

Chapitre 3

Lois de conservation : surfaces caractéristiques et solutions propagatives

3.1 Introduction

La description mathématiques des lois de conservation se traduit par un système d'équations aux dérivées partielles, quasi-linéaires, de degré inférieur ou égal à deux. Les lois de conservation résultent d'un bilan entre flux convectifs, flux diffusifs et sources internes.

Les flux «diffusifs» impliquent des dérivées partielles d'ordre 2 qui ont pour effet de lisser les gradients, alors que les flux «convectifs» apparaissent au travers de dérivées partielles d'ordre 1 et rendent compte des propriétés de transport. L'importance relative de chacune de ces contributions contrôle la nature mathématique de ces équations, en particulier leur nature elliptique, parabolique ou hyperbolique, et ce en fonction du niveau de description physique adopté et du régime dynamique.

Il est intéressant d'illustrer certains de ces points à partir de l'équation du mouvement laminaire d'un fluide incompressible :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} \quad (3.1)$$

Si L , T , V , ρV^2 sont respectivement une longueur, un temps, une vitesse et une pression caractéristiques du système, on peut a-dimensionnaliser l'équation :

$$\frac{VT}{L} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \vec{v} \quad (3.2)$$

où Re est le nombre de Reynolds défini par

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} \quad (3.3)$$

Pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds $Re \ll 1$, *i.e.*, des écoulements dominés par les termes visqueux, on obtient les équations de Stokes

$$-\frac{\rho V^2 T}{\mu} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \Delta \vec{v} = Re \nabla p \quad (3.4)$$

Dans le cas stationnaire, cette équation est de type elliptique pour un gradient de pression donné, mais de type parabolique dans le cas non stationnaire en raison de l'opérateur laplacien. L'équation de Laplace (ou de Poisson) peut être considérée comme un prototype d'équation elliptique décrivant l'effet d'une diffusion isotrope dans toutes les directions de l'espace.

Par ailleurs, pour des grands nombres de Reynolds, $Re \gg 1$, en dehors des couches limites, les termes visqueux sont négligeables et l'écoulement est contrôlé par les termes de transport non visqueux traduisant l'effet des flux convectifs. L'équation se réduit alors à celle d'Euler :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.5)$$

qui est un prototype d'équation hyperbolique du premier degré décrivant un phénomène propagatif.

Cette distinction est fondamentale dans la mesure où la discrétisation numérique et les méthodes de résolution doivent tenir compte de la différence entre phénomènes diffusifs et propagatifs. La diffusion est essentiellement indépendante de la direction d'écoulement et agit dans toutes les directions de l'espace. La propagation est un phénomène directif et n'implique que des régions particulières de l'espace définies par les directions de propagation d'onde.

Entre ces deux extrêmes, les équations de type parabolique pour les systèmes dominés par la diffusion

$$\left(\frac{VT}{L} Re \right) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \Delta \vec{v} \quad (3.6)$$

est un cas intermédiaire, qui se réduit à un processus purement diffusif dans la limite stationnaire, qui décrit un effet de diffusion se propageant dans toutes les directions de l'espace mais amortie en temps. Les équations de Navier-Stokes sont donc des équations de type parabolique-hyperbolique, ou dans le cas stationnaire des équations de type elliptique-hyperbolique.

Les lois de conservation, qui gouvernent l'évolution d'un système physique, se traduisent donc par un système d'équation aux dérivées partielles au plus du second ordre. Dans la plupart des cas, un système du second ordre peut, après transformation, se ramener à un système du premier ordre. Une telle transformation peut cependant ne pas être unique et conduire à un système artificiellement dégénéré.

On abordera ici la notion de caractéristique d'un point de vue essentiellement physique et de façon élémentaire. Un système d'équations, quasi-linéaire, aux dérivées partielles sera dit hyperbolique si le système homogène associé admet des solutions propagatives de type ondes.

3.2 Surfaces caractéristiques et solution propagative

3.2.1 Un exemple simple de système hyperbolique

On considère le problème simple d'une équation scalaire, dans le cas 1D. On a ici $n_p = n_d = 1$, et le vecteur flux est une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que l'on supposera continue et dérivable. Le problème de Cauchy correspondant peut s'écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (3.7)$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \Omega(t) \subset \mathbb{R} \quad (3.8)$$

En posant $a(u) = \partial f / \partial u$, on peut écrire la forme quasi-linéaire associée

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = \mathcal{F} \quad (3.9)$$

Une solution propagative est une solution du type $u(x, t) = u(x - ct)$. En posant $\xi = x - ct$, l'équation homogène associée s'écrit

$$-c \frac{\partial u}{\partial \xi} + a(u) \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad [a(u) - c] \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad (3.10)$$

Pour que ce système ne soit pas dégénéré, la vitesse de propagation dans le système doit être : $c = a(u)$. On a alors

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.11)$$

Les courbes caractéristiques sont donc les directions le long desquelles :

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{dx}{dt} = a(u(x, t)) \quad (3.13)$$

L'équation aux dérivées partielles se ramène le long de ces directions à une équation différentielle ordinaire. Le long de ces directions la quantité u se propage et reste constante. Les courbes caractéristiques sont ici des droites dont la pente dépend de la condition initiale. La caractéristique passant par le point $(x_0, 0)$ peut alors être définie comme :

$$x = x_0 + t a(u_0(x_0)) \quad (3.14)$$

Considérons maintenant 2 points, x_1 et x_2 , tels que $x_1 < x_2$ et

$$m_1 = \frac{1}{a(u_0(x_1))} < m_2 = \frac{1}{a(u_0(x_2))} \quad (3.15)$$

Les caractéristiques, c_1 et c_2 , tracées à partir des points $(x_1, 0)$ et $(x_2, 0)$ ont respectivement pour pente m_1 et m_2 . Elles s'intersectent donc en un point P . En ce point la solution devrait avoir deux valeurs $u_0(x_1)$ et $u_0(x_2)$, ce qui n'est pas possible. La solution u subit donc une discontinuité au point P . Les deux caractéristiques s'intersectent au bout d'un temps fini

$$t [a(u_0(x_1)) - a(u_0(x_2))] = x_2 - x_1 \quad (3.16)$$

Pour un tel système, on ne peut donc définir une solution «classique» pour tout $t > 0$. Il existe un temps caractéristique t_c tel que pour tout $t < t_c$, une solution classique existe et peut être construite par intégration le long des caractéristiques.

$$t_c = -\frac{1}{\min(\alpha, 0)} \quad \alpha = \min_{y \in \mathbb{R}} \frac{d}{dy} [a(u_0(y))] \quad (3.17)$$

3.2.2 Équation aux dérivées partielles du second ordre

On peut généraliser le concept de surface caractéristique au cas d'équations aux dérivées partielles du second ordre. Seuls les coefficients des dérivées d'ordre élevé interviennent, et l'on peut dans un premier temps considérer l'équation simple suivante avec $n_p = 1$ et $n_d = 2$,

$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + 2b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + H = 0 \quad (3.18)$$

où H contient tous les termes du premier ordre et les termes constants. Les coefficients a, b et c peuvent être des fonctions des variables spatiales (x_1, x_2) , de ϕ et de ses dérivées premières.

En introduisant les variables $u_1 = \partial\phi/\partial x_1$ et $u_2 = \partial\phi/\partial x_2$, on peut alors écrire le système sous la forme d'un système d'équations du premier ordre équivalent

$$a \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 2b \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + c \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + H = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0 \quad (3.20)$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle

$$A^1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + A^2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + H = 0 \quad (3.21)$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2b & c \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Si l'on considère, pour le système homogène associé, des solutions propagatives sous la forme d'une onde plane se propageant dans la direction \vec{n}

$$U = \hat{U} \exp(i \vec{n} \cdot \vec{x}) = \hat{U} \exp(i\{n_1 x_1 + n_2 x_2\}) \quad (3.23)$$

Une solution de ce type doit satisfaire à

$$(A^1 n_1 + A^2 n_2) \hat{U} = 0 \quad (3.24)$$

l'existence de solutions non triviales impose alors

$$\det |A^1 n_1 + A^2 n_2| = 0 \quad (3.25)$$

d'où

$$\begin{vmatrix} a n_1 + 2b n_2 & c n_2 \\ -n_2 & n_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.26)$$

soit, si $n_2 \neq 0$,

$$a \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 + 2b \left(\frac{n_1}{n_2}\right) + c = 0 \quad (3.27)$$

On en déduit que si

$b^2 - ac > 0$, on a deux solutions propagatives avec deux directions indépendantes. L'équation est alors hyperbolique.

$b^2 - ac < 0$, on a deux solutions complexes conjuguées. L'équation est alors elliptique.

$b^2 - ac = 0$, on a une racine double, et une seule direction de propagation $\frac{n_1}{n_2} = \frac{b}{2a}$. L'équation est alors parabolique.

Remarque 32. Une représentation plus générale consiste à définir une surface, ou front d'onde, séparant la région déjà influencée par la perturbation se propageant de la région non encore atteinte par l'onde. Soit Σ une telle surface, encore appelée surface de phase, $\Sigma \cap \Omega \subset \mathbb{R}^2$, et a pour équation $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$. Une solution de type onde peut alors s'écrire sous la forme

$$U = \hat{U} \exp(i\varphi(\mathbf{x})) \quad (3.28)$$

Le système d'équation est hyperbolique si U est solution pour toutes les valeurs réelles de $\varphi(\mathbf{x})$. En reprenant le système précédent et en désignant par $\vec{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ la normale de Σ , au point \mathbf{x}

$$\det |A^1 n_1 + A^2 n_2| = 0 \quad (3.29)$$

où

$$n_1 = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \quad n_2 = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_2} \quad (3.30)$$

Les surfaces Σ qui satisfont à cette condition sont appelées surfaces caractéristiques. En reprenant les solutions du type précédent, on peut écrire

$$U = \hat{U} \exp(i(\vec{\mathbf{x}} \cdot \nabla \varphi)) \quad (3.31)$$

Par définition certaines propriétés sont transportées le long de la surface Σ et les vecteurs tangents à la surface caractéristique sont donnés par la relation :

$$d\varphi = \nabla \varphi \cdot \vec{d\mathbf{x}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (3.32)$$

et la direction de la surface caractéristique (une ligne à deux dimensions) est donnée par :

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{n_1}{n_2} \quad (3.33)$$

3.2.3 Définition générale

Considérons maintenant, la forme générale des équations de conservation.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n_d} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f}^j = \mathcal{F} \quad (3.34)$$

où n_d est la dimension spatiale du problème, n_p le nombre de variables conservatives, \mathbf{U} le vecteur des variables conservatives $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_{n_p})^T \in \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{n_p}$ et $\mathbf{f}^j, j = 1, \dots, n_d$ les n_d vecteur flux $\mathbf{f}^j = (f_1^j, \dots, f_{n_p}^j)$. On peut réécrire ce système sous forme quasi-linéaire :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n_d} \mathbf{A}^j(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} = \mathcal{F} \quad (3.35)$$

où \mathbf{A}^j est une matrice ($n_p \times n_p$) définie comme le jacobien du vecteur flux \mathbf{f}^j

$$\mathbf{A}_{kl}^j(\mathbf{U}) = \frac{\partial f_k^j}{\partial U_l} \quad (3.36)$$

Ce système exprime formellement la conservation des n_p quantités U_1, \dots, U_{n_p} dans le domaine physique $\Omega(t)$.

Le système d'équations est dit hyperbolique si $\forall \mathbf{U} \in \mathcal{B}$ et pour tout $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{n_d}) \in \mathbb{R}^{n_d}$, $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega})$ définie par :

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^{n_d} \omega_j \mathbf{A}^j(\mathbf{U}) \quad (3.37)$$

$$A_{kl}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^{n_d} \omega_j A_{kl}^j(\mathbf{U}) \quad (3.38)$$

a n_p valeurs propres réelles $\lambda_1(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) \leq \dots \leq \lambda_{n_p}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega})$, et n_p vecteurs propres correspondant, linéairement indépendants, $\mathbf{w}^1(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}), \dots, \mathbf{w}^{n_p}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega})$

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) \mathbf{w}^k(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) = \lambda_k(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) \mathbf{w}^k(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}), \quad 1 \leq k \leq n_p \quad (3.39)$$

$$A_{ij}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) w_j^k(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) = \lambda_k(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) w_j^k(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) \delta_{ij}, \quad 1 \leq k \leq n_p, i, j = 1, \dots, n_p \quad (3.40)$$

De plus le système est strictement hyperbolique, pour un état \mathbf{U} , si toutes les valeurs propres sont distinctes. On notera $\mathbf{l}^k(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}), k = 1, \dots, n_p$ les n_p vecteurs propres «à gauche» définis par :

$$\mathbf{l}^k(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega})^T \mathbf{A}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) = \lambda_k(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) \mathbf{l}^k(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) \quad (3.41)$$

$$l_i^k(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega})^T A_{ij}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) = \lambda_k(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) l_i^k(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) \delta_{ij}, \quad 1 \leq k \leq n_p, i, j = 1, \dots, n_p \quad (3.42)$$

que l'on peut définir également comme les vecteurs propres de $\mathbf{A}^T(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega})$. Si les valeurs propres sont distinctes, on a la relation duale :

$$\mathbf{l}^j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{w}^k(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) = 0 \quad (3.43)$$

Caractéristiques

Considérons une (hyper)surface $\Sigma \in \mathbb{R}^{n_d} \times [0, \infty[$ d'équation $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$. On peut définir

$$n_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \vec{v} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)^T \in \mathbb{R}^{n_d}, \quad \vec{\mathbf{n}} = (n_t, \vec{v}) \in \mathbb{R}^{n_d+1} \quad (3.44)$$

$\vec{\mathbf{n}}$ est le vecteur normal à la surface Σ . On supposera en outre pour l'instant que le vecteur \vec{v} est un vecteur unité.

La définition mathématique d'une surface caractéristique est alors la suivante: la surface Σ est une surface caractéristique pour le système, en point (\mathbf{x}_0, t_0) si la matrice

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathbf{I} + \sum_{j=1}^{n_d} \mathbf{A}^j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

est singulière en ce point. Compte tenu de cette définition, si la surface Σ est une surface caractéristique, la matrice

$$\mathbf{M}(\mathbf{U}, \vec{\mathbf{n}}) = n_t \mathbf{I} + \sum_{j=1}^{n_d} \mathbf{A}^j(\mathbf{U}) \nu_j = n_t \mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{U}, \vec{\nu}) \quad (3.45)$$

est alors non inversible ce qui implique que $-n_t$ est une valeur propre de $\mathbf{A}(\mathbf{U}, \vec{\nu})$, *i.e.*, $n_t = -\lambda_k(\mathbf{U}, \vec{\nu})$.

soit les n_p valeurs propres $\lambda_k(\mathbf{U}, \vec{\nu})$, on a alors

$$n_t^{(k)} = -\lambda_k(\mathbf{U}, \vec{\nu}) \quad (3.46)$$

Il est intéressant par ailleurs de noter que l'intensité des perturbations propagatives sont les vecteurs propres à droites $\mathbf{w}(\mathbf{U}, \vec{\nu})$

Une approche plus physique consiste à introduire des solutions de type onde. Si l'hyper-surface Σ représente le front d'onde et a pour équation $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$, la forme générale de l'onde est donnée par :

$$\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}} \exp(i(\vec{\mathbf{x}} \cdot \nabla \varphi + t \varphi, t)) \quad (3.47)$$

De telles solutions sont solutions du système si

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n_d} \mathbf{A}^j(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.48)$$

La surface doit satisfaire à

$$\det \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathbf{I} + \mathbf{A}^j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right| = 0 \quad (3.49)$$

ce qui est équivalent à la définition mathématique précédente. La fréquence de l'onde est alors définie par

$$\omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -n_t \quad (3.50)$$

et le vecteur nombre d'onde $\vec{\kappa}$, dont l'amplitude est le nombre de périodes ou de longueurs d'onde sur la distance 2π dans la direction du vecteur $\vec{\kappa}$, est défini par

$$\vec{\kappa} = \nabla \varphi = \vec{\nu} \quad (3.51)$$

Le vecteur $\nabla \varphi$ est normal à l'intersection de la surface du front d'onde avec les hypersurfaces à $t = cste$. Les normales $\vec{\nu}$ sont donc définies dans l'espace de dimension n_d des variables spatiales. Le vecteur nombre d'onde $\vec{\kappa}$ est normal aux surfaces caractéristiques dans l'espace de dimension n_d pour un temps t fixe.

Les n valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{U}, \vec{\kappa})$

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}, \vec{\kappa}) = \sum_{j=1}^{n_d} \mathbf{A}^j(\mathbf{U}) \kappa_j \quad (3.52)$$

définissent alors les n_p relations de dispersions pour les fréquences

$$\omega_k = \lambda_k(\vec{\varkappa}(\vec{x}, t)), \quad 1 \leq k \leq n_p \quad (3.53)$$

Remarque 33. Dans le cas d'une onde non-linéaire, on

$$\vec{\varkappa} = \vec{\varkappa}(\vec{x}, t) \quad (3.54)$$

$$\omega = \omega(\vec{\varkappa}(\vec{x}, t)) \quad (3.55)$$

Dans ce cas, on a

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = i \mathbf{U} \left[-\omega - t \frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{x} \cdot \frac{\partial \vec{\varkappa}}{\partial t} \right] = i \mathbf{U} \left[-\omega + (\vec{x} - t \nabla_{\varkappa} \omega) \cdot \frac{\partial \vec{\varkappa}}{\partial t} \right] \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_k} = i \mathbf{U} \left[\varkappa_k - t \frac{\partial \omega}{\partial x_k} + \vec{x} \cdot \frac{\partial \vec{\varkappa}}{\partial x_k} \right] = i \mathbf{U} \left[\varkappa_k + (\vec{x} - t \nabla_{\varkappa} \omega) \cdot \frac{\partial \vec{\varkappa}}{\partial x_k} \right] \quad (3.57)$$

la dérivée de la fréquence par rapport à la j ème composante du vecteur d'onde représente la j ème composante de la vitesse de groupe de l'onde

$$\vartheta_j^{(G)} = \frac{\partial \omega}{\partial \varkappa_j} \quad (3.58)$$

Les termes entre paraenthèse s'annuleront donc pour un observateur qui se déplace à la vitesse de groupe, soit

$$\frac{\vec{x}}{t} = \nabla_{\varkappa} \omega \quad (3.59)$$

La vitesse de groupe est la vitesse avec laquelle se propage l'énergie.

Définition alternative : relations de compatibilité

Une définition alternative des surfaces caractéristiques ou de l'hyperbolicité peut être obtenue à partir du fait que les surfaces de front d'onde transporte certaines propriétés et qu'une description complète du système physique est obtenue lorsque toutes ces propriétés sont connues. Ceci implique que le système initial, s'il est hyperbolique, peut être reformulé comme des relations différentielles écrites uniquement le long du front d'onde ou des surfaces caractéristiques.

Une équation caractéristique peut être obtenue de la manière suivante: en transformant le système d'équation via une combinaison linéaire des équations du système

$$\vec{\alpha} \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n_d} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f}^j(\mathbf{U}) \right\} = 0, \quad \vec{\alpha} = \{\alpha_i\}^T \in \mathbb{R}^{n_p} \quad (3.60)$$

ou

$$\sum_{i=1}^{n_p} \alpha_i \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j,k=1}^{n_d} \frac{\partial f_i^j}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right\} = \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_i \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n_d} A_{ik}^j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right\} = 0 \quad (3.61)$$

de façon à ce que le système équivalent ne contiennent que des dérivées de chacun des u_k dans des directions le long des surfaces caractéristiques de dimension n_d , au lieu de $n_d + 1$ comme dans le système initial. Cela revient à dire qu'elles sont normales au vecteur normal de la surface Σ . Si l'équation de la surface est $\varphi(\vec{x}, t) = 0$, son vecteur normal est $(n_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \vec{n} = (\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_d}$. La dérivée directionnelle de chacun des u_k est alors $(\alpha_k, \sum_{i,j} \alpha_i \frac{\partial f_i^j}{\partial u_k} \vec{e}^j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_d}$ où \vec{e}^j est la base standard de \mathbb{R}^{n_d} . On impose donc

$$\alpha_k \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i,j} \alpha_i \frac{\partial f_i^j}{\partial u_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0, \quad k = 1, \dots, n_p \quad (3.62)$$

Ce qui se ramène à un système linéaire $n_p \times n_p$ en α_i , qui admet une solution non triviale si et seulement si son déterminant est nul

$$\det \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathbf{I} + \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{A}^j(\mathbf{U}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right| = 0 \quad (3.63)$$

Le système est dit hyperbolique si les n_p normales, $\vec{n}^{(k)}$, aux caractéristiques sont toutes réelles et si les n_p vecteurs $\vec{\alpha}$, solutions des n_p systèmes d'équations, sont indépendants. Une propriété essentielle est que les singularités de la solution se propagent le long des surfaces caractéristiques.

3.2.4 Domaine de dépendance et zone d'influence

Cas hyperbolique

Les propriétés propagatives des systèmes hyperboliques ont d'importantes conséquences quant à la façon dont l'information physique est transmise au travers de la région d'écoulement.

Soit Γ une frontière, Figure 3.1, distincte d'une surface caractéristique. La solution \mathbf{U} le long du segment AB de Γ va se propager dans le domaine le long des caractéristiques issues de AB .

Pour un problème hyperbolique d'évolution 1D, en x, t , gouverné par une équation du second ordre, il y a par définition deux familles de caractéristiques. Les deux caractéristiques issues de A et de B limitent une région PAB qui détermine la solution au point P , puisque les caractéristiques issues d'un point extérieur AB , par exemple C , n'atteindront jamais le point P . Cette région est appelée la *région de dépendance* du point P . Par ailleurs, la région en aval du point P et limitée par les deux caractéristiques, définit une zone dans laquelle la solution est influencée par la valeur de la solution prise au point P . Cette région est appelée *région d'influence* du point P .

Considérons par exemple, sur le domaine $\Omega = [0, 1]$, le système :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.64)$$

qui est un prototype d'équation d'onde. Ce système est hyperbolique et admet comme directions caractéristiques, Figure 3.2,

$$\frac{dx}{dt} = \pm 1 \quad (3.65)$$

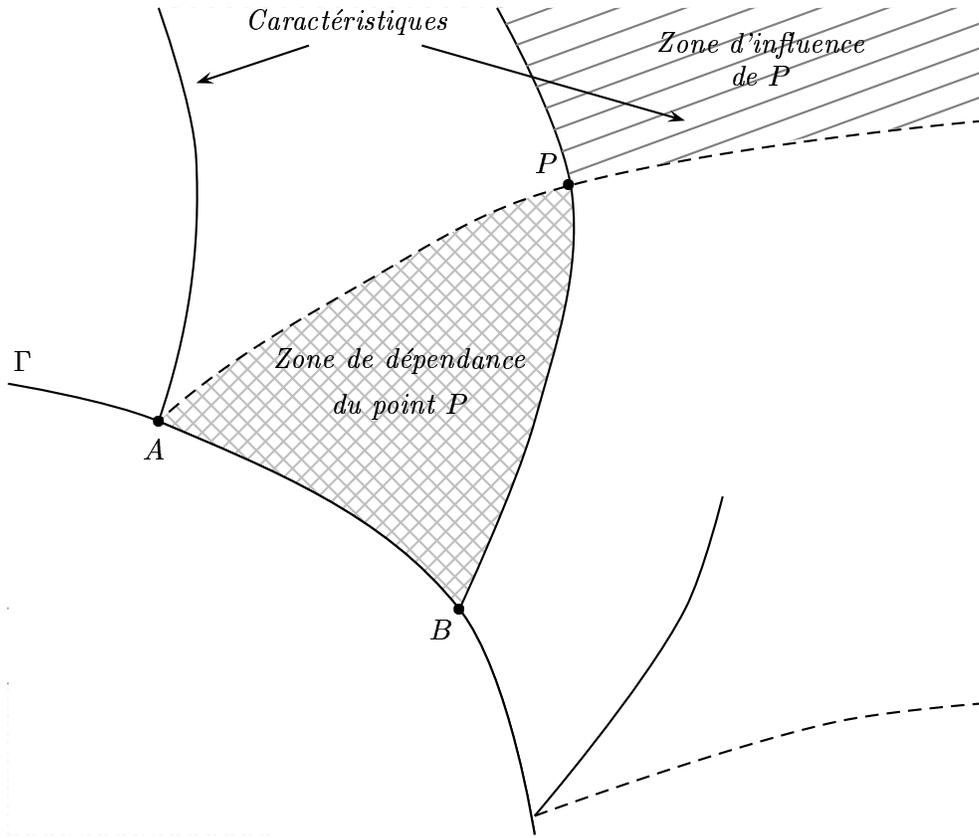


FIG. 3.1: Région de dépendance et zone d'influence d'un point P pour un problème hyperbolique possédant deux familles de caractéristiques

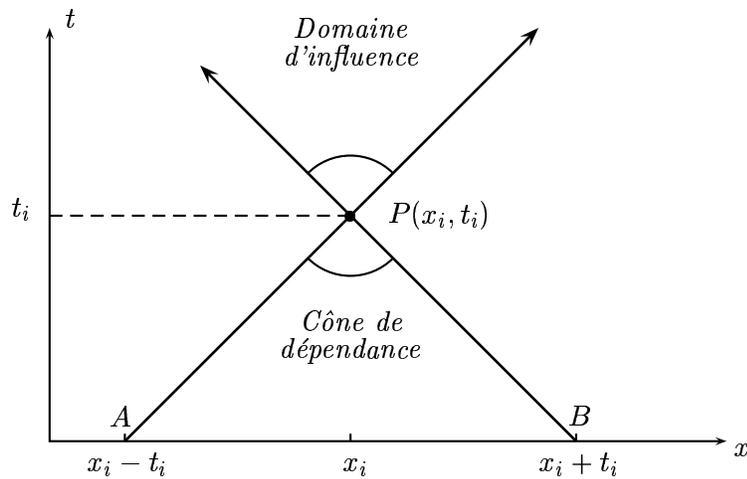


FIG. 3.2: Cône de dépendance et zone d'influence d'un point P pour l'équation 3.65

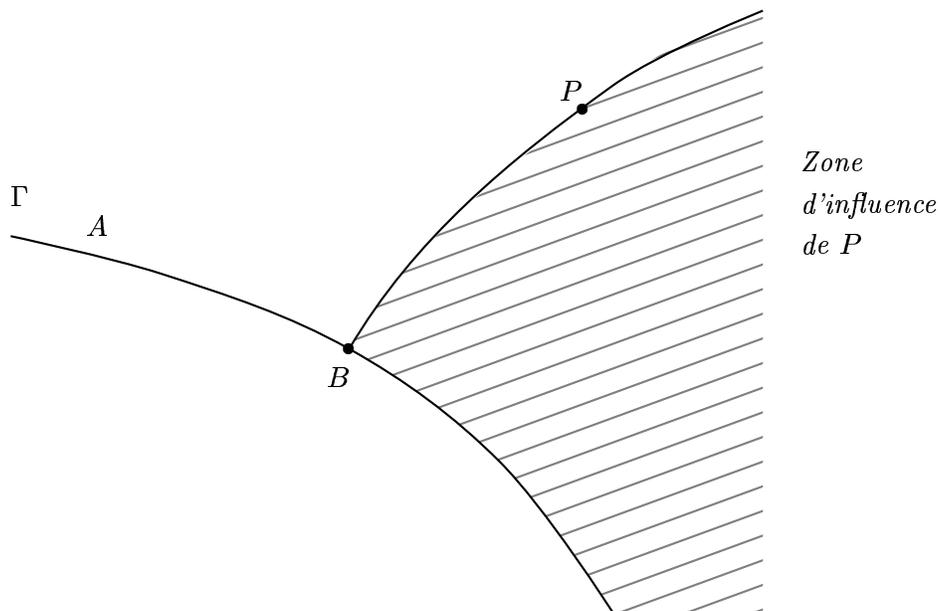


FIG. 3.3: Région de dépendance et zone d'influence d'un point P pour un problème parabolique avec une seule famille de caractéristiques

Pour des conditions initiales $u(x, 0) = \sin \pi x$ et $\partial u / \partial t(x, 0) = 0$, ainsi que des conditions aux limites périodiques $u(0, t) = u(1, t) = 0$, la solution peut s'écrire sous la forme

$$u(x, t) = \sin \pi x \cos \pi t \quad (3.66)$$

On notera que cette solution est propagative et l'absence d'atténuation.

Cas parabolique

Pour les problèmes paraboliques, les deux caractéristiques sont identiques, Figure 3.3 et la région de dépendance du point P se réduit au segment BP . La zone d'influence de P est alors la région à droite de la caractéristique BP . Une perturbation introduite au point P , au temps t_i , peut influencer tout point du domaine $t > t_i$, mais l'amplitude de la perturbation décroît très rapidement. L'incorporation d'un processus dissipatif implique que toute discontinuité dans les conditions initiales est atténuée à l'intérieur du domaine et disparaît. La solution avance en temps et diffuse en espace, étalant ainsi la discontinuité.

Considérons par exemple, sur le domaine $\Omega = [0, 1]$, l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.67)$$

avec pour condition initiale $u(x, 0) = \sin \pi x$ et des conditions aux limites périodiques $u(0, t) = u(1, t) = 0$. La solution de ce système est

$$u(x, t) = \sin \pi x \exp(-\pi^2 t) \quad (3.68)$$

On notera ici l'atténuation de forme exponentielle à la différence du cas hyperbolique. Les conditions aux limites de type Dirichlet doivent être compatibles avec les conditions initiales.

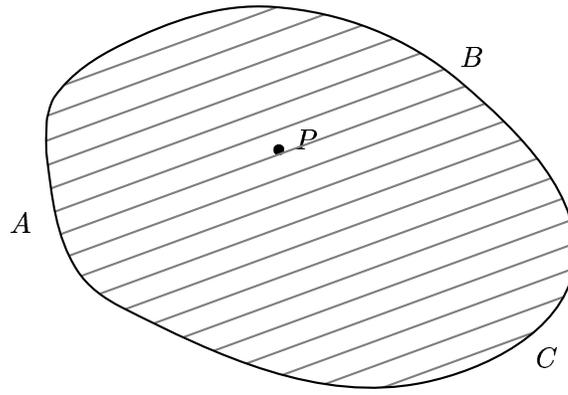


FIG. 3.4: Région entourant P dans le cas d'un problème elliptique.

Cas elliptique

Dans ce cas, il n'y a pas de caractéristiques réelles et la solution en un point P dépend de tous les points du domaine puisque le problème physique est purement diffusif. Inversement l'ensemble de la frontière ACB entourant le point P est influencée par le point P , Figure 3.4. Dans ce cas, la région de dépendance et la zone d'influence sont confondues et égale à l'ensemble du domaine.

L'exemple le plus simple est celui de l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0 \quad (3.69)$$

avec pour conditions aux limites des conditions de type Dirichlet, ou Neumann, ou mixtes. Si une condition de type Neumann est appliquée sur l'ensemble de la frontière du domaine Ω , il faut veiller à ce qu'elle soit compatible avec l'équation de conservation (formule de Green)

$$\int_{\partial\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d\gamma = - \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \, dv \quad (3.70)$$

Une telle équation peut représenter un écoulement potentiel. Considérons sur le domaine $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, les conditions aux limites $u(x, 0) = \sin \pi x$; $u(x, 1) = \sin \pi x \exp(-\pi)$ et $u(0, y) = u(1, y) = 0$, la solution est

$$u(x, y) = \sin \pi x \exp(-\pi y) \quad (3.71)$$

3.3 Solutions faibles : conditions de Rankine-Hugoniot

Considérons à nouveau le problème de Cauchy associé au système des lois de conservation, pour un domaine $\Omega(t)$:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1, n_d} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f}^j(\mathbf{U}) = \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega(t) \subset \mathbb{R}^{n_d}, \quad t > 0 \quad (3.72)$$

avec

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}) \quad (3.73)$$

Une solution \mathbf{U} est dite «classique» si \mathbf{U} est une solution C^1 satisfaisant au problème précédent. Malheureusement, une caractéristique essentielle de ce type de problème est qu'il n'existe pas en général de solutions «classique» au delà d'un temps fini, et ce même lorsque les conditions initiales sont très lisses. On est amené à devoir définir des solutions au sens faible.

Considérons le problème de Cauchy, avec pour conditions initiales des fonctions $\mathbf{U}_0 \in \mathbf{L}_{loc}^\infty(\Omega)^{n_p}$, où \mathbf{L}_{loc}^∞ désigne l'espace des fonctions mesurables et localement bornées. Soit l'ensemble des fonctions $\phi \in C_0^1(\Omega \times [0, \infty[^{n_p})$ où C_0^1 est l'ensemble des fonctions C^1 à support compact dans $\Omega \times [0, \infty[$. En considérant tout d'abord des solutions du problèmes de Cauchy \mathbf{U} de type C^1 , on a par simple application du théorème de Green :

$$\begin{aligned} - \int_0^\infty \int_{\Omega(t)} \left\{ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n_d} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f}^j(\mathbf{U}) \right\} \cdot \phi \, dx dt = \\ \int_0^\infty \int_{\Omega(t)} \left\{ \mathbf{U} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n_d} \mathbf{f}^j(\mathbf{U}) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\} dx dt + \int_{\Omega} \mathbf{U}_0 \cdot \phi(\mathbf{x}, 0) \, dx \end{aligned} \quad (3.74)$$

Pour toute solution classique, on a alors

$$\int_0^\infty \int_{\Omega(t)} \left\{ \mathbf{U} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\} dx dt + \int_{\Omega} \mathbf{U}_0 \cdot \phi(\mathbf{x}, 0) \, dx = 0 \quad (3.75)$$

Une solution faible de problème de Cauchy est définie alors comme une fonction $\mathbf{U} \in \mathcal{B}$ qui satisfait à l'équation précédente pour tout ϕ . Si par ailleurs, $\phi \in C_0^\infty(\Omega \times [0, \infty[^{n_p})$, alors \mathbf{U} satisfait le problème de Cauchy au sens des distributions. Par construction, une solution classique est aussi une solution faible.

Si l'on considère des solutions du problèmes de Cauchy au sens des distributions qui sont seulement continues par morceaux, on peut en particulier étudier des solutions \mathbf{U} qui sont C^1 par morceaux dans $\Omega(t)$. Cela revient à admettre l'existence d'un nombre fini de surfaces mesurables Σ dans l'espace (\mathbf{x}, t) , en dehors desquelles \mathbf{U} est C^1 et au travers desquelles \mathbf{U} subit une discontinuité. Soit Σ une telle surface, on notera $\vec{\mathbf{n}} = (n_t, \vec{\nu})$ le vecteur normal avec $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_{n_d})$. On désignera par ailleurs \mathbf{U}_+ et \mathbf{U}_- les limites de la solution \mathbf{U} de part et d'autre de Σ

$$\mathbf{U}_\pm(\mathbf{x}, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} \mathbf{U}((\mathbf{x}, t) \pm \epsilon \vec{\mathbf{n}}) \quad (3.76)$$

Les discontinuités doivent satisfaire à certaines conditions. Considérons un point M de $\Sigma(t)$, et $\mathcal{D}(t)$ un voisinage de ce point. On a la relation, pour $\phi \in C_0^\infty(\mathcal{D})^{n_p}$