

M1-M2 GEI/G2S

Informatique Approfondie - TD 3

1. A l'aide de la fonction **random_number**, créer un tableau de 10 réels compris dans l'intervalle $[-0.5, 0.5]$ (attention, la fonction **random_number** renvoie des réels compris dans l'intervalle $[0, 1]$). Avec l'instruction **WHERE**, créer un tableau de 10 caractères :
 - "+" pour les réels positifs
 - "-" pour les réels négatifs

2. Régime thermique de la lithosphère océanique

On montre qu'en première approximation le régime thermique de la lithosphère océanique est celui du refroidissement d'une plaque semi-infinie. Dans ces conditions, le champ de température est donné par

$$T(z, t) = T_m \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right]$$

où z est la profondeur, t le temps écoulé depuis la formation à la dorsale, $T_m = 1300^\circ\text{C}$ la température du manteau et $\kappa = 1 \text{ mm}^2\text{s}^{-1}$ la diffusivité thermique.

Réaliser un programme qui écrit $T(z, t)$ dans un fichier de sortie pour z variant de 0 à 150 km tous les 1 km, t (en *Ma*) étant *fixé* par l'utilisateur (faites bien attention aux unités!). *erf* sera définie dans une fonction en-dehors du programme principal. On rappelle que

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$$

Cette fonction sera calculée numériquement par la formule des rectangles :

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n f \left[a + \left(i - \frac{1}{2} \right) h \right]$$

où n est le nombre de rectangles (prendre n "assez grand") et h le pas d'intégration :

$$h = \frac{(b - a)}{n}$$

Représentation graphique.

A l'aide de **Matlab**, vous représenterez graphiquement (et sauvez dans un fichier) T en fonction de z pour plusieurs valeurs de t :

3. Equation de Laplace

On cherche à résoudre l'équation de Laplace en deux dimensions

$$\Delta V = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \right) = 0,$$

à l'intérieur d'un rectangle discrétisé par un réseau de $n_x = 11$ par $n_y = 21$ points. Cela signifie que V est représenté par un tableau 11×21 :

```
integer, parameter :: nx = 11, ny = 21
real, dimension(nx, ny) :: V
```

$V(i, j)$ représente le potentiel au point de coordonnées (i, j) sur le réseau. Les conditions aux limites sont indiquées sur la figure 1.

La méthode de résolution est la suivante : pour calculer V aux points dont le potentiel n'est pas imposé par les conditions aux limites, on écrit que V en ces points est la moyenne arithmétique

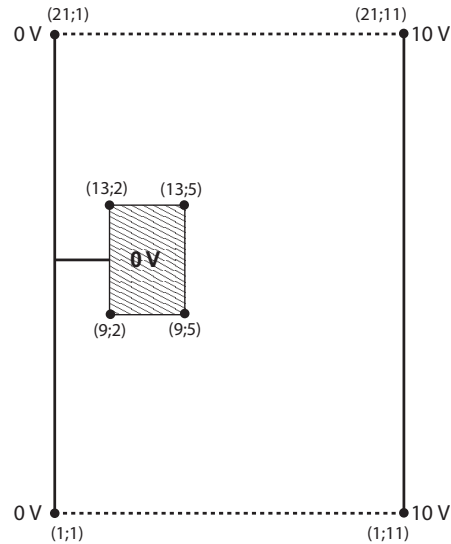


FIG. 1 – Conditions aux limites pour l'exercice 3. Le long des lignes pleines et dans le petit rectangle du milieu, le potentiel est constant. Le long des lignes pointillées, il varie linéairement. Les couples (i, j) représentent les coordonnées des points sur le réseau. *Remarque* : c'est la situation d'un condensateur plan dans lequel on introduit une barre infinie selon Oz , reliée à l'armature gauche.

des quatre points qui l'entourent (au-dessus, en-dessous, à droite, à gauche). On réitère ce calcul sur l'ensemble des points jusqu'à ce que

$$|V_{iteration\ n+1} - V_{iteration\ n}| \leq \epsilon$$

pour tous les points de la grille (ϵ étant donné par l'utilisateur).

Calculer et écrire V dans un fichier, sous la forme $i\ j\ V(i, j)$:

```

1  1  V(1,1)
2  1  V(2,1)
:
11 1  V(11,1)
← Ligne blanche
1  2  V(1,2)
2  2  V(2,2)
:
11 2  V(11,2)
← Ligne blanche
:
1 21  V(1,21)
2 21  V(2,21)
:
11 21 V(11,21)

```

N'oubliez pas les lignes blanches !!

Représentation graphique.

Comme précédemment, vous représenterez graphiquement et sauvegarderez vos résultats à l'aide de **Matlab**.

Interlude mathématique

Pourquoi le potentiel V calculé dans l'exercice 3 satisfait bien à l'équation de Laplace ?

Soit f une fonction $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, discrétisée sur un réseau de pas h . Au i^{eme} nœud, on a :

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx}(i) &\approx \frac{f(i+1) - f(i)}{h} \\ \frac{d^2f}{dx^2}(i) &\approx \frac{\frac{df}{dx}(i) - \frac{df}{dx}(i-1)}{h} \approx \frac{f(i+1) - 2f(i) + f(i-1)}{h^2}\end{aligned}$$

Pour une fonction $V : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(i, j) &\approx \frac{V(i+1, j) - 2V(i, j) + V(i-1, j)}{h^2} \quad (\text{on "fixe" } j) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(i, j) &\approx \frac{V(i, j+1) - 2V(i, j) + V(i, j-1)}{h^2} \quad (\text{on "fixe" } i) \\ \text{d'où, } \Delta V = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow V(i+1, j) + V(i-1, j) + V(i, j+1) + V(i, j-1) - 4V(i, j) = 0\end{aligned}$$

ce qui signifie bien que le potentiel en un point est égal à la moyenne arithmétique des quatre points qui l'entourent.