [8] as can be seen in Figure 2. Each mean value is very close to that calculated from path 5 of [8] (the authors' "preferred path") and the confidence ovals are usually slightly larger than the confidence circle calculated by [8].

This example demonstrates the ability of the method for smoothing vectorial chronological data derived from the Fisher statistics. This bivariate model, because it joins the tensorial additivity to a simple extension of the Fisher model, suggests the possible use of the three parameters k_x , k_y and Ω to characterize the general mean of a set of measurements relative to a formation, instead of the current Fisher k parameter, which is often the result of a calculation on a succession of means having lost their own dispersion characteristics. This could increase the homogeneity of the paleomagnetic data.

I. INTRODUCTION. — En paléomagnétisme, il est fréquemment nécessaire de procéder à la composition pondérée de populations vectorielles unimodales, avec ou sans symétrie de révolution. C'est en particulier le cas du tracé sur la sphère, soit de la variation séculaire du champ géomagnétique, soit de la dérive apparente des pôles paléomagnétiques, à partir de données discrètes. Ce tracé prend la forme d'un « ruban », dont la largeur figure l'incertitude sur la position moyenne calculée à partir d'un ensemble de directions d'âges voisins. Depuis la publication de Fisher en 1953 [1], la littérature concernant les statistiques sphériques est très abondante, et des recueils de synthèses théoriques ou pratiques ont été édités ([2], [3], [4]). Diverses méthodes ont été utilisées pour figurer sur

la sphère une courbe chronologique avec ses limites d'incertitude ([5] à [8]). Nous proposons ici une nouvelle méthode, basée sur une extension bivariate de la statistique de Fisher, qui permet d'introduire la pondération des données. Entièrement paramétrique, elle fournit, après un calcul tensoriel élémentaire, les mesures des grands axes d'une surface de confiance elliptique, autour d'une direction moyenne de vecteurs isolés, ou de plusieurs populations, connues indifféremment par leur tenseur d'inertie ou par leurs paramètres de Fisher. La succession des ellipses dessine sur la sphère le ruban figurant le chemin angulaire parcouru par le champ géomagnétique au cours des temps géologiques ou historiques. Bien que les applications s'étendent à toutes sortes de données vectorielles chronologiques, nous nous limiterons ici aux notations se rapportant à la dérive apparente des pôles paléomagnétiques.

II. FORMULATION DU MODÈLE STATISTIQUE. — Considérons d'abord, en coordonnées sphériques, une répartition unimodale de N vecteurs unitaires (θ_i , colatitude et φ_i , azimuth), dont chaque extrémité est affectée d'une masse unitaire m_i , et dont la direction moyenne (de concentration maximale) est l'axe Oz ($\theta_0 = 0$) du repère orthonormé $Oxyz$. Rappelons ensuite que la direction du minimum d'inertie d'une telle population vectorielle est un estimateur non biaisé de sa direction moyenne ($\theta_{\min} = \theta_0 = 0$) [3], et ajoutons enfin que cette répartition suit le modèle de probabilité de Fisher : $F\{0, \kappa\} = (\kappa/4\pi \operatorname{sh}(\kappa)) \exp(\kappa \cos \theta)$ dont l'estimation k du facteur de précision κ , s'écrit ici :

$$k = N / (N - \sum \cos \theta_i) \quad [2].$$

Le tenseur d'inertie $\mathbf{D}$ de l'ensemble des m_i est diagonal, de révolution autour de Oz (son axe minimal). Avec $z = \cos \theta$, $x = \sin \theta \cos \varphi$ et $y = \sin \theta \sin \varphi$:

$$(1) \quad \mathbf{D} = \begin{vmatrix} N - \sum x_i^2 & -\sum x_i y_i & -\sum x_i z_i \\ -\sum x_i y_i & N - \sum y_i^2 & -\sum y_i z_i \\ -\sum x_i z_i & -\sum y_i z_i & N - \sum z_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix}$$

où $A + B + C = 2N$ et $A = B$.

Dans l'hypothèse des κ grands, justifiée en paléomagnétisme, on peut faire les approximations $\sin \theta \simeq \theta$ et $\cos \theta \simeq 1 - \theta^2/2$ dans les calculs de A , B , C , et k . En tenant compte du terme en θ^4 dans le calcul de C , qui est lui-même petit devant $A + B$, on établit la formule $k \simeq 2A/C$ qui permet de recalculer les trois termes du tenseur diagonal qui représente la dispersion de la population vectorielle dont on connaît le paramètre k de Fisher :

$$(2) \quad C = \frac{2N}{1+k} \quad \text{et} \quad A = B = \frac{kN}{1+k}$$

De très nombreux tirages aléatoires de répartitions de Fisher ont montré que cette formule reste applicable à mieux que 3 % dès $k > 8$, et 0,5 % si $k > 30$ quel que soit $N > 10$.

Dans le cas général, la direction moyenne est la latitude λ et la longitude φ d'un pôle paléomagnétique. Il suffit donc d'appliquer à ce tenseur $\mathbf{D}$ une rotation $\mathbf{R}$ selon (λ, φ) pour obtenir le tenseur d'inertie complet $\mathbf{I}$:

$$(3) \quad \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \sin \lambda \cos \varphi & \sin \lambda \sin \varphi & -\cos \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \cos \lambda \cos \varphi & \cos \lambda \sin \varphi & \sin \lambda \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{I} = \mathbf{R}' \mathbf{D} \mathbf{R}.$$

A chaque population $(\lambda_j, \varphi_j, k_j, N_j)$, on associe un tenseur $\mathbf{I}_j$ auquel on attribue un poids p_j qui dépend des conditions de précision, de qualité, d'âge, etc., que l'on se fixe au préalable. Dans le cas de la dérive du pôle, p_j peut être proportionnel à la portion de la plage d'incertitude sur l'âge du pôle interceptée par une fenêtre mobile de durée constante.

On peut alors résoudre simplement le problème de la composition de plusieurs populations de dispersions et de directions moyennes différentes, en effectuant, par analogie avec la mécanique, la somme pondérée des tenseurs $\mathbf{I}_j$: $\mathbf{I}_t = \sum p_j \mathbf{I}_j$, dont la direction de l'axe minimal est la direction moyenne de l'ensemble. La diagonalisation de $\mathbf{I}_t$ nous donne les valeurs propres $C_t < B_t < A_t$, et les directions propres qui serviront au calcul des paramètres de notre modèle statistique : $C_t, \theta_{\min}, \varphi_{\min}$; $B_t, \theta_{\text{int}}, \varphi_{\text{int}}$; $A_t, \theta_{\max}, \varphi_{\max}$.

Restons dans l'hypothèse des grands k et du tenseur $\mathbf{D}_t$ (diagonal de $\mathbf{I}_t$ qui n'est plus de révolution) axé sur Ox, Oy, Oz , et appliquons la statistique de Gauss aux points (x, y) du plan Oxy de projection de l'extrémité des $N = \sum p_j N_j$ vecteurs $(\theta_j, \varphi_j, m_j = 1)$. Par notre choix des axes, le coefficient de corrélation est nul et nous pouvons écrire :

$$(4) \quad G\{0, \sigma_x, \sigma_y\} = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)\right),$$

avec les estimations des variances $\sigma_x^2 = \sum x_j^2/N$ et $\sigma_y^2 = \sum y_j^2/N$ qui sont déjà exprimées dans (1) : $A = N - \sum x_j^2 = N(1 - \sigma_x^2)$. Avec $A + B \simeq 2N$, on trouve finalement, en appelant k_x et k_y les inverses des variances :

$$(5) \quad k_x = \frac{1}{\sigma_x^2} \simeq \frac{(B+A)}{(C+B-A)}; \quad k_y = \frac{1}{\sigma_y^2} \simeq \frac{(B+A)}{(C+A-B)}.$$

En remplaçant dans (4) x et y par leurs valeurs $\theta \cos \varphi$ et $\theta \sin \varphi$, puis en multipliant numérateur et dénominateur par $\exp(k_x \cos^2 \varphi + k_y \sin^2 \varphi) > 0$, et enfin en remplaçant $(1 - \theta^2/2)$ par $\cos \theta$, on obtient la distribution :

$$(6) \quad P\{0, k_x, k_y\} = \frac{\sqrt{k_x k_y}}{2\pi e^{[k_x \cos^2 \varphi + k_y \sin^2 \varphi]}} e^{[k_x \cos^2 \varphi + k_y \sin^2 \varphi] \cos \theta}$$

qui est une forme particulière de la statistique de Fisher dans laquelle κ varie suivant l'angle φ . Si l'on fait $k_x = k_y = \kappa$, on retrouve la formule de Fisher avec $2 \operatorname{sh}(\kappa)$ confondu avec $\exp(\kappa)$: $P\{0, (k_x = k_y = \kappa)\} \simeq F\{0, \kappa\}$.

Ce résultat nous conduit à proposer la fonction de probabilité bivariate suivante, dont la validité n'est plus restreinte aux faibles dispersions.

$$(7) \quad P\{0, \kappa_x, \kappa_y\} = C_{(\kappa_x, \kappa_y)}^{-1} \exp([\kappa_x \cos^2 \varphi + \kappa_y \sin^2 \varphi] \cos \theta).$$

La constante de normalisation $C_{(\kappa_x, \kappa_y)} = \iint P\{0, \kappa_x, \kappa_y\} \sin \theta d\theta d\varphi$ peut se calculer, après deux changements de variable $\Phi = 2\varphi$, puis $t = \cos \theta (\kappa_x + \kappa_y)/2$, par cette série :

$$(8) \quad C_{(\kappa_x, \kappa_y)} = \frac{2\pi}{\kappa_x + \kappa_y} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{((\kappa_x - \kappa_y)/2)^{2q} ((\kappa_x + \kappa_y)/2)^{2p+2q+1}}{(2p)!(q!)^2 (2p+2q+1)}.$$

Et, en faisant $\kappa_x = \kappa_y = \kappa$ dans (7) et (8), on peut vérifier qu'on trouve exactement $P\{0, (\kappa_x = \kappa_y = \kappa)\} = F\{0, \kappa\}$.

Les paramètres κ_x et κ_y peuvent être estimés, en première approximation, par k_x et k_y de (5).

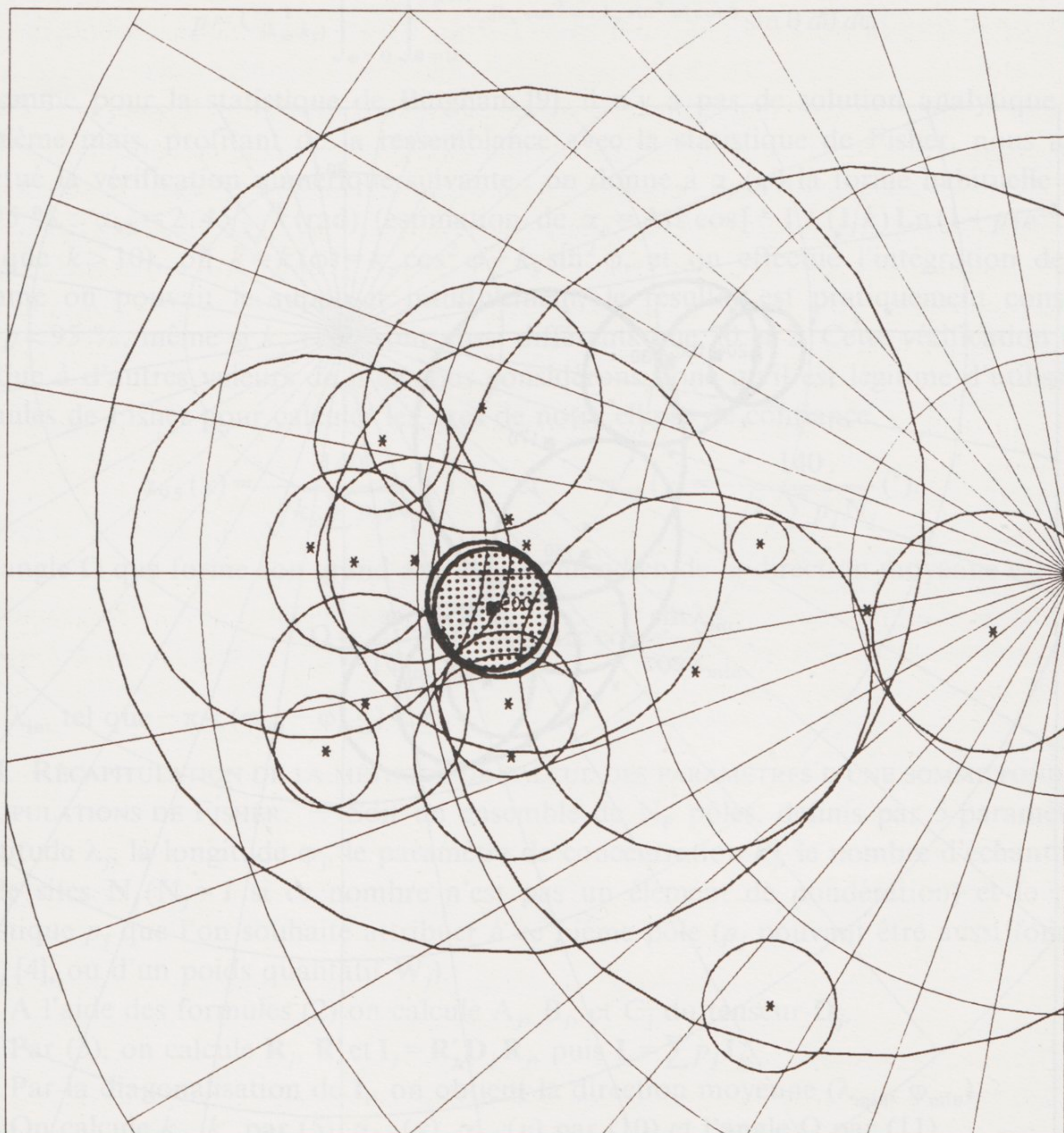


Fig. 1. — Tracé de l'ellipse de confiance à 95 % autour du pôle moyen à 200 Ma calculé avec les 16 PGV (étoiles $\star$) utilisés par Harrison et Lindh [8]. Les dispersions autour de chaque PGV (k de Fisher), le facteur de pondération qualitatif ($N=1$ à 10) du tableau B1 de [8] et le coefficient de pondération proportionnel à la partie de l'incertitude en âge interceptée par la fenêtre de 30 Ma ($p=0$ à 1), sont pris en compte. On a aussi représenté sur ce dessin les 16 cercles de confiance à 95 %. On constate que l'ovale obtenu par notre calcul ($\lambda=63,4^\circ\text{N}$, $\varphi=93,6^\circ\text{E}$, $\alpha_{95}(x)=2,8^\circ$, $\alpha_{95}(y)=3,2^\circ$, $\Omega=134^\circ$) est légèrement plus grand que le cercle à 95 % (ombré) recalculé d'après [8] ($\lambda=63,6^\circ\text{N}$, $\varphi=93,6^\circ\text{E}$, $\alpha_{95}=2,7^\circ$). Dans les deux cas, les α sont obtenus avec $\sum N_i p_i = 56,3$.

Fig. 1. — View of the confidence ellipse around the 200 Ma mean pole calculated with the 16 VGP (stars $\star$) used by Harrison and Lindh [8]. The VGP dispersions (k of Fisher), the qualitative weighting factor ($N=1$ to 10) of the table B1 of [8] and the weighting factor proportional to the part of age confidence interval intercepted by the 30 Ma window ($p=0$ to 1), are taken into account. Individual 95% confidence circles are also drawn. One can see that our ellipse ($\lambda=63.4^\circ\text{N}$, $\varphi=93.6^\circ\text{E}$, $\alpha_{95}(x)=2.8^\circ$, $\alpha_{95}(y)=3.2^\circ$, $\Omega=134^\circ$) is slightly larger than the 95% circle (shadowed) calculated by the [8] method ($\lambda=63.6^\circ\text{N}$, $\varphi=93.6^\circ\text{E}$, $\alpha_{95}=2.7^\circ$). For both cases, α is calculated with $\sum N_i p_i = 56.3$.

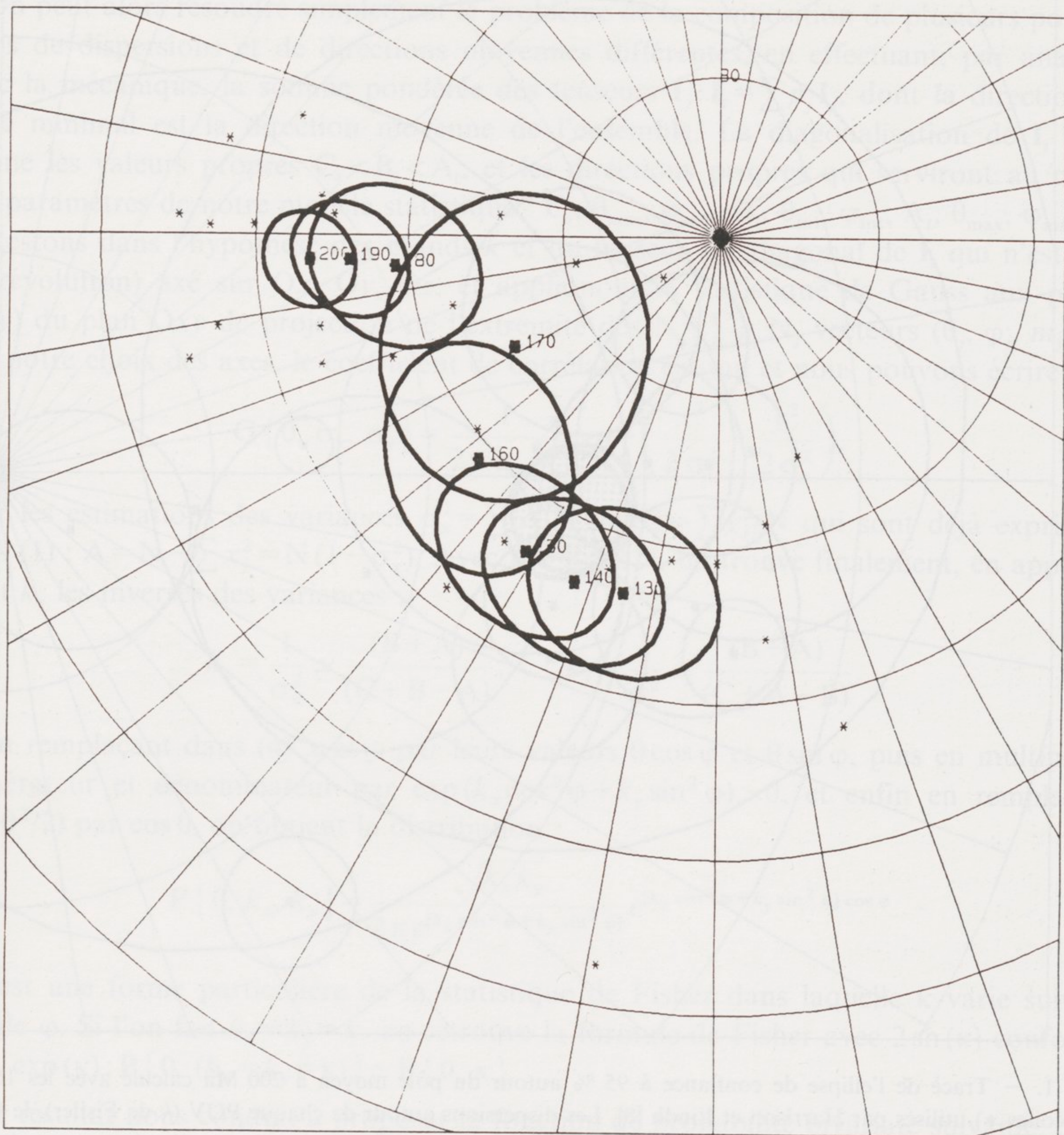


Fig. 2. — Succession des ellipses de confiance à 95 % correspondant à la courbe de migration polaire entre 130 et 200 Ma, pour le continent Nord-Américain, obtenue à partir de la sélection de Harrison et Lindh [8]. Les 27 PGV interceptés par une fenêtre de 30 Ma sont traités comme dans l'exemple de la figure 1, en faisant glisser la fenêtre tous les 10 Ma. Les directions moyennes des PGV sont représentées par des étoiles (*).

Fig. 2. — Successive 95% confidence ellipses showing the polar wander path between 130 and 200 Ma, for the North-American continent, obtained with the Harrison and Lindh selection [8]. The 27 VGP, intercepted by a 30 Ma window, are computed like for the example of Figure 1, by a 10 Ma sliding step of the window. The stars (*) represent the VGP mean directions.

Pour connaître la surface de confiance à p % autour de la direction moyenne, il faut trouver une fonction $\alpha_p(\varphi)$ telle que :

$$(9) \quad p = C_{(k_x, k_y)}^{-1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\alpha_p(\varphi)} e^{[k_x \cos^2 \varphi + k_y \sin^2 \varphi] \cos \theta} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

Comme pour la statistique de Bingham [9], il n'y a pas de solution analytique à ce problème mais, profitant de la ressemblance avec la statistique de Fisher, nous avons effectué la vérification numérique suivante : on donne à $\alpha_p(\varphi)$ la forme habituelle pour $p=95$ % : $\alpha_{95} = 2.45/\sqrt{k}$ (rad) (estimation de $\alpha_p = \text{Arc cos}[-1 + (1/k) \text{Ln}(1 + p(e^{2k} - 1))]$ dès que $k > 10$), où $k = k(\varphi) = k_x \cos^2 \varphi + k_y \sin^2 \varphi$, et on effectue l'intégration de (9). Comme on pouvait le supposer intuitivement, le résultat est pratiquement constant, $94 < p < 95$ %, même si k_x et k_y sont aussi différents que 70 et 2. Cette vérification a été étendue à d'autres valeurs de p et nous considérons donc qu'il est légitime d'utiliser les formules de Fisher pour calculer les axes de notre ellipse de confiance.

$$(10) \quad \alpha_{95}(x) = \frac{140}{\sqrt{k_x \sum p_j N_j}} (^\circ) \quad \text{et} \quad \alpha_{95}(y) = \frac{140}{\sqrt{k_y \sum p_j N_j}} (^\circ).$$

L'angle Ω que forme son grand axe avec le méridien de la direction moyenne est

$$(11) \quad \Omega = \frac{\varphi_{\text{int}} - \varphi_{\text{max}}}{|\varphi_{\text{int}} - \varphi_{\text{max}}|} \text{Arc cos} \frac{\sin \lambda_{\text{int}}}{\cos \lambda_{\text{min}}},$$

avec λ_{int} tel que $-\pi < (\varphi_{\text{int}} - \varphi_{\text{max}}) < \pi$.

III. RÉCAPITULATION DE LA MÉTHODE DE CALCUL DES PARAMÈTRES D'UNE SOMME PONDÉRÉE DE POPULATIONS DE FISHER. — Soit un ensemble de N_F pôles, définis par 5 paramètres : la latitude λ_j , la longitude φ_j , le paramètre de concentration k_j , le nombre d'échantillons ou de sites N_j ($N_j=1$ si ce nombre n'est pas un élément de pondération) et le poids statistique p_j que l'on souhaite attribuer à ce j -ième pôle (p_j pouvant être aussi fonction de k_j [4], ou d'un poids qualitatif W_j).

1. A l'aide des formules (2) on calcule A_j , B_j , et C_j du tenseur D_j .
2. Par (3), on calcule R_j , R'_j et $I_j = R'_j D_j R_j$, puis $I_t = \sum p_j I_j$.
3. Par la diagonalisation de I_t , on obtient la direction moyenne (λ_{min} , φ_{min}).
4. On calcule k_x , k_y par (5), $\alpha_{95}(x)$, $\alpha_{95}(y)$ par (10) et l'angle Ω par (11).

Une comparaison de cette nouvelle statistique avec le modèle de Kent, faite sur les 34 vecteurs unitaires de l'exemple 5.27 de [4], a montré la parfaite similitude entre les deux résultats obtenus (écarts inférieurs à $0,1^\circ$ pour la direction moyenne et les axes de l'ovale de confiance, Ω n'étant pas calculé dans [4]). Un autre calcul, effectué sur les 16 PGV de l'Amérique du Nord utilisés par [8] pour définir le pôle moyen à 200 ± 15 Ma est illustré et commenté sur la figure 1.

IV. CONCLUSION. — Cette méthode a déjà été éprouvée lors d'une étude paléomagnétique de l'Apulie, entre l'Éocène et le Trias [10], et aussi en archéomagnétisme pour la reconstitution de la variation séculaire au cours des deux derniers millénaires [11]. A titre d'illustration, nous avons traité une partie de la sélection de pôles nord-américains de Harrison et Lindh [8] (voir légende de la figure 2). Les directions moyennes sont très voisines de celles du « tracé préféré » (path n° 5) de Harrison et Lindh, et les ovales de confiance sont toujours un peu plus grands.

La méthode est donc bien adaptée au lissage sur la sphère de données chronologiques issues, soit de la statistique de Fisher, soit directement du tenseur d'inertie (même

bimodal). Il faut mentionner ici que la disparité actuelle des données paléomagnétiques rend un peu illusoire la recherche d'une méthode statistique rigoureuse : il n'est en effet pas rare d'être conduit à additionner des PGV concernant une dizaine d'échantillons seulement avec d'autres provenant de l'étude de très nombreux sites totalisant plusieurs centaines de mesures, et avec des k annoncés variant de quelques unités à plusieurs centaines... Dans le but d'accroître l'homogénéité des données paléomagnétiques, le modèle statistique bivariate décrit ici, parce qu'il cumule l'avantage de l'additivité tensorielle et la commodité d'une extension simple de la formule de Fisher, pourrait être proposé pour caractériser les pôles paléomagnétiques. Les k_x , k_y et Ω , relatifs à l'ensemble d'une formation étudiée, pouvant toujours être pris en compte, par l'intermédiaire du tenseur associé, lors d'un calcul de moyenne vectorielle ou de redressement d'un pli.

Je remercie Lucien Daly, Jean Delcourt et Bernard Henry pour leur aide précieuse et amicale.

Note remise le 10 septembre 1990, acceptée le 27 septembre 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] R. A. FISHER, *Proc. R. Soc. A*, 217, 1953, p. 295-305.
- [2] K. V. MARDIA, *Statistics of directional data*, London, Academic press, 1972.
- [3] G. S. WATSON, *Statistics on spheres*, New York, John Wiley, 1983.
- [4] N. I. FISHER, T. LEWIS et B. J. J. EMBLETON, *Statistical analysis of spherical data*, Cambridge University Press, 1987.
- [5] E. IRVING et A. A. IRVING, *Geophysical Surveys*, 5, 1982, p. 141-188.
- [6] R. THOMPSON et R. M. CLARK, *P.E.P.I.*, 27, 1981, p. 1-7.
- [7] D. R. VAN ALSTINE et J. DE BOER, *Geology*, 6, 1979, p. 137-139.
- [8] G. S. A. HARRISON et T. LINDH, *J. Geophys. Res.*, 87, B3, 1982, p. 1903-1920.
- [9] T. C. ONSTODTT, *J. of Geophys. Research*, 85, B3, 1980, p. 1500-1510.
- [10] J. SURMONT, *Thèse*, Université Paris-VI, 1989.
- [11] I. BUCUR, *Communication at the 26th Int. Archaeometry Symposium*, Toronto, 1988.

Laboratoire de Géomagnétisme, C.N.R.S. et Université Paris-VI,
4, avenue de Neptune, 94107 Saint-Maur-des-Fossés Cedex.